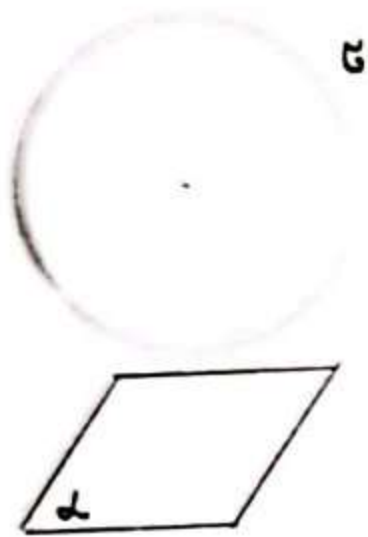
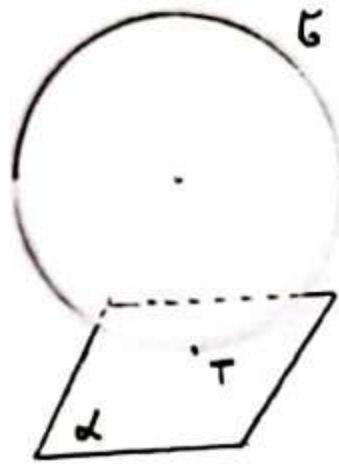


Сферна геометрија

- Сферна геометрија је геометрија на дводимензионој површи сфере (мотивација за њено проучавање је то што живимо на планети Земљи која је приближно сферног облика).
- Међусобни положај равни α и сфере β

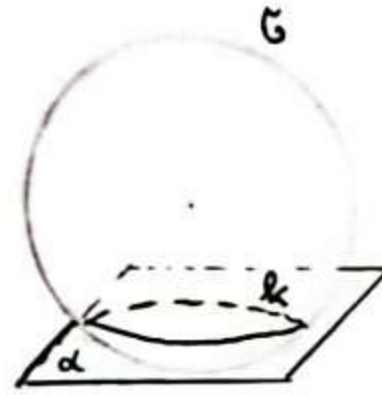


$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$



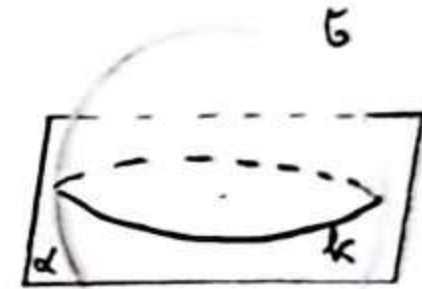
$$\alpha \cap \beta = \{T\}$$

α се зове тангентна равна сфере β



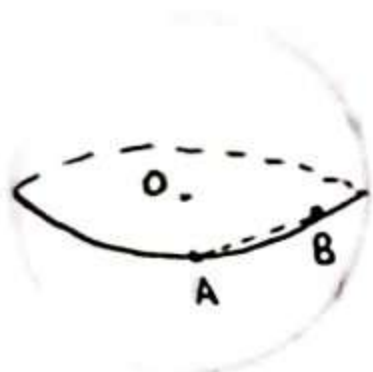
$$\alpha \cap \beta = k$$

← Пресечни круг је највећи када равна α садржи центар сфере. Такав круг са сфере, чији се центар поклапа са центром сфере, зове се велики круг.

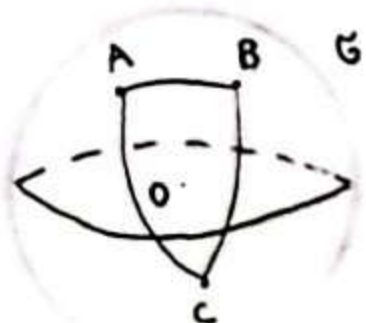


- Најкраће растојање између тачака А и В на сфери се остварује по луку великог круга који их спаја.

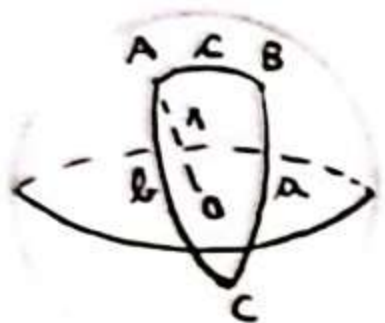
(Ако су А и В две тачке на површини Земље и желимо да дођемо у тачку В из тачке А и то крећући се по површини сфере, испоставља се да је од свих линија које спајају А и В најкраћа она која је краћи лук великог круга сфере који садржи тачке А и В).



- Сферни троугао



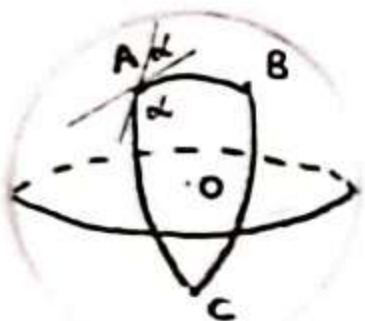
Тачке А, В и С са сфере β су темена сферног троугла ABC, при чему вектори $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ морају бити линеарно независни где је О центар сфере β . Из тога следи да никоја два темена сферног троугла не могу бити дијаметрално супротне (антиподадне) тачке, а важи и да тачке А, В и С не могу припадати истом великом кругу. Странице сферног троугла дефинишемо као краће лукове великих кругова који спајају темена.



Дужине страница можемо обележити са $a = \widehat{BC}$, $b = \widehat{AC}$ и $c = \widehat{AB}$.

Ако је S јединична сфера, онда велики круг те сфере има обим $2 \cdot 1\pi = 2\pi$ (полупречник великог круга је исти као полупречник сфере), а то значи да су дужине страница сферног троугла јединичне сфере између 0 и π (јер су крати лукови великих кругова дужине мање од π).

Дакле, $a \in (0, \pi)$, $b \in (0, \pi)$, $c \in (0, \pi)$.



Угао између страница сферног троугла једнак је углу између одговарајућих тангенти у теменима.

$\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$

• Косинусна и синусна теорема

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{aligned} \right\} \text{косинусна теорема}$$

$$\left. \begin{aligned} -\cos \alpha &= \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a \\ -\cos \beta &= \cos a \cos \gamma - \sin a \sin \gamma \cos b \\ -\cos \gamma &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos c \end{aligned} \right\} \text{дуална косинусна теорема}$$

За сферни троугао важи $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$ (синусна теорема)

• Неједнакост троугла

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

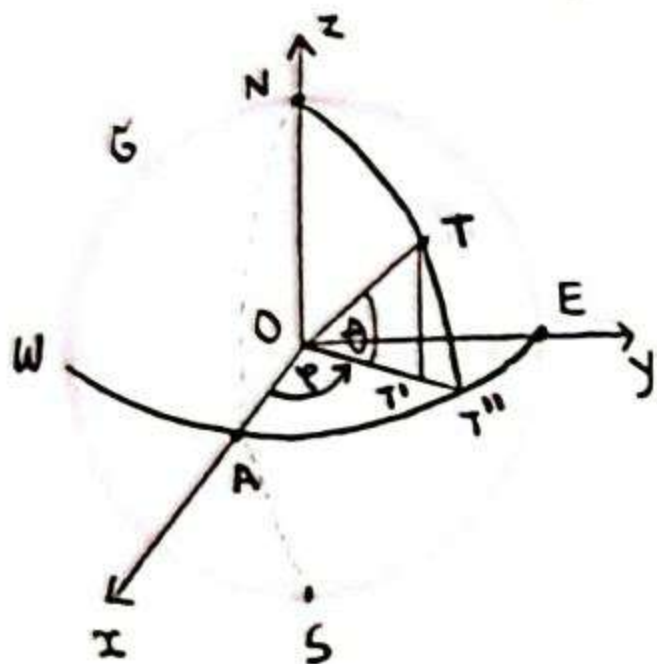
$$|a - b| < c < a + b$$

• Збир углова у сферном троуглу је већи од π , односно $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

• Обим сферног троугла је $O = a + b + c$, а површина му је $P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

• Сферне координате

Сферне координате у сферној геометрији су мотивисане географским координатама на Земљи, а то су географска ширина и географска дужина. Нека је $Oxyz$ Декартов правоугли координатни систем чији се координатни почетак поклапа са центром сфере.



Нека је T произвољна тачка са сфере B . Ако је $T(x, y, z)$, онда на основу Леме 1 из задатка 7.13. следи да је нормална пројекција тачке T на равни Oxy тачка $T'(x, y, 0)$. Угао између вектора x -осе ($\vec{e}_1$) и вектора $\vec{OT'}$ (са знаком, односно позитиван ако се иде у смеру супротном од казаљке на часовнику, односно негативан ако се иде у смеру кретања казаљке на часовнику) зове се географска дужина тачке T и најчешће се означава са φ .

Важи $-\pi < \varphi \leq \pi$ (по договору је географска дужина тачака са негативног дела x -осе једнака π). Угао $\angle T'OT$ (са знаком, односно позитиван ако тачка T има позитивну z -координату, односно негативан ако је тачка T са негативном z -координатом) назива се географском ширином тачке T и најчешће се означава са θ . Важи да је $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, при чему се за $\theta = \frac{\pi}{2}$ добија тачка $N(0, 0, 1)$, а за $\theta = -\frac{\pi}{2}$ тачка $S(0, 0, -1)$ које немају дефинисану географску дужину. Тачка N се зове северни пол, а тачка S јужни. Велики круг у равни Oxy се зове екватор (све његове тачке имају географску ширину 0).

Означимо пресечну тачку полуправе OT' и екватора са T'' .

Ако је сфера B јединична, онда је $\widehat{T'T''} = |\theta|$.

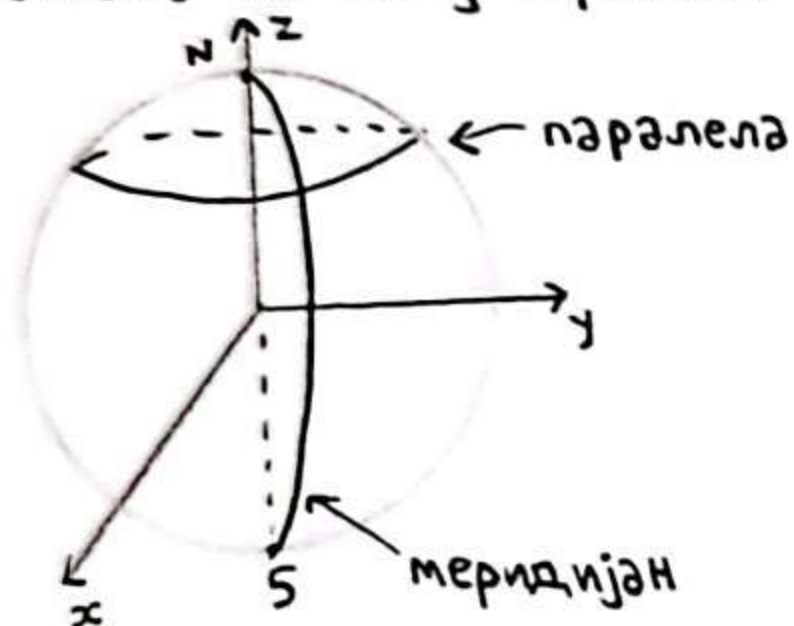
Ако је $A(1, 0, 0)$, онда је полукруг $\widehat{NAS}$ гринички меридијан (све његове тачке имају географску дужину 0).

Ако је сфера B јединична, онда је $\widehat{AT''} = \varphi$ јер је $\angle AOT'' = \varphi$.

Приметимо да су тангенте на $\widehat{NAS}$ и $\widehat{NTT''}$ у тачки N паралелне са OA и OT'' , редом, те је $\angle ANT = \angle AOT'' = |\varphi|$.

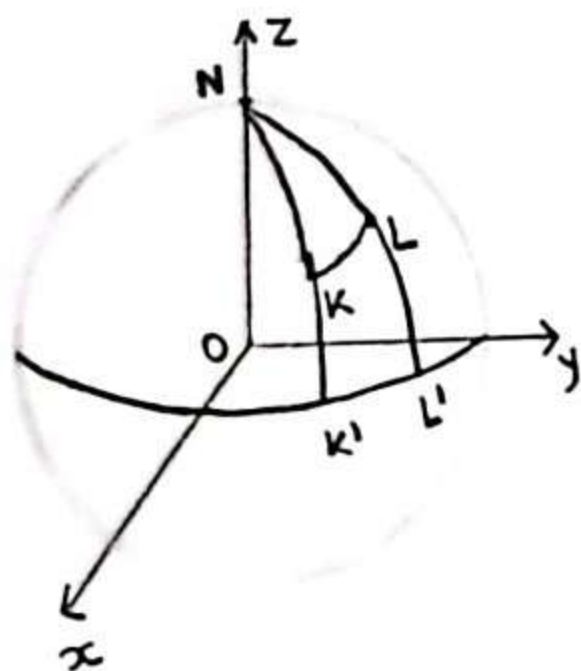
Велики полукругови који спајају N и S зову се меридијани и свим тачкама на истом меридијану је иста географска дужина.

Кругови који су у пресеку равни нормалних на z-осу и сфере зову се паралеле и свим тачкама на истој паралели је иста географска ширина.



Веза између Декартових и сферних координата је: $x = \cos\theta \cos\varphi$, $y = \cos\theta \sin\varphi$, $z = \sin\theta$.

За израчунавање растојања између тачака K и L са сфере којима су познате сферне координате користи се сферни троугао NKL.



$$\widehat{NK} = \frac{\pi}{2} - \theta_K \text{ јер је } \widehat{NK} = \widehat{NK'} - \widehat{KK'} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \cdot \theta_K = \frac{\pi}{2} - \theta_K$$

$$\widehat{NL} = \frac{\pi}{2} - \theta_L \text{ јер је } \widehat{NL} = \widehat{NL'} - \widehat{LL'} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \cdot \theta_L = \frac{\pi}{2} - \theta_L$$

$$\angle KNL = |\varphi_L - \varphi_K| \text{ јер је } \angle KNL = \angle K'OL' = \angle xOL' - \angle xOK' = \varphi_L - \varphi_K \text{ на слици лево}$$

На основу косинусне теореме је $\cos \widehat{KL} = \cos \widehat{NK} \cos \widehat{NL} + \sin \widehat{NK} \sin \widehat{NL} \cos \angle KNL$.

$$\cos \widehat{KL} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_K \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_L \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_K \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_L \right) \cdot \cos |\varphi_L - \varphi_K|$$

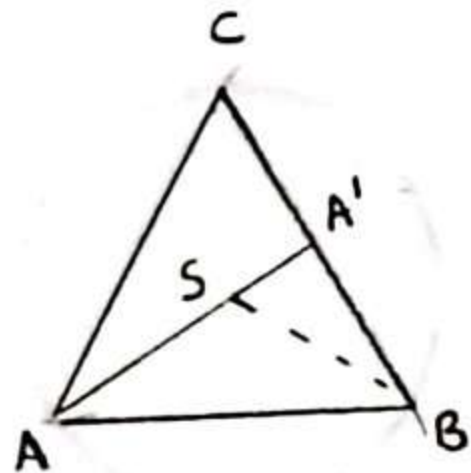
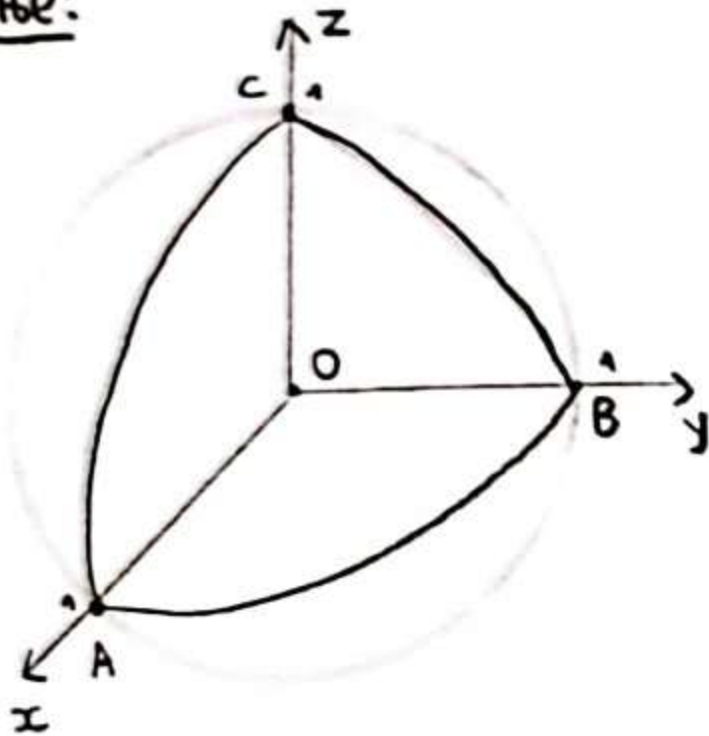
$$\cos \widehat{KL} = \sin \theta_K \sin \theta_L + \cos \theta_K \cos \theta_L \cos (\varphi_L - \varphi_K)$$

↑
cos је парна
функција

8 Сферна геометрија

- 8.1. Одредити полупречник круга k на јединичној сфери који садржи тачке $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.
Упоредити растојање између тачака A и B мерено по кругу k са растојањем по великом кругу између A и B .

Решење:



Растојање између тачака A и B мерено по кругу k је дужина краћег лука $\widehat{AB}$ описаног круга k око троугла ABC .

$$\vec{AB} = [B] - [A] = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0)$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

$$\vec{AC} = [C] - [A] = (0,0,1) - (1,0,0) = (-1,0,1)$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{BC} = [C] - [B] = (0,0,1) - (0,1,0) = (0,-1,1)$$

$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

Како је $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = \|\vec{BC}\| = \sqrt{2}$, то је троугао ABC једнакостраничан, те се све његове значајне тачке налазе у центру S троугла ABC .

$$\{A'\} = AS \cap BC$$

Како је тачка S ортоцентар троугла ABC , то је AA' висина тог троугла, те је $AA' = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ као висина једнакостраничног троугла

ABC странице $AB = \sqrt{2}$. Како је тачка S тежиште троугла ABC , то

S дели тежишну дуж AA' у односу $2:1$, односно $AS:SA' = 2:1$, те је

$$AS = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Како је тачка S центар описаног круга око троугла ABC , то је AS полупречник тог описаног круга, а $\angle ASB = 2 \cdot \angle ACB = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ јер је централни угао $\angle ASB$ над кружним луком $\widehat{AB}$ два пута већи од периферијског угла $\angle ACB$ над истим кружним луком $\widehat{AB}$.

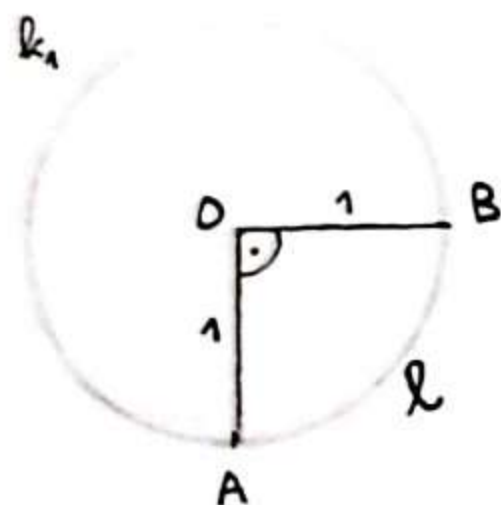
$\widehat{AB} : O_k = 120^\circ : 360^\circ \leftarrow$ дужина лука $\widehat{AB}$ се према обиму круга k односи као њихови централни углови

$$\widehat{AB} \cdot 360^\circ = O_k \cdot 120^\circ$$

$$\widehat{AB} = \frac{O_k \cdot 120^\circ}{360^\circ}$$

$$\widehat{AB} = \frac{O_k}{3} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \pi}{3} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \pi}{3} = \frac{2\sqrt{6}\pi}{9}$$

Растојање између тачака A и B мерено по великом кругу посматране сфере је дужина ℓ кратег лука између тачака A и B јединичног круга k_1 сфере у Oxy равни.



$$\vec{OA} = [A] - [O] = (1, 0, 0) - (0, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{OB} = [B] - [O] = (0, 1, 0) - (0, 0, 0) = (0, 1, 0)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \begin{matrix} \vec{OA} \neq \vec{0} \\ \vec{OB} \neq \vec{0} \end{matrix} \Rightarrow \angle(OA, OB) = 90^\circ$$

$$\ell : O_{k_1} = 90^\circ : 360^\circ$$

$$\ell \cdot 360^\circ = O_{k_1} \cdot 90^\circ$$

$$\ell = \frac{O_{k_1} \cdot 90^\circ}{360^\circ}$$

$$\ell = \frac{2 \cdot OA \pi}{4}$$

$$\ell = \frac{\pi}{2}$$

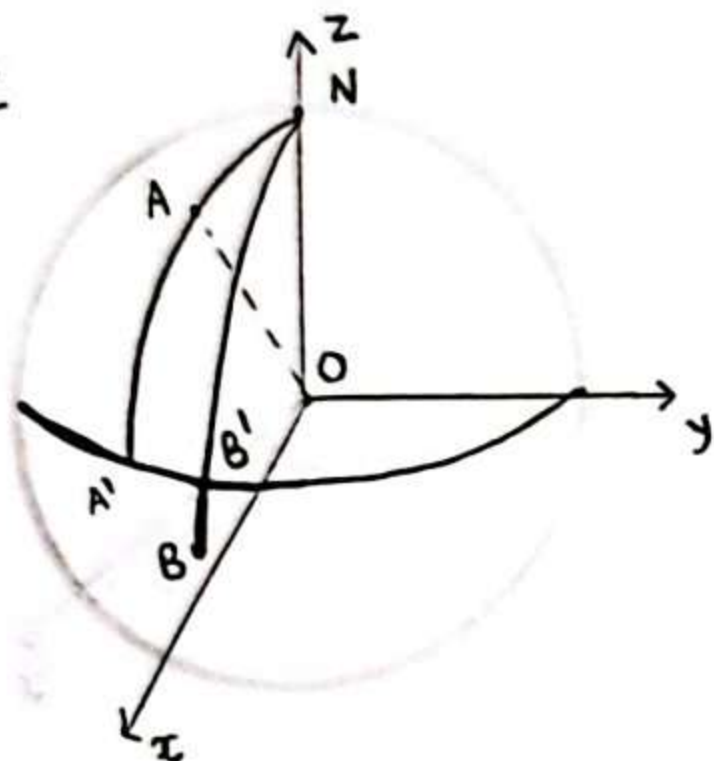
Упоредимо растојања $\widehat{AB} = \frac{2\sqrt{6}\pi}{9}$ и $\ell = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{2\sqrt{6}\pi}{9} \stackrel{1 \cdot 18 > 0}{>} \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2\sqrt{6}\pi \stackrel{1 \cdot \pi > 0}{>} 9\pi \Leftrightarrow \underbrace{4\sqrt{6}}_{>0} \stackrel{>0}{>} \underbrace{9}_{>0} \Leftrightarrow (4\sqrt{6})^2 \stackrel{>0}{>} 9^2 \Leftrightarrow 16 \cdot 6 \stackrel{>0}{>} 81 \Leftrightarrow 96 \stackrel{>0}{>} 81$$

Дакле, растојање између тачака A и B мерено по кругу k је веће од растојања између тачака A и B по великом кругу (што се и очекивало јер је растојање између тачака A и B по великом кругу најкраће).

8.2. На јединичној сфери одредити растојање између тачака $A(60^\circ N, 105^\circ W)$ и $B(30^\circ S, 45^\circ W)$.

Решење:



$A(60^\circ N, 105^\circ W) \Rightarrow \theta_A = 60^\circ$ и то је географска ширина тачке A
 $\varphi_A = -105^\circ$ и то је географска дужина тачке A

N - северни пол посматране јединичне сфере S

A' - тачка пресека екватора и меридијана који садржи тачке N и A

$$\widehat{NA} = \widehat{NA'} - \widehat{A'A} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{3-2}{6} \pi = \frac{\pi}{6}$$

$B(30^\circ S, 45^\circ W) \Rightarrow \theta_B = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}$ је географска ширина тачке B

$\varphi_B = -45^\circ = -\frac{\pi}{4}$ је географска дужина тачке B

B' - тачка пресека екватора и меридијана који садржи тачке N и B

$$\widehat{NB} = \widehat{NB'} + \widehat{B'B} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3+1}{6} \pi = \frac{4}{6} \pi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\angle ANB = \angle A'OB' = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

Из косинусне теореме имамо да је

$$\cos \widehat{AB} = \cos \widehat{NA} \cos \widehat{NB} + \sin \widehat{NA} \sin \widehat{NB} \cos \angle ANB$$

$$\cos \widehat{AB} = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \widehat{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos \widehat{AB} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

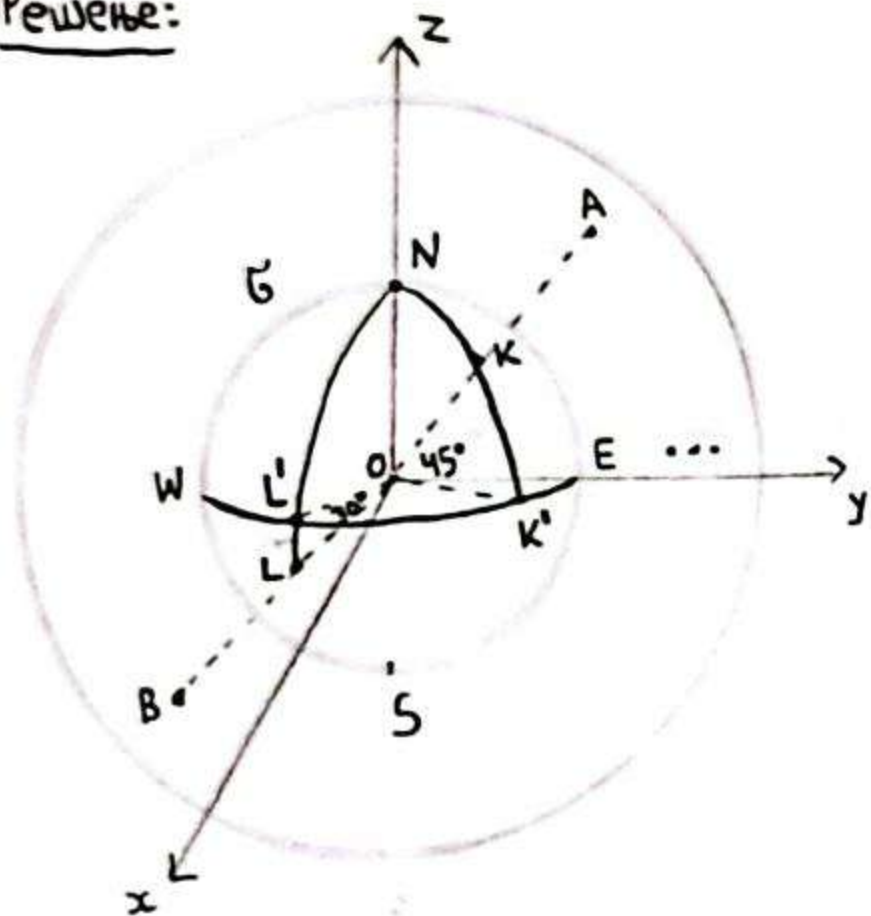
$$\cos \widehat{AB} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{8}$$

$$\cos \widehat{AB} = -\frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \widehat{AB} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Растојање између тачака $A(60^\circ N, 105^\circ W)$ и $B(30^\circ S, 45^\circ W)$ је $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

8.3. Одредити (приближно) растојање између тачака на планети Земљи између градова $A(45^\circ N, 20^\circ E)$ и $B(30^\circ S, 25^\circ W)$.
Узети да је Земља сфера полупречника $r = 6370 \text{ km}$.

Решење:



Уочимо хомотетију $\mathcal{H}_{O, \frac{1}{r}}$ са центром у координатном почетку O и коефицијентом $\frac{1}{r} = \frac{1}{6370}$. При тој хомотетији се центар O пресликава у себе, сфера планете Земље у јединичну сферу $\mathcal{B}$ са центром O , а тачке $A(45^\circ N, 20^\circ E)$ и $B(30^\circ S, 25^\circ W)$ се сликају у тачке $K(45^\circ N, 20^\circ E)$ и $L(30^\circ S, 25^\circ W)$, редом, на јединичној сфери $\mathcal{B}$. Како хомотетија $\mathcal{H}_{O, \frac{1}{r}}$ дужине мења сразмерно коефицијенту хомотетије, то је $\widehat{KL} = \frac{1}{r} \cdot \widehat{AB}$.

Означимо са $N(0,0,1)$ северни пол јединичне сфере $\mathcal{B}$ и израчунајмо дужину краћег лука $\widehat{KL}$ великог круга јединичне сфере $\mathcal{B}$, односно растојање између тачака K и L по сфери $\mathcal{B}$.

Нека је K' пресечна тачка екватора сфере $\mathcal{B}$ и великог полукруга сфере $\mathcal{B}$ који садржи тачке N и K . Тада је $\angle K'OK = \theta_K = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ и $\angle K'ON = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, те је $\widehat{KK'} = 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, односно $\widehat{NK} = \widehat{NK'} - \widehat{KK'} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

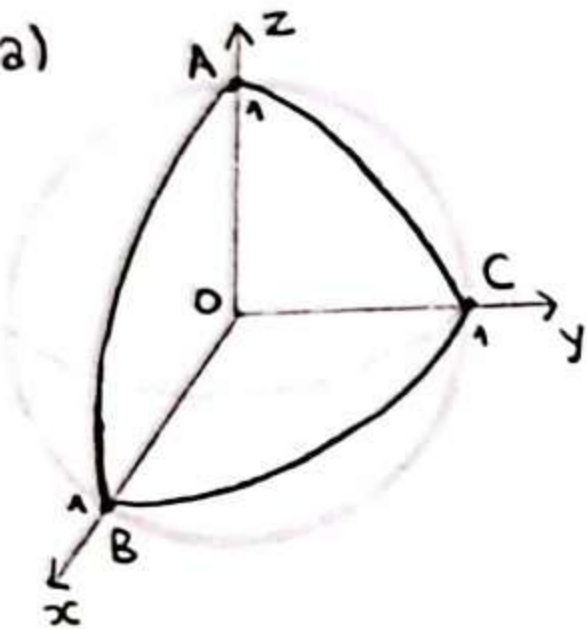
Нека је L' пресечна тачка екватора сфере $\mathcal{B}$ и великог полукруга сфере $\mathcal{B}$ који садржи тачке N и L . Тада је $\angle LOL' = |\theta_L| = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ и $\angle L'ON = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, те је $\widehat{L'L} = 1 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, односно $\widehat{NL} = \widehat{NL'} + \widehat{L'L} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

Тангенте на $\widehat{NL}$ и $\widehat{NK}$ у тачки N су паралелне са OL' и OK' , те је $\angle LNK = \angle L'OK' = \angle L'Ox + \angle xOK' = |\varphi_L| + \varphi_K = |-25^\circ| + 20^\circ = 25^\circ + 20^\circ = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$.

На основу косинусне теореме је $\cos \widehat{KL} = \cos \widehat{NK} \cos \widehat{NL} + \sin \widehat{NK} \sin \widehat{NL} \cos \angle LNK = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \in (0,1)$, те је $\widehat{KL} = \arccos(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4})$. Тражено (приближно) растојање између тачака на планети Земљи између градова $A(45^\circ N, 20^\circ E)$ и $B(30^\circ S, 25^\circ W)$ је $\widehat{AB} = r \cdot \widehat{KL} = 6370 \cdot \arccos(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}) \text{ km}$.

8.4. а) На јединичној сфери одредити неки сферни троугао (тј. координате темена) који има три права угла. Колики му је обим, а колика површина?

Решење: а)



Одређујемо сферни троугао ABC на јединичној сфери S такв да је $\angle \widehat{BAC} = \angle \widehat{ABC} = \angle \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$. Означимо $\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BC} = \alpha$ што је оправдано због чињенице да се наспрам једнаких углова сферног троугла налазе једнаке странице.

На основу дуалне косинусне теореме је

$$-\cos \angle \widehat{BAC} = \cos \angle \widehat{ABC} \cos \angle \widehat{ACB} - \sin \angle \widehat{ABC} \sin \angle \widehat{ACB} \cos \widehat{BC}$$

$$-\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha$$

$$-0 = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = 0 \\ \alpha \in (0, \pi) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Дакле, све странице траженог сферног троугла су једнаке $\frac{\pi}{2}$. Без умањења општости, нека је једно од темена траженог троугла северни пол, нпр. A . Друга два темена B и C су на екватору јер је растојање било које тачке са екватора од северног пола A једнако $1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, а за тачке ван екватора то растојање није $\frac{\pi}{2}$. Узмимо да је тачка B на гриничком меридијану, те је $\varphi_B = 0^\circ$, $\theta_B = 0^\circ$, а тачка C на меридијану $\varphi = 90^\circ$, те је $\varphi_C = 90^\circ$, $\theta_C = 0^\circ$. Дакле, сферне координате једног троугла који задовољава услове задатка су: $A(\frac{\pi}{2}, \text{није дефинисана})$, $B(0, 0)$ и $C(0, \frac{\pi}{2})$.

Декартове координате тих тачака су: $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$ и $C(0, 1, 0)$.

$$x_B = \cos \theta_B \cos \varphi_B = \cos 0 \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$y_B = \cos \theta_B \sin \varphi_B = \cos 0 \sin 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$z_B = \sin \theta_B = \sin 0 = 0$$

$$x_C = \cos \theta_C \cos \varphi_C = \cos 0 \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$y_C = \cos \theta_C \sin \varphi_C = \cos 0 \sin \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$z_C = \sin \theta_C = \sin 0 = 0$$

Обим тог троугла је $O = \alpha + \alpha + \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$, а површина му је $P = \alpha + \alpha + \alpha - \pi = 3\alpha - \pi = 3 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{3\pi - 2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

8.4. 8) Одредити фамилију троуглова чији збир углова тежи ка 3π .

Решење: 8) Посматрајмо фамилију једнакостраничних сферних троуглова чији унутрашњи угао $\alpha > \frac{\pi}{3}$ тежи ка π .

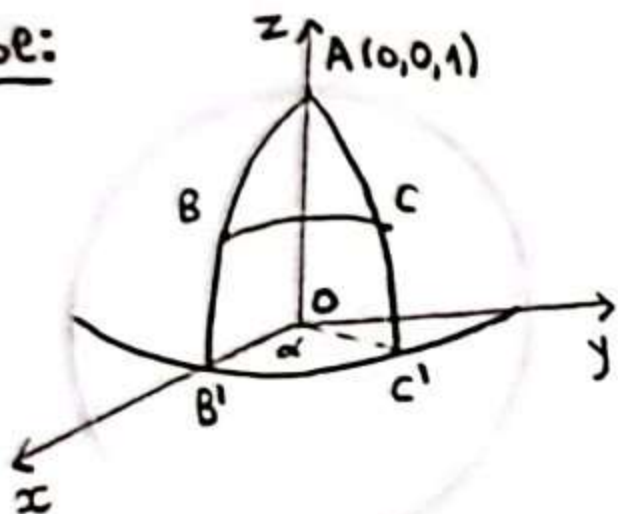
У задатку 8.5 је пронађен једнакостранични сферни троугао ABC са унутрашњим угловима $\alpha > \frac{\pi}{3}$ и сферне координате његових темена $A(\frac{\pi}{2}, \text{није дефинисана})$, $B(\arcsin(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}), 0)$ и $C(\arcsin(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}), \alpha)$.

Једна пресројива фамилија троуглова чији збир углова тежи ка 3π је одређена троугловима $A_n(\frac{\pi}{2}, \text{није дефинисана})$, $B_n(\arcsin(\frac{\cos(\pi - \frac{1}{n})}{1 - \cos(\pi - \frac{1}{n})}), 0)$ и $C_n(\arcsin(\frac{\cos(\pi - \frac{1}{n})}{1 - \cos(\pi - \frac{1}{n})}), \pi - \frac{1}{n})$, $n \rightarrow +\infty$

Збир унутрашњих углова једнакостраничних сферних троуглова $A_n B_n C_n$ је $3 \cdot (\pi - \frac{1}{n})$, те како је $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \cdot (\pi - \frac{1}{n}) = 3\pi$, то фамилија троуглова $A_n B_n C_n$, $n \rightarrow \infty$ представља једну фамилију троуглова чији збир углова тежи ка 3π .

8.5. На јединичној сфери одредити једнакостранични сферни троугао ABC (тј. сферне координате тачака) чији је унутрашњи угао $\alpha > \frac{\pi}{3}$, а теме A је северни пол. Колико му је обим, а колика површина?

Решење:



Циљ нам је да одредимо тачке B и C такве да је $\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BC}$ и $\angle BAC = \alpha > \frac{\pi}{3}$.

Пошто је довољно наћи бар један једнакостранични сферни троугао ABC , то можемо одабрати да меридијан на ком ће бити тачка B буде гринички меридијан, односно да буде $\varphi_B = 0$. Тада се тачка C мора наћи на меридијану $\varphi = \alpha$ или $\varphi = -\alpha$ да би $\angle BAC = |\varphi - 0| = |\varphi|$ био једнак α . (угао између два меридијана једнак је апсолутној вредности разлике њихових географских дужина).

Без умањења општости одaberимо да је $\varphi_C = \alpha$.

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BC} = a$$

На основу косинусне теореме је $\cos \widehat{BC} = \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC} + \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \cos \angle BAC$.

$$\cos a = \cos a \cos a + \sin a \sin a \cos \alpha$$

$$\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a \cos \alpha$$

$$\cos a = \cos^2 a + (1 - \cos^2 a) \cos \alpha$$

$$\cos a = \cos^2 a + \cos \alpha - \cos^2 a \cos \alpha$$

$$\cos \alpha \cdot \cos^2 a - \cos^2 a + \cos a - \cos \alpha = 0$$

$$(\cos \alpha - 1) \cos^2 a + \cos a - \cos \alpha = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$(1 - \cos \alpha) \cos^2 a - \cos a + \cos \alpha = 0$$

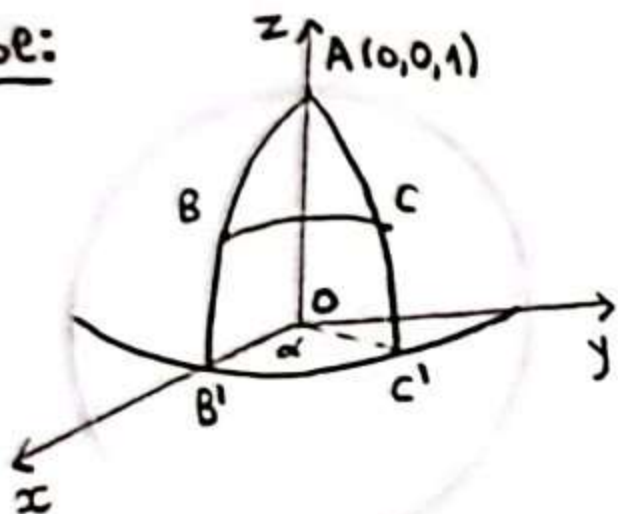
$$\cos a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1 - \cos \alpha) \cdot \cos \alpha}}{2(1 - \cos \alpha)}$$

$$\cos a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha}}{2(1 - \cos \alpha)}$$

$$\cos a = \frac{1 \pm \sqrt{(1 - 2 \cos \alpha)^2}}{2(1 - \cos \alpha)}$$

8.5. На јединичној сфери одредити једнакостранични сферни троугао ABC (тј. сферне координате тачака) чији је унутрашњи угао $\alpha > \frac{\pi}{3}$, а теме A је северни пол. Колико му је обим, а колика површина?

Решење:



Циљ нам је да одредимо тачке B и C такве да је $\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BC}$ и $\angle BAC = \alpha > \frac{\pi}{3}$.

Пошто је довољно наћи бар један једнакостранични сферни троугао ABC , то можемо одабрати да меридијан на ком ће бити тачка B буде гринички меридијан, односно да буде $\varphi_B = 0$. Тада се тачка C мора наћи на меридијану $\varphi = \alpha$ или $\varphi = -\alpha$ да би $\angle BAC = |\varphi - 0| = |\varphi|$ био једнак α . (угао између два меридијана једнак је апсолутној вредности разлике њихових географских дужина).

Без умањења општости одaberимо да је $\varphi_C = \alpha$.

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BC} = a$$

На основу косинусне теореме је $\cos \widehat{BC} = \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC} + \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \cos \angle BAC$.

$$\cos a = \cos a \cos a + \sin a \sin a \cos \alpha$$

$$\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a \cos \alpha$$

$$\cos a = \cos^2 a + (1 - \cos^2 a) \cos \alpha$$

$$\cos a = \cos^2 a + \cos \alpha - \cos^2 a \cos \alpha$$

$$\cos \alpha \cdot \cos^2 a - \cos^2 a + \cos a - \cos \alpha = 0$$

$$(\cos \alpha - 1) \cos^2 a + \cos a - \cos \alpha = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$(1 - \cos \alpha) \cos^2 a - \cos a + \cos \alpha = 0$$

$$\cos a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1 - \cos \alpha) \cdot \cos \alpha}}{2(1 - \cos \alpha)}$$

$$\cos a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha}}{2(1 - \cos \alpha)}$$

$$\cos a = \frac{1 \pm \sqrt{(1 - 2 \cos \alpha)^2}}{2(1 - \cos \alpha)}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 \pm (1-2\cos d)}{2(1-\cos d)}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \cos \alpha &= \frac{1 - (1-2\cos d)}{2(1-\cos d)} \\ \cos \alpha &= \frac{1-1+2\cos d}{2(1-\cos d)} \\ \cos \alpha &= \frac{\cos d}{1-\cos d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1 + 1-2\cos d}{2(1-\cos d)} \\ \cos \alpha &= \frac{2-2\cos d}{2-2\cos d} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = 1$$

$0 < \alpha < \pi$ као страница сферног троугла



Да би постојало $\alpha \in (0, \pi)$

такво да је $\cos \alpha = \frac{\cos d}{1-\cos d}$

мора бити $-1 < \frac{\cos d}{1-\cos d} < 1$.

$$-1 < \frac{\cos d}{1-\cos d}$$

$$0 < \frac{\cos d}{1-\cos d} + 1$$

$$0 < \frac{\cos d + 1 - \cos d}{1-\cos d}$$

$$0 < \frac{1}{1-\cos d}$$

што је тачно јер
за угао d сферног
троугла важи
 $\frac{\pi}{3} < d < \pi$

$$\frac{\cos d}{1-\cos d} < 1$$

$$\frac{\cos d}{1-\cos d} - 1 < 0$$

$$\frac{\cos d - 1 + \cos d}{1-\cos d} < 0$$

$$\frac{2\cos d - 1}{1-\cos d} < 0$$

$$2\cos d - 1 < 0$$

$$2\cos d < 1 \quad | :2 > 0$$

$$\cos d < \frac{1}{2}$$

што је
тачно за
 $\frac{\pi}{3} < d < \pi$

$| \cdot (1-\cos d) > 0$
јер је
 $\frac{\pi}{3} < d < \pi$



Дакле, важи $-1 < \frac{\cos d}{1-\cos d} < 1$,

те постоји $\alpha = \arccos\left(\frac{\cos d}{1-\cos d}\right) \in (0, \pi)$.

Нека је B' пресечна тачка екватора и великог полукруга који садржи тачке A и B . Тада је $\theta_B = \widehat{BB'} = \widehat{AB'} - \widehat{AB} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right) = \arcsin\left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)$.

Нека је C' пресечна тачка екватора и великог полукруга који садржи тачке A и C . Тада је $\theta_C = \widehat{CC'} = \widehat{AC'} - \widehat{AC} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right) = \arcsin\left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)$.

Сферне координате темена једнакостраничног сферног троугла ABC су: $A\left(\frac{\pi}{2}, \text{није дефинисана}\right)$, $B\left(\arcsin\left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right), 0\right)$ и $C\left(\arcsin\left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right), \alpha\right)$.

Обим овог троугла је $O = 3 \cdot \alpha = 3 \cdot \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)$, а површина је $P = \alpha + \alpha + \alpha - \pi = 3\alpha - \pi$.

8.6. Сферни троугао ABC на јединичној сфери има два угла једнака $\alpha = \frac{\pi}{3} = \beta$ и површину $P = \frac{\pi}{6}$.
Израчунати ивице тог троугла.

Решење: $P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \gamma - \pi$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} - \pi + \gamma$$

$$\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + \gamma$$

$$\gamma = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}$$

$$\gamma = \frac{3\pi}{6}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

На основу дуалне косинусне теореме је:

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha$$

$$-\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \cos \alpha$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \quad / \cdot (-2)$$

$$\sqrt{3} \cos \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \in (0, \pi)$$

Како је $\alpha = \frac{\pi}{3} = \beta$ и наспрам једнаких углова у сферном троуглу су једнаке странице, то је
 $a = b = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

На основу Дуалне косинусне теореме је:

$$-\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$-\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \cos \gamma$$

$$-0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \gamma$$

$$\frac{3}{4} \cos \gamma = \frac{1}{4} \quad / \cdot \frac{4}{3} \neq 0$$

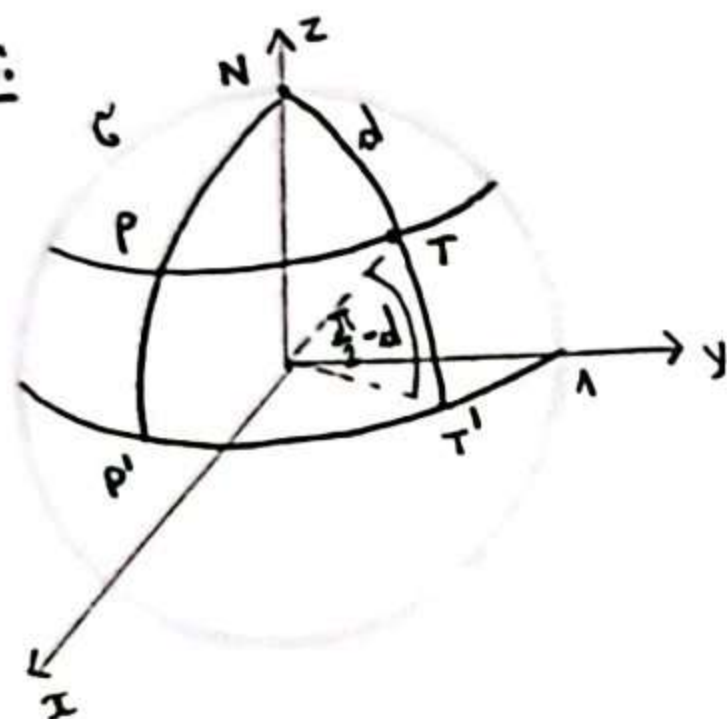
$$\cos \gamma = \frac{1}{3}$$

$$\gamma = \arccos \frac{1}{3} \in (0, \pi)$$

Ивице тог троугла су $a = b = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \alpha$ и $\gamma = \arccos \frac{1}{3}$.

8.7. Описати прецизно геометријско место тачака које су за $d > 0$ удаљене од северног пола јединичне сфере. Које су могуће вредности константе d ?

Решење:



1^o случај $d \in (0, \frac{\pi}{2})$

Нека је T произвољна тачка посматраног геометријског места тачака које су за $d > 0$ удаљене од северног пола N јединичне сфере S .

T' - пресечна тачка екватора и меридијана који садржи тачке N и T

Како је $d \in (0, \frac{\pi}{2})$, то важи $\widehat{TT'} = \widehat{NT'} - \widehat{NT} = \frac{\pi}{2} - d$.

јер је тачка T од тачке N удаљена за d

Дакле, тачка T припада паралели $\theta = \frac{\pi}{2} - d$, те је тражено геометријско место тачака подскуп паралеле $\theta = \frac{\pi}{2} - d$.

Докажимо да важи и обрнуто, да за сваку тачку P са паралеле $\theta = \frac{\pi}{2} - d$ важи да је од северног пола N удаљена за d .

P' - пресечна тачка екватора и меридијана који садржи тачке N и P .

$$\widehat{NP} = \widehat{NP'} - \widehat{PP'} = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - d) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + d = d$$

Дакле, P је од N удаљена за d , те је скуп тачака са паралеле $\theta = \frac{\pi}{2} - d$ подскуп траженог геометријског места тачака.

Дакле, тражено геометријско место тачака је паралела $\theta = \frac{\pi}{2} - d$.

Слично се раде случајеви 2° $d = \frac{\pi}{2}$ када се добија да је тражено геометријско место тачака екватор (географска ширина је $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$) и 3° $d \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ када се добија да је тражено геометријско место тачака паралела $\theta = \frac{\pi}{2} - d$ ($\theta < 0$ те је та паралела на јужној хемисфери), а у случају 4° $d = \pi$ је тражено геометријско место тачака само јужни пол S . Могуће вредности за константу d су $(0, \pi]$ јер растојање између северног пола N и произвољне тачке са сфере G представља дужину краћег лука великог круга који садржи те две тачке, те d мора бити мање или једнако од половине обима великог круга јединичне сфере, тј. $d \leq \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$, те $d \in (0, \pi]$.