

Површи

Дефиниција Површ другог реда је скуп тачака (x, y, z) у простору $Oxyz$ таквих да је $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$, за неке $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} \in \mathbb{R}$, при чему је бар један од бројева $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ различит од нуле.

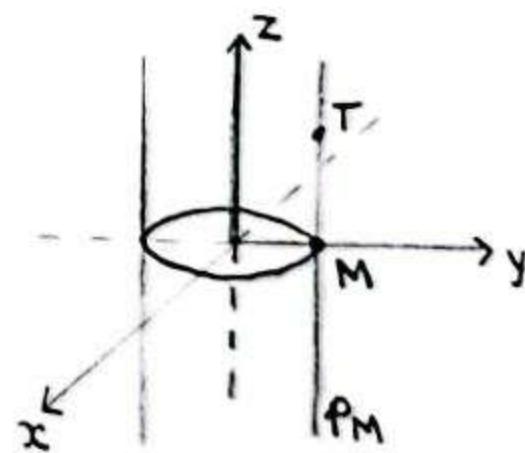
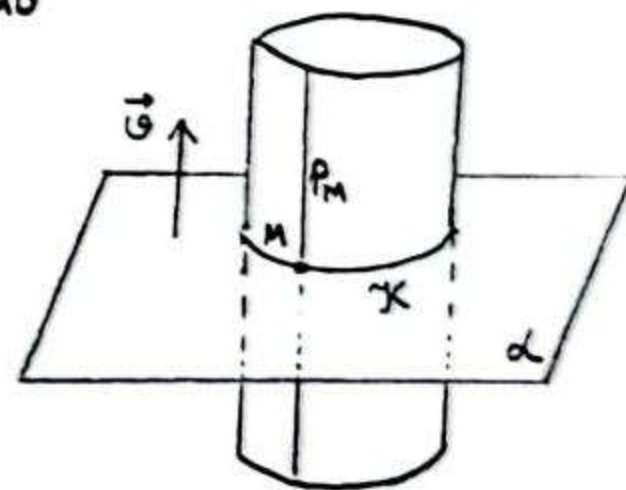
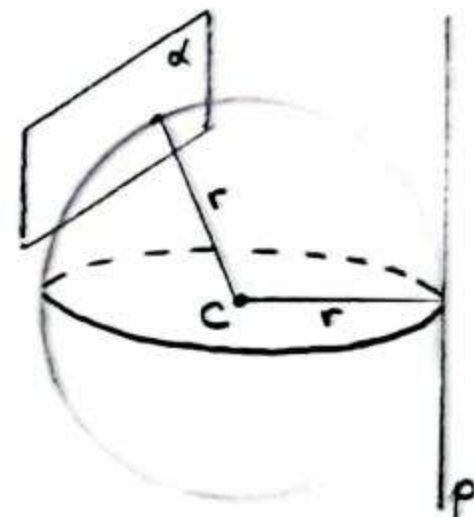
Са предавања је позната теорија о класификацији површи другог реда, у наставку издвајамо неке површи које се јављају у задацима за вежбе.

Дефиниција Сфера с центром $C(x_c, y_c, z_c)$ и полупречником $r > 0$ јесте површ другог реда $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$.

Права p (односно раван α) јесте тангентна на сфери уколико је растојање центра сфере од те праве (односно равни) једнако полупречнику те сфере.

Дефиниција Нека је α произвољна раван, $\mathcal{K}$ недегенерисана крива другог реда која припада равни α и $\vec{v} \neq \vec{0}$ произвољни вектор ван α . За произвољну тачку $M \in \mathcal{K}$ означићемо са p_M праву која садржи тачку M и има вектор правца $\vec{v}$. Цилиндар је површ другог реда дефинисана као $\bigcup_{M \in \mathcal{K}} p_M$, тј. као унија свих правих p_M када M прође свим тачкама криве $\mathcal{K}$. Крива $\mathcal{K}$ зове се генератриса цилиндра, а вектор $\vec{v}$ се зове директриса тог цилиндра. Свака права p_M зове се изводница цилиндра.

Пример Ако је генератриса $\mathcal{K}$ елипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ и ако је директриса вектор $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, онда је цилиндар унија правих које садрже тачке те елипсе и имају вектор правца $\vec{e}_3$, тј. паралелне су z -оси. Приметимо да за сваку тачку тог цилиндра важи $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Да би $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ била једначина посматраног цилиндра довољно је још доказати да за произвољну тачку $T(x_T, y_T, z_T)$ која задовољава једначину $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ важи да она припада посматраном цилиндру.



Како тачка $T(x_T, y_T, z_T)$ задовољава једначину $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то је $\frac{x_T^2}{a^2} + \frac{y_T^2}{b^2} = 1$. Приметимо да тачка $M(x_T, y_T, 0)$ припада елипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0$, а права која садржи тачку M и има вектор правца $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ је права $P_M: \frac{x-x_T}{0} = \frac{y-y_T}{0} = \frac{z-0}{1} = t$, а њене параметарске једначине су $x=0 \cdot t + x_T = x_T, y=0 \cdot t + y_T = y_T, z=1 \cdot t + 0 = t$.

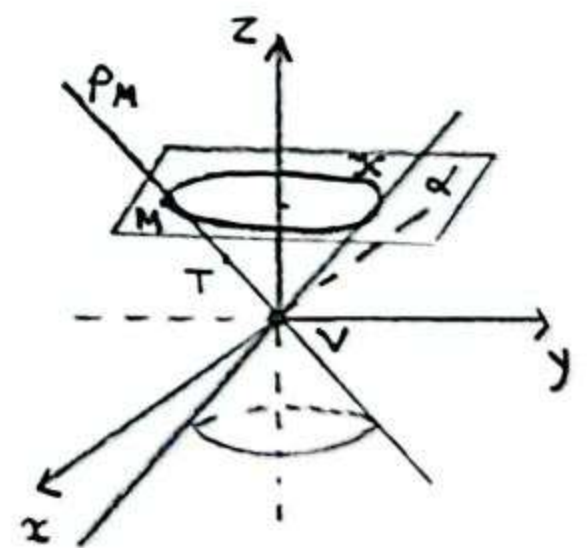
Тачка T припада тој правој јер за $t=z_T$ добијамо $x=x_T, y=y_T, z=z_T$, односно тачка T припада посматраном цилиндру јер припада његовој изводници P_M .

Цилиндар коме је генератриса елипса зове се елиптички цилиндар, онај коме је генератриса парабола параболски цилиндар, а цилиндар коме је генератриса хипербола зове се хиперболички цилиндар.

Цилиндар коме је генератриса круг и коме је директриса вектор који је нормалан на равни круга зове се кружни цилиндар.

Дефиниција Нека је α произвољна равна, $\mathcal{K}$ недегенерисана крива другог реда која припада равни α и $V \notin \alpha$ произвољна тачка која не припада равни α . За произвољну тачку $M \in \mathcal{K}$ с криве $\mathcal{K}$ обележимо са P_M праву која садржи тачке M и V . Конус је површ другог реда дефинисана као $\bigcup_{M \in \mathcal{K}} P_M$ тј. као унија свих правих P_M када M прође свим тачкама криве $\mathcal{K}$. Крива $\mathcal{K}$ се зове генератриса конуса, а тачка V зове се врх тог конуса. Свака права P_M зове се изводница конуса.

Пример Ако је генератриса $\mathcal{K}$ елипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=1$ и ако је $V(0,0,0)$ тачка која не припада равни $z=1$ којој припада елипса $\mathcal{K}$, онда је конус унија правих таквих да је свака права одређена неком тачком те елипсе и тачком V . Како за произвољну тачку $T(x_T, y_T, z_T)$ са конуса важи $T \in \bigcup_{M \in \mathcal{K}} P_M$, то постоји тачка $M(x_M, y_M, 1)$ са елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=1$ таква да $T \in VM$. За координате тачке M важи $\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1, z_M=1$, а једначина праве VM је $\frac{x-0}{x_M-0} = \frac{y-0}{y_M-0} = \frac{z-0}{1-0}$ тј. $\frac{x}{x_M} = \frac{y}{y_M} = \frac{z}{1}$ јер права VM садржи тачку $V(0,0,0)$



а један вектор правца јој је $\vec{VM} = [M] - [V]$. Како $T \in VM$, то постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да је $\frac{x_T}{x_M} = \frac{y_T}{y_M} = \frac{z_T}{1} = t$ односно $x_T = tx_M$, $y_T = ty_M$, $z_T = t$. Приметимо да тачка T задовољава једначину $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$ јер је $\frac{x_T^2}{a^2} + \frac{y_T^2}{b^2} - z_T^2 = \frac{(tx_M)^2}{a^2} + \frac{(ty_M)^2}{b^2} - t^2 = \frac{t^2 x_M^2}{a^2} + \frac{t^2 y_M^2}{b^2} - t^2 = t^2 \cdot \left(\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} \right) - t^2 = t^2 \cdot 1 - t^2 = 0$.

$$\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$$

Да би једначина конуса била $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$ довољно је још доказати да произвољна тачка $X(x_x, y_x, z_x)$ чије координате задовољавају једначину $\frac{x_x^2}{a^2} + \frac{y_x^2}{b^2} - z_x^2 = 0$ припада посматраном конусу.

Ако је $z_x = 0$, онда је $\frac{x_x^2}{a^2} + \frac{y_x^2}{b^2} - 0^2 = 0$, тј. $\frac{x_x^2}{a^2} + \frac{y_x^2}{b^2} = 0$, односно мора бити $x_x = y_x = 0$, те је тачка $X(0, 0, 0)$

заправо врх конуса $V(0, 0, 0)$, а он припада конусу. У наставку сматрамо да је $z_x \neq 0$. Тада се тачке X и V разликују, те је права p која садржи тачке V и X јединствено одређена. Њена једначина је $p: \frac{x-0}{x_x-0} = \frac{y-0}{y_x-0} = \frac{z-0}{z_x-0}$ тј. $p: \frac{x}{x_x} = \frac{y}{y_x} = \frac{z}{z_x}$. Нађимо тачку M у пресеку праве p и равни $z=1$. Ако је

$M(x_M, y_M, z_M)$, онда је $z_M = 1$ и $\frac{x_M}{x_x} = \frac{y_M}{y_x} = \frac{1}{z_x}$ јер $M \in p$, те је $x_M = \frac{x_x}{z_x}$ и $y_M = \frac{y_x}{z_x}$. Приметимо да тачка M припада и елипси $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z=1$ јер је $z_M = 1$ и $\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{x_x}{z_x} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \cdot \left(\frac{y_x}{z_x} \right)^2 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x_x^2}{z_x^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{y_x^2}{z_x^2} = \frac{1}{z_x^2} \cdot \left(\frac{x_x^2}{a^2} + \frac{y_x^2}{b^2} \right) = \frac{1}{z_x^2} \cdot z_x^2 = 1$. Дакле, права p садржи тачке V и M , те је у питању изводница конуса,

$$\text{важи } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$$

а како p садржи тачку X , то X припада посматраном конусу.

За разлику од цилиндара, постоји само једна врста конуса и то је елиптички конус.

Посебно треба обратити пажњу на конус коме је генератриса круг, а врх је тачка чије је подножје нормале на равни круга управо центар круга. Такав конус се зове кружни конус, а права која спаја врх конуса и центар круга зове се оса тог конуса. Битна особина кружног конуса је да свака његова изводница гради исти

угао са његовом осом. Заиста, уочимо на кругу који је генератриса кружног конуса две произвољне различите тачке M и N , центар O тог круга и врх конуса V . Угао између изводнице $\rho_M = MV$ и осе VO јесте $\angle MVO$, а угао између изводнице $\rho_N = NV$ и осе VO је угао $\angle NVO$. Како је оса VO нормална на равни круга (то је услов да би конус био кружни), то је $\angle VOM = \angle VON = 90^\circ$.

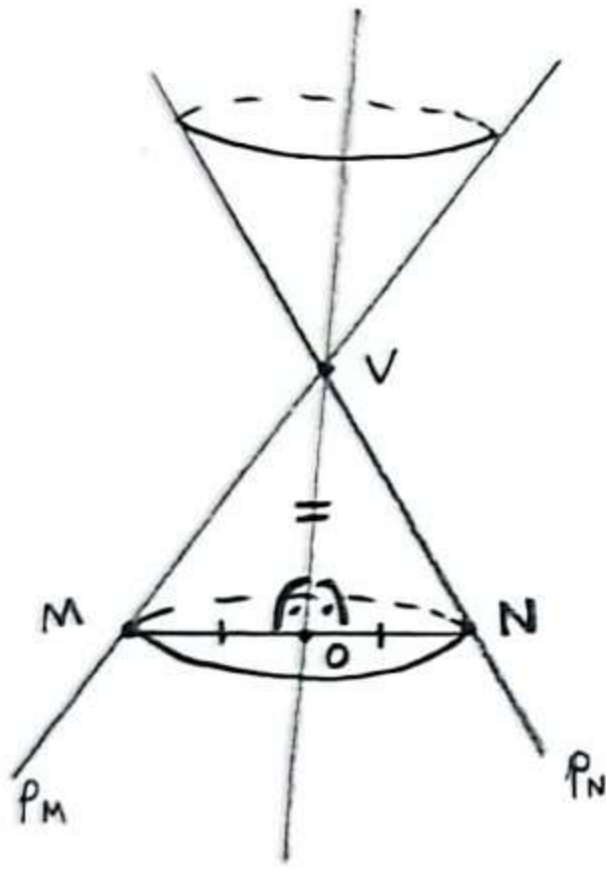
$OM = ON$ као полупречници круга
 $VO = VO$

$$\left. \begin{array}{l} \text{сус} \\ \Rightarrow \end{array} \right\} \Delta VOM \cong \Delta VON$$

$$\Downarrow \\ \angle MVO = \angle NVO$$

$$\Downarrow \\ \angle(\rho_M, VO) = \angle(\rho_N, VO)$$

тј. изводнице ρ_M и ρ_N
 заклапају исти угао са
 осом VO , што смо и
 желели да докажемо.



7 Површи

7.1. Круг k који настаје ротацијом тачке $A(1,2,3)$ око праве $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$ написати као: а) пресек равни и сфере којој центар припада равни б) пресек равни и кружног цилиндра в) пресек две сфере полупречника 2.

Решење: а) Приметимо прво да када тачка $A(1,2,3)$ ротира око праве p слике те тачке припадају кругу који се налази у равни α која садржи тачку A и нормална је на правој p .

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\alpha \perp p \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{u}_p = (1, 1, 1) \Rightarrow (A, B, C) = (1, 1, 1)$$

$$\text{јер је } p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$A(1,2,3) \in \alpha: x + y + z + D = 0$$

$$1 + 2 + 3 + D = 0$$

$$6 + D = 0$$

$$D = -6$$

$\Rightarrow$ Тражена раван α је дата једначином $\alpha: x + y + z - 6 = 0$.

Одредимо сада сферу $G(C, r)$ којој припада круг k . Нека је $C(x_c, y_c, z_c)$.

$$\{C\} = p \cap \alpha \Rightarrow C \in p \Rightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) \frac{x_c-1}{1} = \frac{y_c-2}{1} = \frac{z_c-1}{1} = t \Rightarrow x_c = t+1, y_c = t+2, z_c = t+1$$

$$C \in \alpha \Rightarrow x_c + y_c + z_c - 6 = 0$$

$$t+1 + t+2 + t+1 - 6 = 0$$

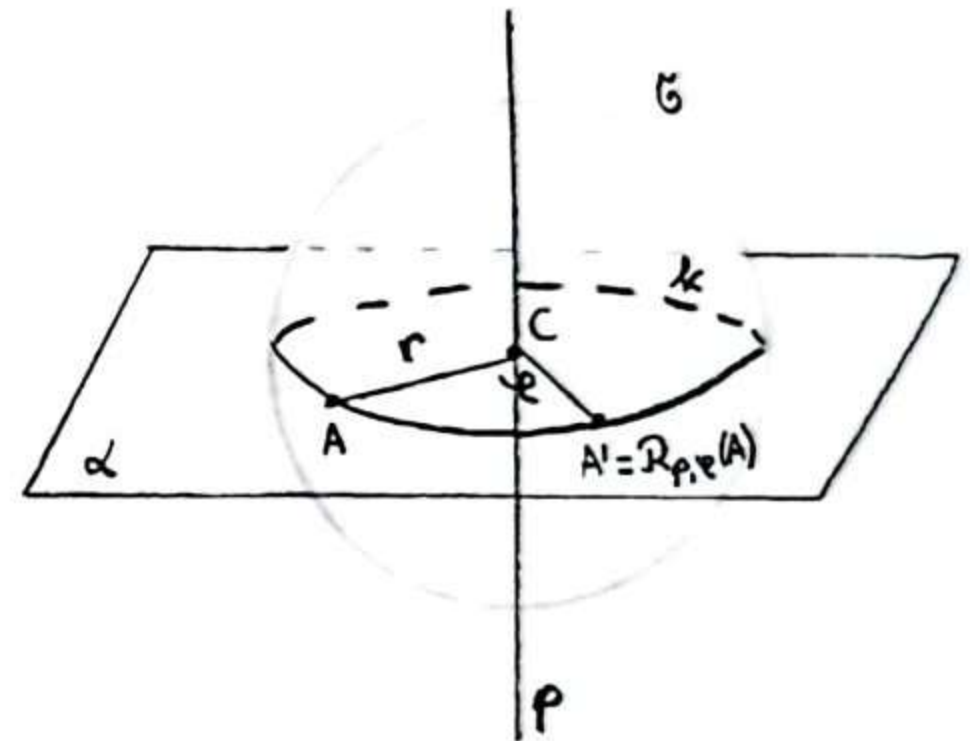
$$3t - 2 = 0$$

$$3t = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow x_c = t+1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$y_c = t+2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{3} + \frac{6}{3} = \frac{8}{3}$$

$$z_c = t+1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow$ Центар сфере G је $C(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3})$.



Полупречник сфере G је $r = \|\vec{AC}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{\sqrt{4 \cdot 6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow r^2 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

$$\vec{AC} = [C] - [A] = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) - (1, 2, 3) = \left(\frac{5}{3} - 1, \frac{8}{3} - 2, \frac{5}{3} - 3\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

Једначина тражене сфере G је $G: \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$.

$$k = \alpha \cap G$$

$$k: x + y + z - 6 = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$$

б) Раван α налазимо као у делу а).

$$\alpha \perp p \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{u}_p = (1, 1, 1)$$

$$\text{јер је } p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$\Rightarrow \alpha: x + y + z + b = 0$$

$$A(1, 2, 3) \in \alpha \Rightarrow 1 + 2 + 3 + b = 0$$

$$b + 6 = 0$$

$$b = -6$$

$\Rightarrow$ тражена раван α је $\alpha: x + y + z - 6 = 0$.

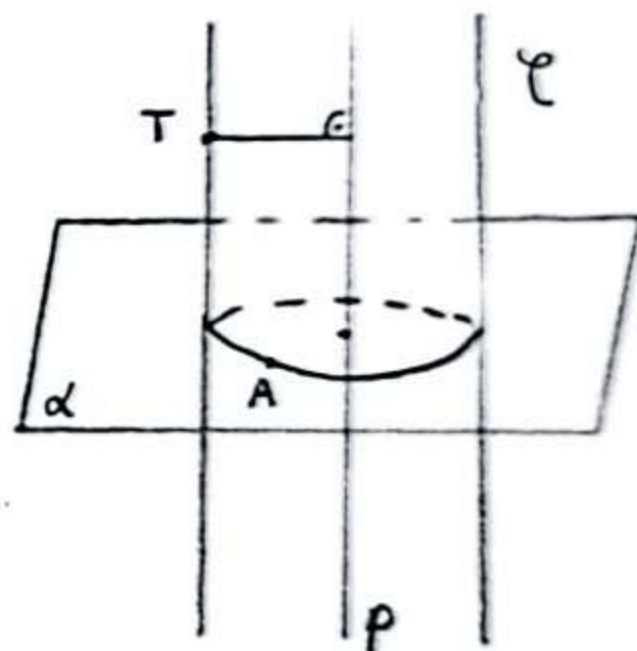
Свака тачка кружног цилиндра ζ је на истом растојању од праве p , осе симетрије, а то растојање је једнако растојању тачке A од праве p .

Нека је $T(x, y, z)$ произвољна тачка кружног цилиндра ζ .

$$p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1} \text{ садржи тачку } P(1, 2, 1) \text{ јер је } \frac{1-1}{1} = \frac{2-2}{1} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$d(T, p) = d(A, p)$$

$$d(A, p) = \frac{\|\vec{PA} \times \vec{u}_p\|}{\|\vec{u}_p\|}$$



$$\|\vec{PA} \times \vec{\mu}_p\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \left\| (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \right\| =$$

$$\vec{PA} = [A] - [P] = (1, 2, 3) - (1, 2, 1) = (0, 0, 2)$$

$$= \left\| (-1)^2 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (0 \cdot 1 - 0 \cdot 1) \vec{e}_3 \right\| = \left\| 1 \cdot (-2) \vec{e}_1 - (-2) \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \right\| = \left\| -2 \vec{e}_1 + 2 \vec{e}_2 \right\| =$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

$$d(A, p) = \frac{\|\vec{PA} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$d(\tau, p) = \frac{\|\vec{PT} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|}$$

$$\|\vec{PT} \times \vec{\mu}_p\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \left\| (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} y-2 & z-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} x-1 & z-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \right\| =$$

$$\vec{PT} = [T] - [P] = (x, y, z) - (1, 2, 1) = (x-1, y-2, z-1)$$

$$= \left\| (-1)^2 \cdot (y-2 - (z-1)) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (x-1 - (z-1)) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (x-1 - (y-2)) \vec{e}_3 \right\| = \left\| (y-2-z+1) \vec{e}_1 - (x-1-z+1) \vec{e}_2 + (x-1-y+2) \vec{e}_3 \right\| =$$

$$= \left\| (y-z-1) \vec{e}_1 - (x-z) \vec{e}_2 + (x-y+1) \vec{e}_3 \right\| = \sqrt{(y-z-1)^2 + (-(x-z))^2 + (x-y+1)^2}$$

$$d(\tau, p) = \frac{\|\vec{PT} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|} = \frac{\sqrt{(y-z-1)^2 + (x-z)^2 + (x-y+1)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{(y-z-1)^2 + (x-z)^2 + (x-y+1)^2}}{\sqrt{3}}$$

$$d(\tau, p) = d(A, p)$$

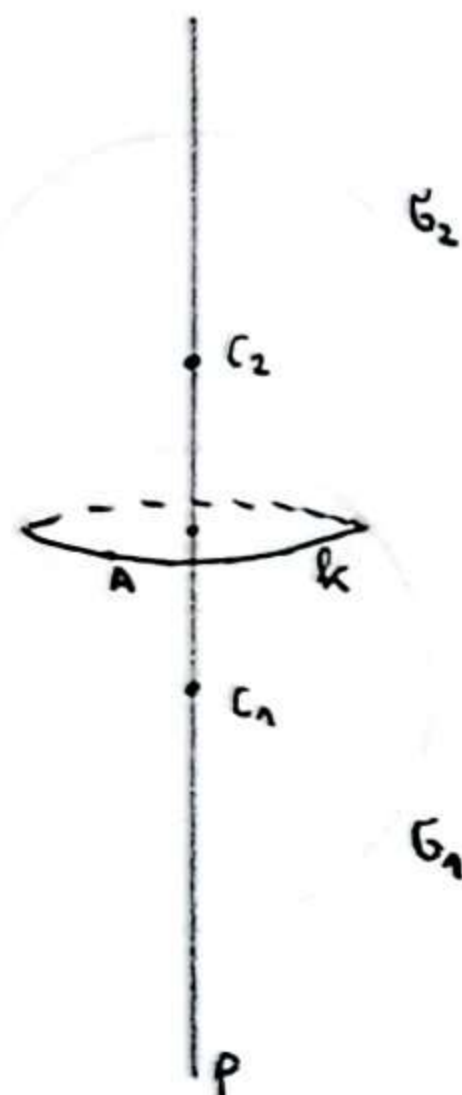
$$\frac{\sqrt{(y-z-1)^2 + (x-z)^2 + (x-y+1)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{(y-z-1)^2 + (x-z)^2 + (x-y+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(y-z-1)^2 + (x-z)^2 + (x-y+1)^2} = 2\sqrt{2} \quad /^2 \Rightarrow \mathcal{C}: (y-z-1)^2 + (x-z)^2 + (x-y+1)^2 = 8$$

је тражена једначина кружног цилиндра

$$\Rightarrow k: \begin{cases} x+y+z-6=0 \\ (y-z-1)^2 + (x-z)^2 + (x-y+1)^2 = 8 \end{cases}$$

B)



Центри C_1 и C_2 тражених сфера $G_1(C_1, 2)$ и $G_2(C_2, 2)$ припадају правој p и од тачке A су удаљени за 2.

$$C_i (x_i, y_i, z_i) \quad i \in \{1, 2\}$$

$$C_i \in p \Rightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) \quad \frac{x_i - 1}{1} = \frac{y_i - 2}{1} = \frac{z_i - 1}{1} = t$$

$$\Rightarrow x_i = t + 1, \quad y_i = t + 2, \quad z_i = t + 1$$

$$d(C_i, A) = 2$$

$$\sqrt{(t+1-1)^2 + (t+2-2)^2 + (t+1-1)^2} = 2$$

$$\sqrt{\underbrace{t^2 + t^2 + (t-2)^2}_{\geq 0}} = 2 \quad |^2$$

$$t^2 + t^2 + (t-2)^2 = 4$$

$$2t^2 + t^2 - 4t + 4 = 4$$

$$3t^2 - 4t = 0$$

$$t(3t - 4) = 0$$

$$\swarrow$$

$$t = 0$$

$$x_1 = 0 + 1 = 1$$

$$y_1 = 0 + 2 = 2$$

$$z_1 = 0 + 1 = 1$$

$$C_1 (1, 2, 1)$$

$$\searrow$$

$$3t - 4 = 0$$

$$3t = 4$$

$$t = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

$$y_2 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

$$z_2 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

$$C_2 \left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$$

Тражене сфере су $G_1: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$ и $G_2: (x-\frac{7}{3})^2 + (y-\frac{10}{3})^2 + (z-\frac{7}{3})^2 = 4$ и $k: (x-\frac{7}{3})^2 + (y-\frac{10}{3})^2 + (z-\frac{7}{3})^2 = 4$

7.2. Одредити једначине равни које садрже праву $\ell: \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$ и додирују сферу $S: x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$. Одредити затим једначине симетралних равни диједара између ове две равни назначивши ону која сече дату сферу.

Решење: α - тражена раван $\alpha: Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$
 $\ell: \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4} \Rightarrow \vec{u}_\ell = (-1, 1, 4)$
 $\ell \subset \alpha \Rightarrow \vec{u}_\ell \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{u}_\ell \cdot \vec{n}_\alpha = 0$
 $(-1, 1, 4) \cdot (A, B, C) = 0$
 $-A + B + 4C = 0$
 $B = A - 4C \Rightarrow \alpha: Ax + (A - 4C)y + Cz + D = 0$
Праву $\ell: \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$ садржи тачку $L(13, -1, 0)$ јер је $\frac{13-13}{-1} = \frac{-1+1}{1} = \frac{0}{4} = 0$
 $L \in \ell, \ell \subset \alpha \Rightarrow L \in \alpha \Rightarrow A \cdot 13 + (A - 4C) \cdot (-1) + C \cdot 0 + D = 0$
 $13A - A + 4C + D = 0$
 $12A + 4C + D = 0$
 $D = -12A - 4C \Rightarrow \alpha: Ax + (A - 4C)y + Cz - 12A - 4C = 0$

Како раван α додирује сферу S , то центар O сфере S од равни α мора бити удаљен за дужину полупречника r те сфере.

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z - 67 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1^2 + (y-2)^2 - 2^2 + (z-3)^2 - 3^2 - 67 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 - 67 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 81 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 81 = 9^2$$

Центар сфере S је тачка $O(1, 2, 3)$, а полупречник сфере S је 9.

$$d(0, \alpha) = r$$

$$\frac{|A \cdot 1 + (A-4C) \cdot 2 + C \cdot 3 - 12A - 4C|}{\sqrt{A^2 + (A-4C)^2 + C^2}} = 9$$

$$|A + 2A - 8C + 3C - 12A - 4C| = 9 \cdot \sqrt{A^2 + (A-4C)^2 + C^2}$$

$$|-9A - 9C| = 9 \sqrt{A^2 + A^2 - 8AC + 16C^2 + C^2}$$

$$9 \cdot |A+C| = 9 \sqrt{2A^2 - 8AC + 17C^2} \quad / : 9 \neq 0$$

$$\underbrace{|A+C|}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{2A^2 - 8AC + 17C^2}}_{\geq 0}$$

$$(A+C)^2 = 2A^2 - 8AC + 17C^2$$

$$A^2 + 2AC + C^2 = 2A^2 - 8AC + 17C^2$$

$$0 = 2A^2 - A^2 - 8AC - 2AC + 17C^2 - C^2$$

$$0 = A^2 - 10AC + 16C^2$$

Ако би $C=0$, онда би $A^2=0$ тј. $A=0$, као и $B=A-4C=0-4 \cdot 0=0-0=0$, а $(A,B,C)=(0,0,0)$ /.

Јер $(A,B,C) \neq (0,0,0)$
као вектор нормале
равни α

Дакле, $C \neq 0$.

$$A^2 - 10AC + 16C^2 = 0 \quad / : C^2 \neq 0$$

$$\frac{A^2}{C^2} - 10 \frac{AC}{C^2} + 16 \frac{C^2}{C^2} = 0$$

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 - 10 \frac{A}{C} + 16 = 0$$

$$\text{Смена } t = \frac{A}{C}$$

$$t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 100 - 64 = 36 = 6^2$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2} = 5 \pm 3$$

$$t_1 = 5 - 3 = 2 \quad t_2 = 5 + 3 = 8$$

$$t_1 = 2$$

$$\frac{A}{C} = 2$$

$$A = 2C$$

$$B = A - 4C = 2C - 4C = -2C$$

$$D = -12A - 4C = -24C - 4C = -28C$$

$$\alpha_1: 2Cx - 2Cy + Cz - 28C = 0 \quad |:C \neq 0$$

$$2x - 2y + z - 28 = 0$$

$$t_2 = 8$$

$$\frac{A}{C} = 8$$

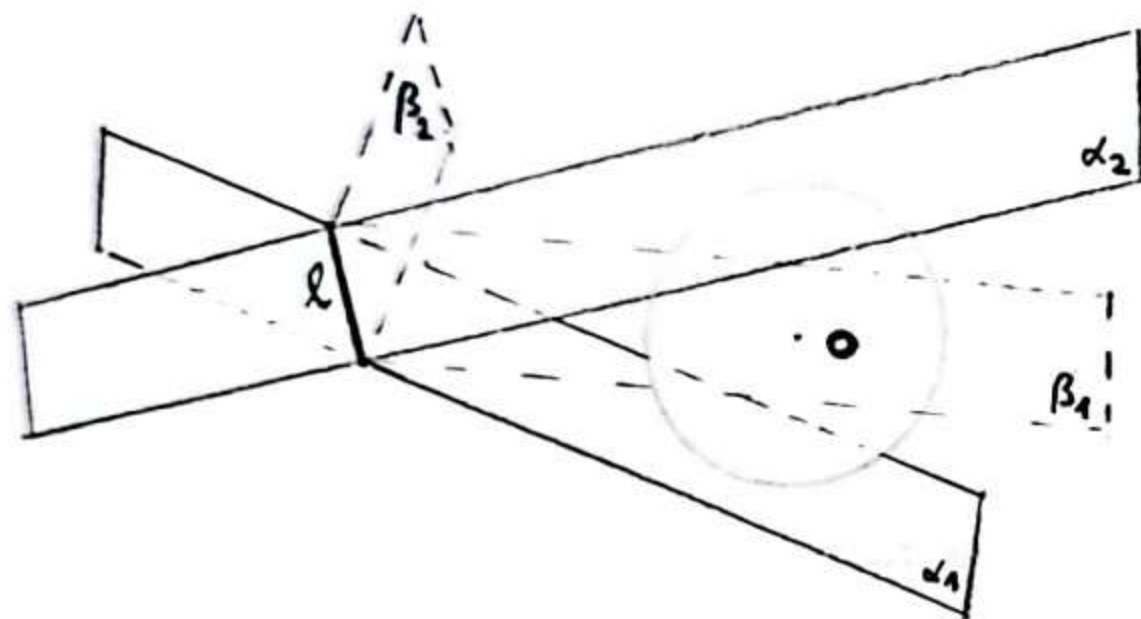
$$A = 8C$$

$$B = A - 4C = 8C - 4C = 4C$$

$$D = -12A - 4C = -12 \cdot 8C - 4C = -96C - 4C = -100C$$

$$\alpha_2: 8Cx + 4Cy + Cz - 100C = 0 \quad |:C \neq 0$$

$$8x + 4y + z - 100 = 0$$



Постоје две равни α_1 и α_2 које садрже праву ℓ и додирују сферу S .

Означимо са β_1 и β_2 симетралне равни диједара између равни α_1 и α_2 , при чему β_1 сече сферу S .

Како је симетрална раван скуп свих тачака простора које су једнако удаљене од равни α_1 и α_2 , то $O \in \beta_1$ јер је $d(O, \alpha_1) = d(O, \alpha_2) = R$.

$$L \in \ell, \ell \subset \beta_1 \Rightarrow L \in \beta_1$$

$$O \in \beta_1, L \in \beta_1 \Rightarrow \vec{LO} \subset \beta_1, \vec{\mu}_\ell \subset \beta_1$$

$$\vec{LO} = [O] - [L] = (1, 2, 3) - (13, -1, 0) = (-12, 3, 3) \quad \text{и} \quad \vec{\mu}_\ell = (-1, 1, 4) \quad \text{су линеарно независни вектори јер}$$

$$a \cdot \vec{LO} + b \cdot \vec{\mu}_\ell = \vec{0} \Rightarrow a \cdot (-12, 3, 3) + b \cdot (-1, 1, 4) = (0, 0, 0) \Rightarrow (-12a, 3a, 3a) + (-b, b, 4b) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (-12a - b, 3a + b, 3a + 4b) = (0, 0, 0) \Rightarrow -12a - b = 0, 3a + b = 0, 3a + 4b = 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \ominus \\ a=0 \quad \begin{array}{l} 3b=0 \\ b=0 \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Можемо узети вектор $\vec{LO} \times \vec{\mu}_\ell$ за вектор нормале равни β_1 .

$$\vec{O} \times \vec{M}_x = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -12 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -12 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -12 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = (-1)^2 \cdot (3 \cdot 4 - 1 \cdot 3) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (-12 \cdot 4 - (-1) \cdot 3) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (-12 \cdot 1 - (-1) \cdot 3) \vec{e}_3 = 1 \cdot (12 - 3) \vec{e}_1 - (-48 + 3) \vec{e}_2 + (-12 + 3) \vec{e}_3 = 9 \vec{e}_1 + 45 \vec{e}_2 - 9 \vec{e}_3 = (9, 45, -9)$$

Радн лакшег рачуна можемо узети $\vec{n}_{\beta_1} = \frac{1}{9}(9, 45, -9) = (1, 5, -1)$.

$$\beta_1: x + 5y - z + \Delta_1 = 0$$

$$\begin{aligned} O(1, 2, 3) \in \beta_1 &\Rightarrow 1 + 5 \cdot 2 - 3 + \Delta_1 = 0 \\ &1 + 10 - 3 + \Delta_1 = 0 \\ &8 + \Delta_1 = 0 \\ &\Delta_1 = -8 \end{aligned}$$

$$\beta_1: x + 5y - z - 8 = 0$$

је једначина симетралне
равни која сече сферу S

$\beta_2 \perp \beta_1$ јер су симетралне равни диједара које одређују равни α_1 и α_2 међусобно нормалне

$$\Rightarrow \vec{n}_{\beta_2} \perp \vec{n}_{\beta_1}$$

$$L \subset \beta_2 \Rightarrow \vec{M}_x \perp \vec{n}_{\beta_2}$$

$$\vec{n}_{\beta_1} = (1, 5, -1) \text{ и } \vec{M}_x = (-1, 1, 4) \text{ су линеарно независни вектори јер } \kappa \vec{n}_{\beta_1} + d \vec{M}_x = \vec{0} \Rightarrow \kappa(1, 5, -1) + d(-1, 1, 4) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\kappa, 5\kappa, -\kappa) + (-d, d, 4d) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\kappa - d, 5\kappa + d, -\kappa + 4d) = (0, 0, 0) \Rightarrow \kappa - d = 0, 5\kappa + d = 0, -\kappa + 4d = 0$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{+} \\ &3d = 0 \\ &d = 0 \\ &\kappa = d = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Вектор } \vec{n}_{\beta_2} \times \vec{M}_x &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = (-1)^2 \cdot (5 \cdot 4 - 1 \cdot (-1)) \vec{e}_1 \\ &- (1 \cdot 4 - (-1) \cdot (-1)) \vec{e}_2 + (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 5) \vec{e}_3 = (20 + 1) \vec{e}_1 - (4 - 1) \vec{e}_2 + (1 + 5) \vec{e}_3 = 21 \vec{e}_1 - 3 \vec{e}_2 + 6 \vec{e}_3 = (21, -3, 6) \text{ тј. вектор } \frac{1}{3}(21, -3, 6) = \\ &= (7, -1, 2) \text{ је један вектор правца Нормале на равни } \beta_2 \Rightarrow \beta_2: 7x - y + 2z + \Delta_2 = 0 \end{aligned}$$

$$L \in \mathcal{L}, L \subset \beta_2 \Rightarrow L \in \beta_2 \Rightarrow 7 \cdot 13 - (-1) + 2 \cdot 0 + \Delta_2 = 0 \Rightarrow 91 + 1 + \Delta_2 = 0 \Rightarrow \Delta_2 = -92 \Rightarrow \beta_2: 7x - y + 2z - 92 = 0 \text{ је једначина друге симетралне равни}$$

7.3. Одредити једначину сфере полупречника 3 која је уписана у конус $x^2+y^2-z^2=0$. Скицирати.

Решење: Пресек површи $\mathcal{P}: x^2+y^2-z^2=0$ и равни $z=1$ је крива $x^2+y^2-1^2=0, z=1$, што је круг $x^2+y^2=1$ у равни $z=1$.

Центар тог круга је тачка $O_1(0,0,1)$. Тачка $V(0,0,0)$ припада површи $\mathcal{P}$ јер је $0^2+0^2-0^2=0+0-0=0$ и не припада равни $z=1$ којој припада уочени круг.

Права σ која садржи различите тачке O_1 и V има једначину $\sigma: \frac{x-0}{0-0} = \frac{y-0}{0-0} = \frac{z-0}{1-0}$ тј. $\sigma: \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$.

Вектор правца ове праве је $\vec{u}_\sigma = (0,0,1)$, што је уједно и вектор нормале равни $z=1$, тј. $0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z - 1 = 0$ којој припада уочени круг.

Нека је $M(x_M, y_M, 1)$ произвољна тачка са тог круга.

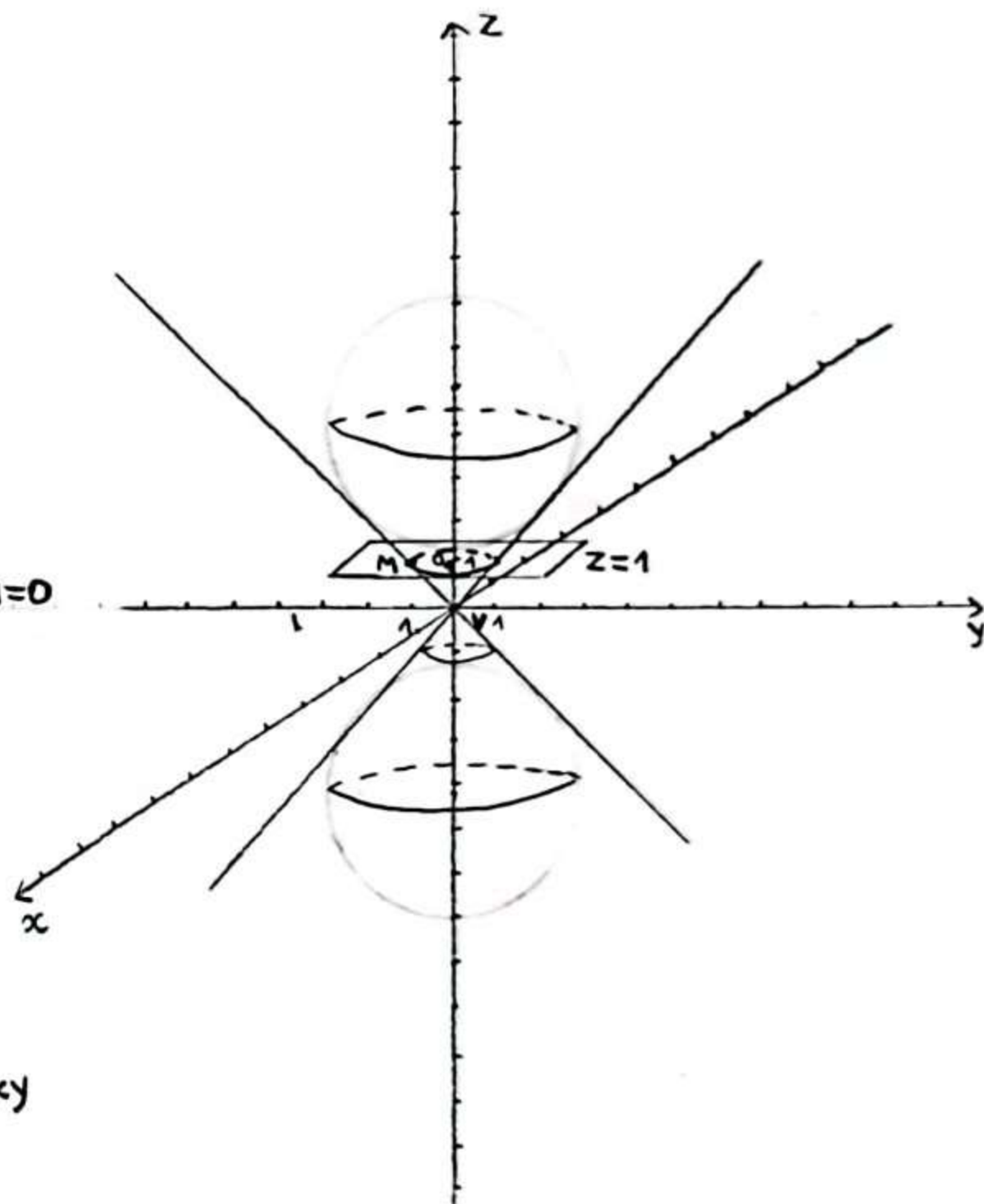
Права MV има једначину $\frac{x-0}{x_M-0} = \frac{y-0}{y_M-0} = \frac{z-0}{1-0}$ тј.

$\frac{x}{x_M} = \frac{y}{y_M} = \frac{z}{1} = t$, те су њене параметарске једначине

$x = x_M t, y = y_M t$ и $z = t$. Како је $x^2+y^2 = (x_M t)^2 + (y_M t)^2 = x_M^2 t^2 + y_M^2 t^2 = (x_M^2 + y_M^2) t^2 = 1 \cdot t^2 = t^2$ и $z = t$, то за сваку тачку (x, y, z) праве MV важи $x^2+y^2-z^2 = t^2 - t^2 = 0$.

Дакле, свака тачка праве MV припада површи $\mathcal{P}$.

Унија правих MV када M прође по свим тачкама круга $x^2+y^2=1, z=1$, јесте конус $\mathcal{K}$, а како је права VO_1 тј. права σ нормална на равни тог круга, то је $\mathcal{K}$ кружни конус. Тиме смо доказали да све тачке кружног конуса $\mathcal{K}$ задовољавају једначину површи



$\mathcal{P}: x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Да би $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ била једначина кружног конуса $\mathcal{K}$ довољно је још доказати да произвољна тачка $T(x_T, y_T, z_T)$ с површи $\mathcal{P}: x^2 + y^2 - z^2 = 0$ припада кружном конусу $\mathcal{K}$.

Ако је $z_T = 0$, онда је $x_T^2 + y_T^2 - 0^2 = 0$ тј. $\underbrace{x_T^2}_{\geq 0} + \underbrace{y_T^2}_{\geq 0} = 0$, те је $x_T = y_T = 0$. Следи да је $T(x_T, y_T, z_T)$ заправо тачка $V(0, 0, 0)$, а она припада било којој од правих MV чија је унија кружни конус $\mathcal{K}$, те $T \in \mathcal{K}$.

Ако је $z_T \neq 0$, онда се тачке $T(x_T, y_T, z_T)$ и $V(0, 0, 0)$ разликују и можемо посматрати праву $\frac{x-0}{x_T-0} = \frac{y-0}{y_T-0} = \frac{z-0}{z_T-0}$ која их садржи, тј. $\frac{x}{x_T} = \frac{y}{y_T} = \frac{z}{z_T}$. Нађимо пресек те праве и равни $z=1$.

Означимо га са $N(x_N, y_N, z_N)$. Тада је $\frac{x_N}{x_T} = \frac{y_N}{y_T} = \frac{z_N}{z_T}$ и $z_N = 1$, тј. $x_N = \frac{x_T z_N}{z_T} = \frac{x_T}{z_T}$, $y_N = \frac{y_T z_N}{z_T} = \frac{y_T}{z_T}$, $z_N = 1$.

За добијену тачку $N(\frac{x_T}{z_T}, \frac{y_T}{z_T}, 1)$ важи $\frac{x_T^2}{z_T^2} + \frac{y_T^2}{z_T^2} = \frac{1}{z_T^2} \cdot (x_T^2 + y_T^2) \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{z_T^2} \cdot z_T^2 = 1$, $z_N = 1$, те тачка N

$$T \in \mathcal{P} \text{ те је } x_T^2 + y_T^2 - z_T^2 = 0$$

припада кругу $x^2 + y^2 = 1, z = 1$. Тачка N припада правој TV , те тачка T припада правој NV која садржи тачку N са круга $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ и тачку V , те T припада кружном конусу $\mathcal{K}$.

Тиме смо употпунили доказ да је $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ једначина кружног конуса $\mathcal{K}$ чија је оса права $\sigma: \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$.

Да бисмо скицирали кружни конус $\mathcal{K}: x^2 + y^2 - z^2 = 0$ скицирајмо најпре круг $x^2 + y^2 = 1, z = 1$, а потом и његове изводнице тј. праве које спајају врх конуса $V(0, 0, 0)$ и тачке с круга.

Сфера уписана у конус $\mathcal{K}$ задовољава да су све изводнице конуса тангенте те сфере.

Означимо са $S(x_S, y_S, z_S)$ центар сфере. Ако је $I(x_I, y_I, z_I)$ произвољна тачка конуса, различита од врха $V(0, 0, 0)$, онда је $i: \frac{x-0}{x_I-0} = \frac{y-0}{y_I-0} = \frac{z-0}{z_I-0}$ тј. $i: \frac{x}{x_I} = \frac{y}{y_I} = \frac{z}{z_I}$ једначина изводнице конуса која садржи тачку I .

Да би она била тангента сфере, растојање од центра S сфере до изводнице i мора бити једнако полупречнику сфере, односно 3.

Због симетрије конуса $\mathcal{K}$ у односу на осу симетрије σ , центар S сфере мора припадати оси σ .

$$\Rightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) \quad \frac{x_c}{0} = \frac{y_c}{0} = \frac{z_c}{1} = t \quad \text{тј.} \quad x_c = 0 \cdot t = 0, y_c = 0 \cdot t = 0, z_c = t.$$

Дакле, центар сфере је тачка $C(0,0,t)$.

$$\lambda: \frac{x}{x_I} = \frac{y}{y_I} = \frac{z}{z_I} \Rightarrow \vec{\mu}_\lambda = (x_I, y_I, z_I) \text{ је вектор правца изводнице } \lambda$$

$$\forall \in \lambda \text{ јер је } \frac{0}{x_I} = \frac{0}{y_I} = \frac{0}{z_I} = 0$$

$$\vec{VC} = [C] - [V] = (0,0,t) - (0,0,0) = (0,0,t)$$

$$\vec{VC} \times \vec{\mu}_\lambda = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & t \\ x_I & y_I & z_I \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & t \\ y_I & z_I \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & t \\ x_I & z_I \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_I & y_I \end{vmatrix} \vec{e}_3 =$$

$$= (-1)^2 \cdot (0 \cdot z_I - y_I \cdot t) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (0 \cdot z_I - x_I \cdot t) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (0 \cdot y_I - 0 \cdot x_I) \vec{e}_3 =$$

$$= 1 \cdot (-y_I t) \vec{e}_1 + (-1) \cdot (-x_I t) \vec{e}_2 + 1 \cdot 0 \cdot \vec{e}_3 = -y_I t \vec{e}_1 + x_I t \vec{e}_2 = (-y_I t, x_I t, 0)$$

$$\|\vec{VC} \times \vec{\mu}_\lambda\| = \sqrt{(-y_I t)^2 + (x_I t)^2} = \sqrt{y_I^2 t^2 + x_I^2 t^2} = \sqrt{t^2 (y_I^2 + x_I^2)} = |t| \cdot \sqrt{x_I^2 + y_I^2}$$

$$\|\vec{\mu}_\lambda\| = \sqrt{x_I^2 + y_I^2 + z_I^2} = \sqrt{x_I^2 + y_I^2 + x_I^2 + y_I^2} = \sqrt{2(x_I^2 + y_I^2)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x_I^2 + y_I^2}$$

$$I \in \mathcal{K} \text{ те је } x_I^2 + y_I^2 - z_I^2 = 0$$

$$\text{тј. } z_I^2 = x_I^2 + y_I^2$$

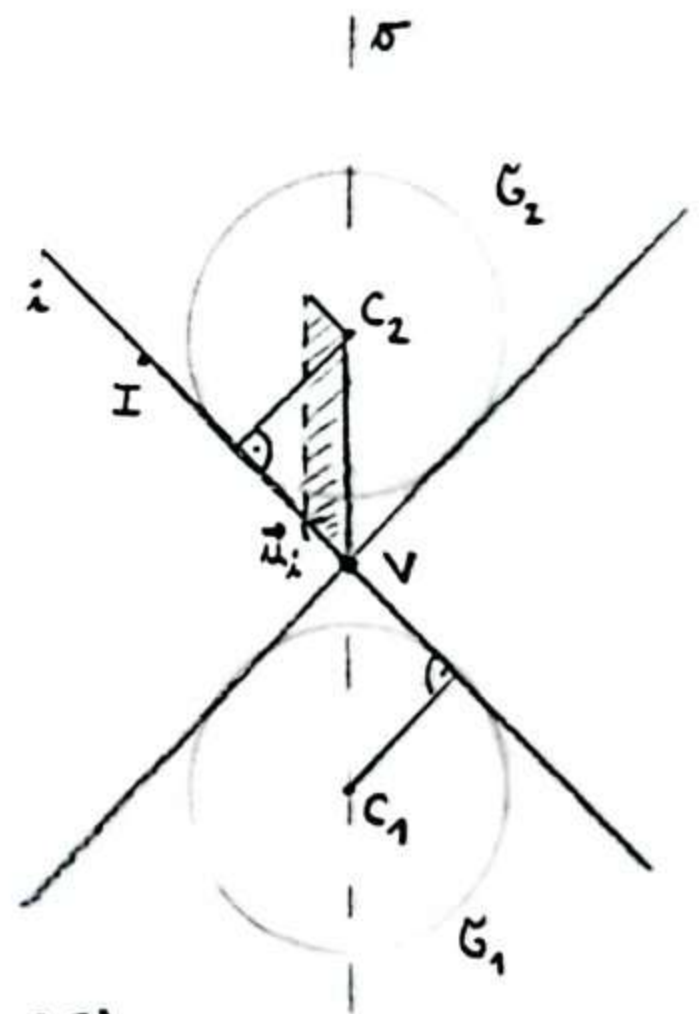
$$3 = d(C, \lambda) = \frac{\|\vec{VC} \times \vec{\mu}_\lambda\|}{\|\vec{\mu}_\lambda\|} = \frac{|t| \sqrt{x_I^2 + y_I^2}}{\sqrt{2} \sqrt{x_I^2 + y_I^2}} = \frac{|t|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |t| = 3\sqrt{2} \Rightarrow t = -3\sqrt{2} \text{ или } t = 3\sqrt{2}$$

$$C_1(0,0,-3\sqrt{2})$$

$$C_2(0,0,3\sqrt{2})$$

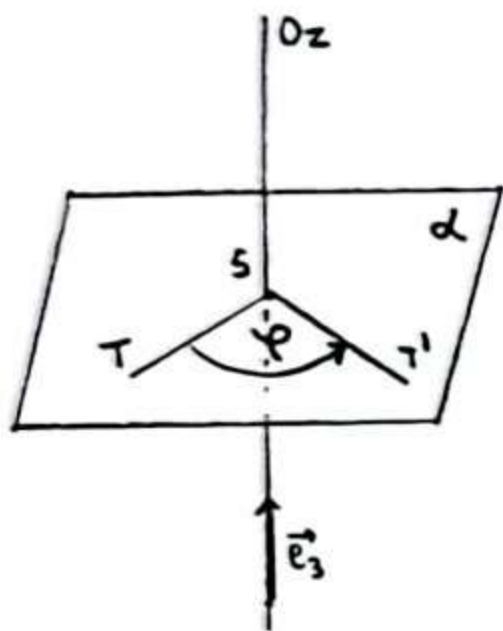
Постоје две једначине сфера полупречника 3 уписаних у конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и оне су

$$G_1: x^2 + y^2 + (z + 3\sqrt{2})^2 = 9 \quad \text{и} \quad G_2: x^2 + y^2 + (z - 3\sqrt{2})^2 = 9.$$



- 7.4. Шта се добија (објаснити и написати једначину) ротацијом праве p око Oz осе, ако је права p : а) $x=0, y=z$; б) $y=0, x=1$; в) $z=0, x=y$; г) $z=0, x=2$; д) $x=1, y=z$?

Решење: Ротација око осе Oz за угао φ представља афино пресликавање које тачку $T(x_T, y_T, z_T)$ пресликава у тачку $T'(x_{T'}, y_{T'}, z_{T'})$ која задовољава: 1) T' припада равни α која садржи тачку T и нормална је на осе Oz ; 2) ако је тачка S пресечна тачка осе Oz и равни α , онда је $ST'=ST$ и оријентисани угао $\angle TST'$ је једнак φ .



Оса Oz има једначину $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{1}$ тј. $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ јер садржи тачку $O(0,0,0)$ и има вектор правца $\vec{e}_3 = (0,0,1)$, а како је равни α нормална на Oz , то је $\vec{e}_3$ вектор нормале равни α .

$T(x_T, y_T, z_T) \in \alpha \Rightarrow 0 \cdot (x - x_T) + 0 \cdot (y - y_T) + 1 \cdot (z - z_T) = 0$ тј. $z - z_T = 0$ је једначина равни α .

Пресечна тачка праве Oz и равни α је тачка $S(x_S, y_S, z_S)$.

$S \in Oz \Rightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) \frac{x_S}{0} = \frac{y_S}{0} = \frac{z_S}{1} = t$ тј. $x_S = 0 \cdot t = 0, y_S = 0 \cdot t = 0, z_S = 1 \cdot t = t$

$S \in \alpha \Rightarrow z_S - z_T = 0$ тј. $z_S = z_T$.

Дакле, пресечна тачка осе Oz и равни α је $S(0,0,z_T)$.

Услови $ST'=ST$ и да је оријентисани угао $\angle TST'$ једнак φ исти су као услови за ротацију око координатног почетка у равни Oxy (тј. равни $z=0$), те имамо да тачка

$T'(x_{T'}, y_{T'}, z_{T'})$ задовољава: 1) $z_{T'} - z_T = 0$ тј. $z_{T'} = z_T$ јер $T' \in \alpha$

2) $\begin{pmatrix} x_{T'} \\ y_{T'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix}$ јер се у равни $\alpha: z = z_T$ тачка

(x_T, y_T) ротира око координатног почетка $(0,0)$.

Зато је $\begin{pmatrix} x_{T'} \\ y_{T'} \\ z_{T'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix}$ формула ротације тачке $T(x_T, y_T, z_T)$ око Oz осе за угао φ .

Да бисмо добили слику праве p при ротацији око осе Oz за угао φ , довољно је наћи слику произвољне тачке $P(x_P, y_P, z_P)$ са праве p .

a) $p: x=0, y=z$

$P(x_p, y_p, z_p) \in p \Rightarrow x_p=0, y_p=z_p$

Ротацијом тачке $P(0, y_p, y_p)$ око осе Oz за угао φ добијамо тачку $P'(x, y, z)$ која задовољава

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot 0 - \sin \varphi \cdot y_p + 0 \cdot y_p \\ \sin \varphi \cdot 0 + \cos \varphi \cdot y_p + 0 \cdot y_p \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot y_p + 1 \cdot y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_p \sin \varphi \\ y_p \cos \varphi \\ y_p \end{pmatrix}$$

Приметимо да је $x^2 + y^2 = (-y_p \sin \varphi)^2 + (y_p \cos \varphi)^2 = y_p^2 \sin^2 \varphi + y_p^2 \cos^2 \varphi = y_p^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = y_p^2 \cdot 1 = y_p^2 = z^2$.

Дакле, слика сваке тачке P са праве p припада кружном конусу $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Обрнуто, ако одaberемо произвољну тачку $T(x_T, y_T, z_T)$ с површи $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, онда разликујемо два случаја.

1) Ако је $z_T = 0$, онда је $x_T^2 + y_T^2 - 0^2 = 0$ тј. $\underbrace{x_T^2}_{\geq 0} + \underbrace{y_T^2}_{\geq 0} = 0$, те мора бити $x_T = y_T = 0$. Тачка $(0, 0, 0)$ припада правој

p јер је $0=0, 0=0$ (а права p представља слику праве p при ротацији око осе Oz за угао 0).

2) Ако је $z_T \neq 0$, онда из $x_T^2 + y_T^2 - z_T^2 = 0$ следи $x_T^2 + y_T^2 = z_T^2$, односно након дељења са $z_T^2 \neq 0$ добија се

$\left(\frac{x_T}{z_T}\right)^2 + \left(\frac{y_T}{z_T}\right)^2 = 1$. На основу теореме из тригонометрије постоји јединствено $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ такво да је

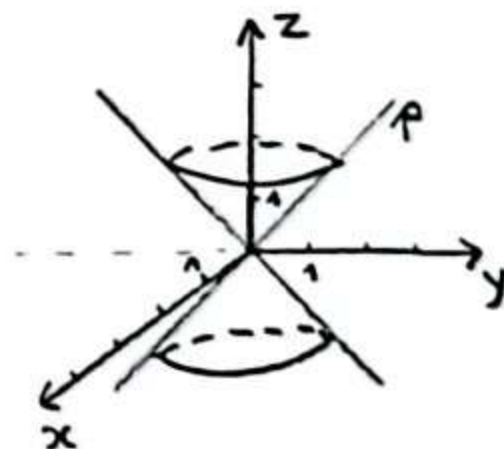
$\frac{x_T}{z_T} = -\sin \varphi_1$ и $\frac{y_T}{z_T} = \cos \varphi_1$, односно да је $x_T = -z_T \sin \varphi_1, y_T = z_T \cos \varphi_1$. Тада је $\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z_T \\ z_T \end{pmatrix}$,

а тачка $(0, z_T, z_T)$ је на правој p јер је $0=0, z_T=z_T$, те је (x_T, y_T, z_T) тачка на слици праве p при ротацији око Oz осе за угао φ_1 .

Дакле, свака тачка с површи $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ је добијена при ротацији око Oz осе за неки угао φ

од неке тачке са праве $p: x=0, y=z$,

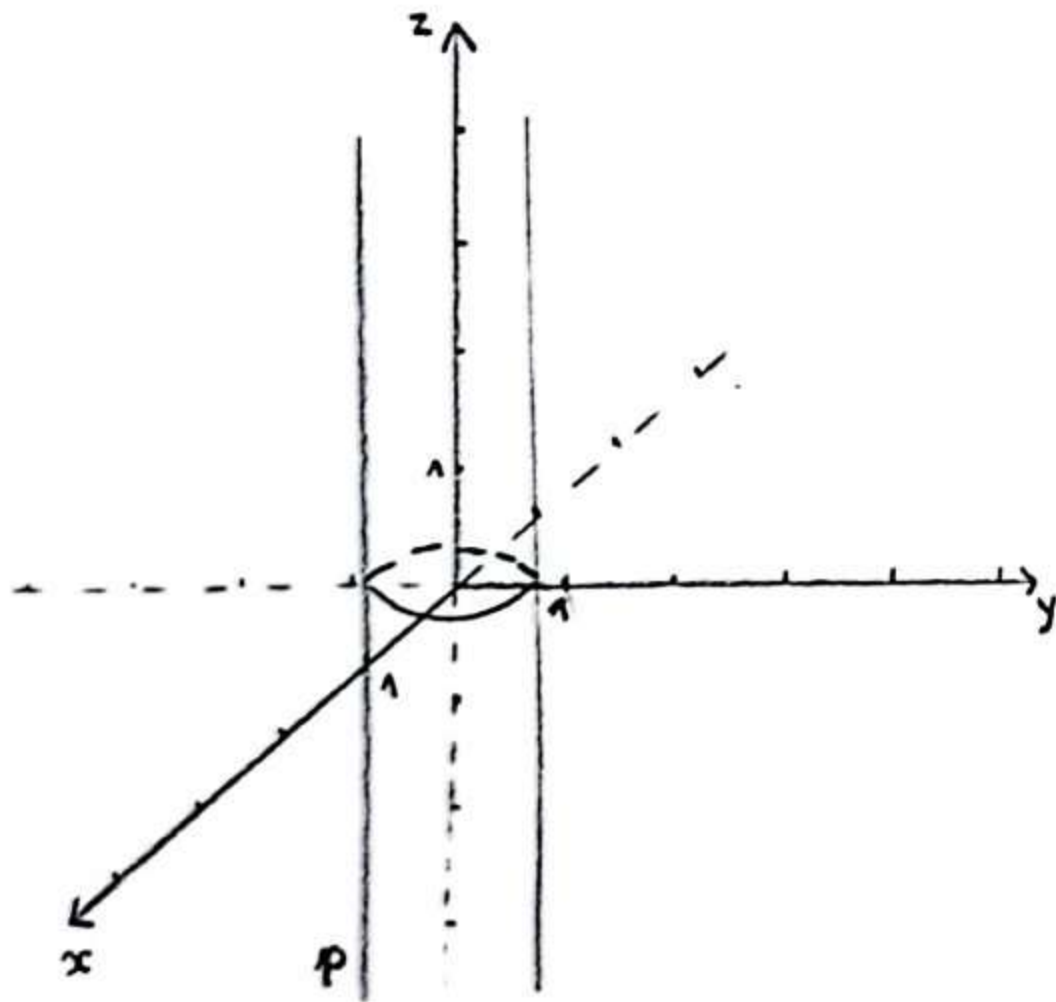
$\Rightarrow$ Тражена површ је кружни конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.



δ) $p: y=0, x=1$

За произвољну тачку $P(x_p, y_p, z_p)$ с праве p важи $y_p=0, x_p=1$ тј. $P(1, 0, z_p)$. Ротацијом око Oz осе за угао φ добијамо тачку $P'(x, y, z)$ која задовољава
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot 1 - \sin \varphi \cdot 0 + 0 \cdot z_p \\ \sin \varphi \cdot 1 + \cos \varphi \cdot 0 + 0 \cdot z_p \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ z_p \end{pmatrix},$$
 односно важи да је

$x^2 + y^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. Следи да слика сваке тачке P са праве p припада површи $x^2 + y^2 = 1$, што је кружни цилиндар. Докажимо да важи и обрнуто, односно да за произвољну тачку $T(x_T, y_T, z_T)$ с површи $x^2 + y^2 = 1$, односно такву да је $x_T^2 + y_T^2 = 1$ важи да представља слику неке тачке са праве p при ротацији око осе Oz за неки угао φ . Како је $x_T^2 + y_T^2 = 1$, то на основу теореме из тригонометрије важи да постоји јединствени угао $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ такав да је $x_T = \cos \varphi_1, y_T = \sin \varphi_1$. Тада је
$$\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_T \end{pmatrix},$$
 а тачка $(1, 0, z_T)$ припада правој p јер је $0=0, 1=1$, те је тачка $T(x_T, y_T, z_T)$ добијена при ротацији тачке $(1, 0, z_T)$ око осе Oz за угао φ_1 . Дакле, тражена површ је $x^2 + y^2 = 1$, односно кружни цилиндар.



B) $p: z=0, x=y$

Произвольна точка $P(x_p, y_p, z_p)$ с праве p задовољава $x_p = y_p, z_p = 0$, тј. $P(x_p, y_p, 0)$. Ротацијом око Oz осе за угао φ добијемо тачку $P'(x, y, z)$ која задовољава $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \cos \varphi - y_p \sin \varphi + 0 \\ x_p \sin \varphi + y_p \cos \varphi + 0 \\ 0 \cdot x_p + 0 \cdot y_p + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p (\cos \varphi - \sin \varphi) \\ x_p (\sin \varphi + \cos \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} x_p \cdot \sqrt{2} (\cos \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ x_p \cdot \sqrt{2} (\sin \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \sqrt{2} (\cos \varphi \cos \frac{\pi}{4} - \sin \varphi \sin \frac{\pi}{4}) \\ x_p \sqrt{2} (\sin \varphi \cos \frac{\pi}{4} + \cos \varphi \sin \frac{\pi}{4}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \sqrt{2} \cos(\varphi + \frac{\pi}{4}) \\ x_p \sqrt{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приметимо да је $z=0$, те слика сваке тачке P са праве p при ротацији око осе Oz за угао φ припада равни $z=0$, тј. равни Oxy .

Докажимо да важи и обрнуто, да за произволну тачку $T(x_t, y_t, 0)$ равни $z=0$ важи да је добијена при ротацији неке тачке с праве p око Oz осе за неки угао φ . Разликујемо два случаја.

1) Ако је $\underbrace{x_t^2}_{\geq 0} + \underbrace{y_t^2}_{\geq 0} = 0$, онда је $x_t = y_t = 0$. Тачка $T(0, 0, 0)$ припада правој p јер је $0=0, 0=0$, те је тачка T добијена при ротацији око Oz осе тачке T с праве p за угао 0 .

2) Ако је $x_t^2 + y_t^2 \neq 0$, означимо $\kappa = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}$. Тада је $x_t^2 + y_t^2 = \kappa^2$, те након дељења са $\kappa^2 \neq 0$ добијемо $(\frac{x_t}{\kappa})^2 + (\frac{y_t}{\kappa})^2 = 1$, те на основу теореме из тригонометрије важи да постоји јединствени угао $\theta \in [0, 2\pi)$ такав да је $\frac{x_t}{\kappa} = \cos \theta, \frac{y_t}{\kappa} = \sin \theta$, односно $x_t = \kappa \cos \theta, y_t = \kappa \sin \theta$. Уочимо угао $\varphi_1 = \begin{cases} \theta - \frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{4} \leq \theta < 2\pi \\ \theta - \frac{\pi}{4} + 2\pi, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ такав да је $\cos(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}) = \cos \theta$ и $\sin(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}) = \sin \theta$ (функције $\cos$ и $\sin$ су 2π периодичне).

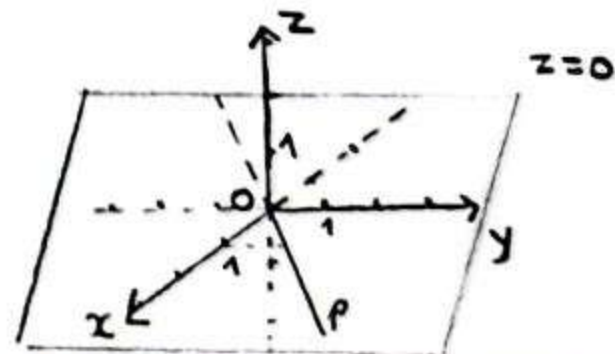
Тада је $x_t = \kappa \cos \theta = \kappa \cos(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}) = \kappa \cdot (\cos \varphi_1 \cos \frac{\pi}{4} - \sin \varphi_1 \sin \frac{\pi}{4}) = \kappa \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \varphi_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 - \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1$ и

$y_t = \kappa \sin \theta = \kappa \sin(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}) = \kappa (\sin \varphi_1 \cos \frac{\pi}{4} + \cos \varphi_1 \sin \frac{\pi}{4}) = \kappa (\sin \varphi_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \varphi_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1 + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1$, те је

$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \\ \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, а тачка $(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}, \frac{\kappa}{\sqrt{2}}, 0)$ припада правој p јер је $0=0, \frac{\kappa}{\sqrt{2}} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}$, те је тачка $T(x_t, y_t, 0)$

добијена при ротацији тачке $(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}, \frac{\kappa}{\sqrt{2}}, 0) = (\sqrt{x_t^2 + y_t^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{x_t^2 + y_t^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ око осе Oz за угао φ_1 .

Дакле, тражена површ је равна $z=0$.



г) $p: z=0, x=2$

Произвольна точка $P(x_p, y_p, z_p)$ с праве p задовољава $z_p=0, x_p=2$, односно $P(2, y_p, 0)$. Ротацијом око Oz осе за угао φ добијамо тачку $P'(x, y, z)$ која задовољава $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ y_p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi - y_p \sin \varphi \\ 2 \sin \varphi + y_p \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.

Означимо $\kappa = \sqrt{z^2 + y_p^2} = \sqrt{4 + y_p^2}$. Важи $\kappa > 0$ и $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa (\cos \varphi \cdot \frac{2}{\kappa} - \sin \varphi \cdot \frac{y_p}{\kappa}) \\ \kappa (\sin \varphi \cdot \frac{2}{\kappa} + \cos \varphi \cdot \frac{y_p}{\kappa}) \\ 0 \end{pmatrix}$. Из $\kappa = \sqrt{4 + y_p^2}$ следи да је

$\kappa^2 = z^2 + y_p^2$, што након дељења са $\kappa^2 \neq 0$ постаје $(\frac{2}{\kappa})^2 + (\frac{y_p}{\kappa})^2 = 1$, те по теореме из тригонометрије постоји јединствени угао $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ такав да је $\cos \varphi_0 = \frac{2}{\kappa}$ и $\sin \varphi_0 = \frac{y_p}{\kappa}$. Следи да је $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa (\cos \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi \sin \varphi_0) \\ \kappa (\sin \varphi \cos \varphi_0 + \cos \varphi \sin \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \cos(\varphi + \varphi_0) \\ \kappa \sin(\varphi + \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix}$, те тачка $P'(x, y, z)$ задовољава $z=0$ и $x^2 + y^2 = \kappa^2 (\cos^2(\varphi + \varphi_0) + \sin^2(\varphi + \varphi_0)) = \kappa^2 \cdot (\cos^2(\varphi + \varphi_0) + \sin^2(\varphi + \varphi_0)) =$

$= \kappa^2 \cdot 1 = \kappa^2 = 4 + y_p^2 \geq 4$, тј. тачка P' , која је слика тачке P с праве p при ротацији око Oz осе за угао φ припада равни $z=0$ и то оном делу те равни где је $x^2 + y^2 \geq 4$, што је унија круга $x^2 + y^2 = 4$ у тој равни

и његове спољашњости. Следи да је површ која настаје ротацијом праве $p: z=0, x=2$ око Oz осе подскуп површи $z=0, x^2 + y^2 \geq 4$. Докажимо да важи и обрнуто, тј. да је произвольна тачка $T(x_T, y_T, 0)$ с површи $z=0, x^2 + y^2 \geq 4$ слика неке тачке с праве p при ротацији око осе Oz за неки угао φ .

Тада важи $x_T^2 + y_T^2 \geq 4$. Означимо $\tilde{\kappa} = \sqrt{x_T^2 + y_T^2}$ и приметимо да је $\tilde{\kappa} = \sqrt{x_T^2 + y_T^2} \geq \sqrt{4} = 2 > 0$ и

$(\frac{x_T}{\tilde{\kappa}})^2 + (\frac{y_T}{\tilde{\kappa}})^2 = \frac{x_T^2}{\tilde{\kappa}^2} + \frac{y_T^2}{\tilde{\kappa}^2} = \frac{x_T^2 + y_T^2}{\tilde{\kappa}^2} = \frac{\tilde{\kappa}^2}{\tilde{\kappa}^2} = 1$, те на основу теореме из тригонометрије постоји јединствени

угао $\theta \in [0, 2\pi)$ такав да је $\frac{x_T}{\tilde{\kappa}} = \cos \theta$, $\frac{y_T}{\tilde{\kappa}} = \sin \theta$. Обележимо сада $\tilde{y} = \sqrt{x_T^2 + y_T^2 - 4}$. Тада је $(\frac{2}{\tilde{\kappa}})^2 + (\frac{\tilde{y}}{\tilde{\kappa}})^2 =$

$= \frac{4}{\tilde{\kappa}^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\tilde{\kappa}^2} = \frac{4 + \tilde{y}^2}{\tilde{\kappa}^2} = \frac{4 + x_T^2 + y_T^2 - 4}{x_T^2 + y_T^2} = \frac{x_T^2 + y_T^2}{x_T^2 + y_T^2} = 1$, те на основу теореме из тригонометрије постоји јединствени

угао $\tilde{\varphi} \in [0, 2\pi)$ такав да је $\frac{2}{\tilde{\kappa}} = \cos \tilde{\varphi}$ и $\frac{\tilde{y}}{\tilde{\kappa}} = \sin \tilde{\varphi}$. Сада дефинишемо угао $\varphi_1 = \begin{cases} \theta - \tilde{\varphi}, & \theta \in [\tilde{\varphi}, 2\pi) \\ \theta - \tilde{\varphi} + 2\pi, & \theta \in [0, \tilde{\varphi}) \end{cases}$.

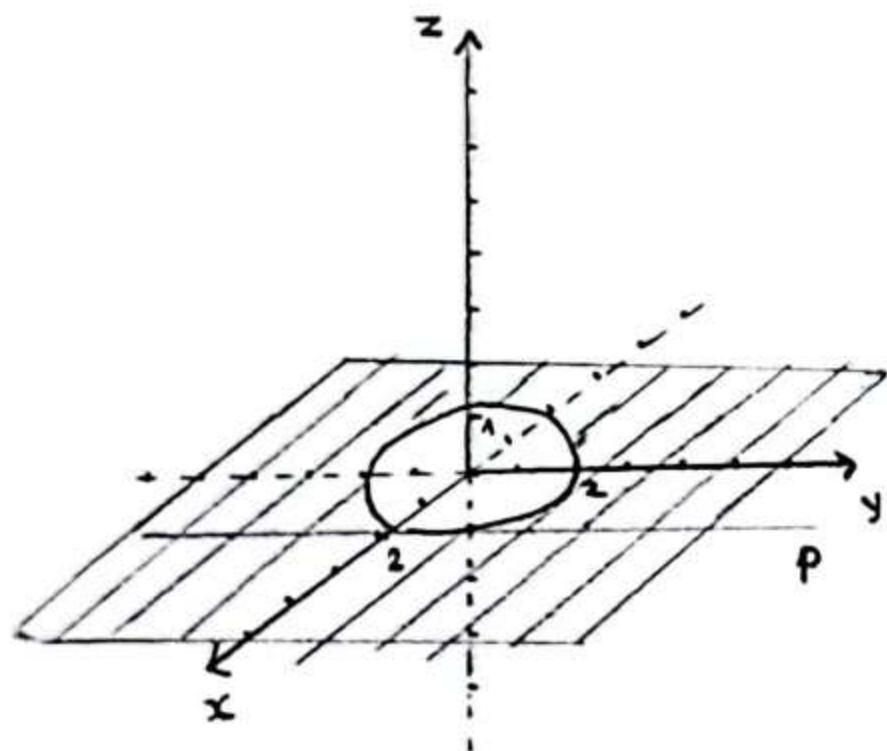
Тада је $\cos(\varphi_1 + \tilde{\varphi}) = \cos \theta$ и $\sin(\varphi_1 + \tilde{\varphi}) = \sin \theta$ (функције $\cos$ и $\sin$ су 2π периодичне), те је

$x_T = \tilde{\kappa} \cos \theta = \tilde{\kappa} \cos(\varphi_1 + \tilde{\varphi}) = \tilde{\kappa} (\cos \varphi_1 \cos \tilde{\varphi} - \sin \varphi_1 \sin \tilde{\varphi}) = \tilde{\kappa} (\cos \varphi_1 \cdot \frac{2}{\tilde{\kappa}} - \sin \varphi_1 \cdot \frac{\tilde{y}}{\tilde{\kappa}}) = 2 \cos \varphi_1 - \tilde{y} \sin \varphi_1$ и

$y_T = \tilde{\kappa} \sin \theta = \tilde{\kappa} \sin(\varphi_1 + \tilde{\varphi}) = \tilde{\kappa} (\sin \varphi_1 \cos \tilde{\varphi} + \cos \varphi_1 \sin \tilde{\varphi}) = \tilde{\kappa} (\sin \varphi_1 \cdot \frac{2}{\tilde{\kappa}} + \cos \varphi_1 \cdot \frac{\tilde{y}}{\tilde{\kappa}}) = 2 \sin \varphi_1 + \tilde{y} \cos \varphi_1$.

Дакле, $\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \tilde{y} \\ 0 \end{pmatrix}$, а тачка $(2, \tilde{y}, 0)$ припада правој p , што значи да тачка $(x_T, y_T, 0)$ представља слику тачке $(2, \tilde{y}, 0)$ с праве p при ротацији око осе Oz за угао φ_1 .

Дакле, површ која настаје ротацијом праве $p: z=0, x=2$ око осе Oz је $z=0, x^2+y^2=4$.

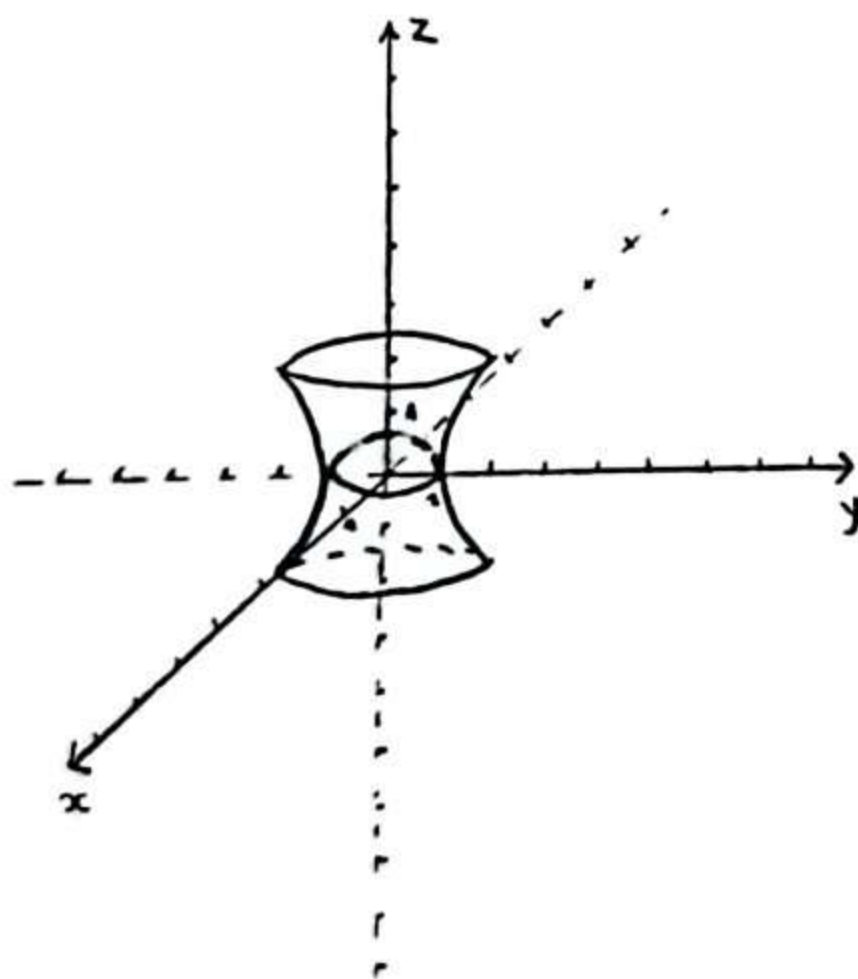


Д) $p: x=1, y=z$

Произволна тачка $P(x_p, y_p, z_p)$ с праве p задовољава $x_p=1, y_p=z_p$, тј. $P(1, y_p, y_p)$. Ако је $P'(x, y, z)$ тачка која настаје ротацијом тачке P око Oz осе за угао φ , онда је $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot 1 - \sin \varphi \cdot y_p + 0 \cdot y_p \\ \sin \varphi \cdot 1 + \cos \varphi \cdot y_p + 0 \cdot y_p \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot y_p + 1 \cdot y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - \sin \varphi \cdot y_p \\ \sin \varphi + y_p \cos \varphi \\ y_p \end{pmatrix}$. Означимо $\kappa = \sqrt{1+y_p^2}$. Тада је $\kappa > 0$ и $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - y_p \sin \varphi \\ \sin \varphi + y_p \cos \varphi \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa (\cos \varphi \cdot \frac{1}{\kappa} - \sin \varphi \cdot \frac{y_p}{\kappa}) \\ \kappa (\sin \varphi \cdot \frac{1}{\kappa} + \cos \varphi \cdot \frac{y_p}{\kappa}) \\ y_p \end{pmatrix}$.

Како је $\kappa = \sqrt{1+y_p^2}$, то је $1+y_p^2 = \kappa^2$ што након дељења са $\kappa^2 \neq 0$ постаје $(\frac{1}{\kappa})^2 + (\frac{y_p}{\kappa})^2 = 1$, те на основу теореме из тригонометрије следи да постоји јединствени угао $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ такав да је $\cos \varphi_0 = \frac{1}{\kappa}$ и $\sin \varphi_0 = \frac{y_p}{\kappa}$. Тада је $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa (\cos \varphi \cdot \frac{1}{\kappa} - \sin \varphi \cdot \frac{y_p}{\kappa}) \\ \kappa (\sin \varphi \cdot \frac{1}{\kappa} + \cos \varphi \cdot \frac{y_p}{\kappa}) \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa (\cos \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi \sin \varphi_0) \\ \kappa (\sin \varphi \cos \varphi_0 + \cos \varphi \sin \varphi_0) \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \cos(\varphi + \varphi_0) \\ \kappa \sin(\varphi + \varphi_0) \\ y_p \end{pmatrix}$. Приметимо да важи $x^2 + y^2 = \kappa^2 \cos^2(\varphi + \varphi_0) + \kappa^2 \sin^2(\varphi + \varphi_0) = \kappa^2 \cdot 1 = \kappa^2 = 1 + y_p^2 = 1 + z^2$, односно $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Из класификације површи другог реда с предавања знамо да је $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ једначина једнограног хиперboloида. (јер је облика $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$).

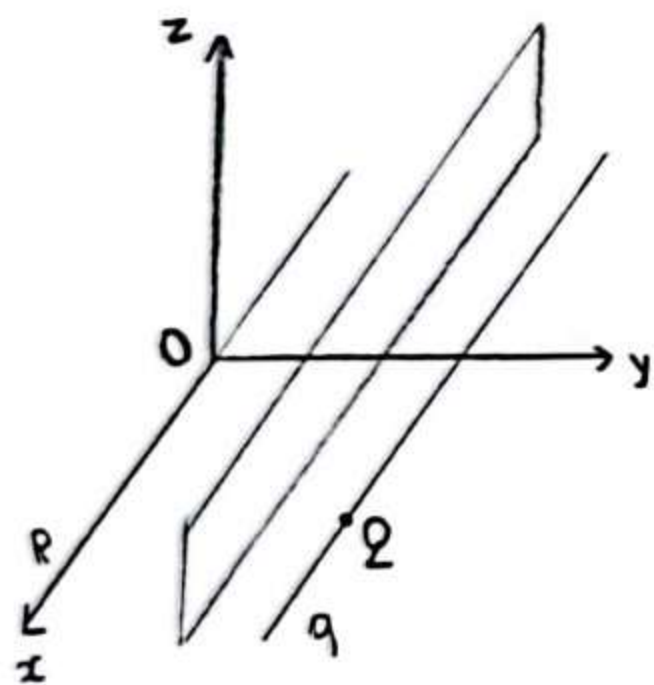
Дакле, површ која настаје ротацијом праве $p: x=1, y=z$ око Oz осе је подскуп једнограног хиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$. Докажимо да важи и обрнуто, да је произволна тачка $T(x_T, y_T, z_T)$ с површи $x^2+y^2-z^2=1$ добијена ротацијом неке тачке с праве p око осе Oz за неки угао φ . Тада је $x_T^2+y_T^2-z_T^2=1$. Означимо $\tilde{z} = \sqrt{1+z_T^2}$. Тада је $\tilde{z} > 0$ и $\left(\frac{x_T}{\tilde{z}}\right)^2 + \left(\frac{y_T}{\tilde{z}}\right)^2 = \frac{x_T^2}{\tilde{z}^2} + \frac{y_T^2}{\tilde{z}^2} = \frac{x_T^2+y_T^2}{1+z_T^2} = \frac{1+z_T^2}{1+z_T^2} = 1$, те на основу теореме из тригонометрије постоји јединствени угао $\theta \in [0, 2\pi)$ такав да је $\frac{x_T}{\tilde{z}} = \cos \theta$, $\frac{y_T}{\tilde{z}} = \sin \theta$. Како је $\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^2 + \left(\frac{z_T}{\tilde{z}}\right)^2 = \frac{1}{\tilde{z}^2} + \frac{z_T^2}{\tilde{z}^2} = \frac{1+z_T^2}{\tilde{z}^2} = 1$, то постоји јединствени угао $\tilde{\varphi} \in [0, 2\pi)$ такав да је $\frac{1}{\tilde{z}} = \cos \tilde{\varphi}$ и $\frac{z_T}{\tilde{z}} = \sin \tilde{\varphi}$, на основу теореме из тригонометрије. Уочимо угао $\varphi_1 = \begin{cases} \theta - \tilde{\varphi}, & \theta \in [\tilde{\varphi}, 2\pi) \\ \theta - \tilde{\varphi} + 2\pi, & \theta \in [0, \tilde{\varphi}) \end{cases}$. Тада је $\cos(\varphi_1 + \tilde{\varphi}) = \cos \theta$ и $\sin(\varphi_1 + \tilde{\varphi}) = \sin \theta$. Како је $x_T = \tilde{z} \cos \theta$ и $y_T = \tilde{z} \sin \theta$, то је $x_T = \tilde{z} \cos \theta = \tilde{z} \cos(\varphi_1 + \tilde{\varphi}) = \tilde{z} \cdot (\cos \varphi_1 \cos \tilde{\varphi} - \sin \varphi_1 \sin \tilde{\varphi}) = \tilde{z} \left(\cos \varphi_1 \cdot \frac{1}{\tilde{z}} - \sin \varphi_1 \cdot \frac{z_T}{\tilde{z}} \right) = \cos \varphi_1 - z_T \sin \varphi_1$ и $y_T = \tilde{z} \sin \theta = \tilde{z} \sin(\varphi_1 + \tilde{\varphi}) = \tilde{z} (\sin \varphi_1 \cos \tilde{\varphi} + \cos \varphi_1 \sin \tilde{\varphi}) = \tilde{z} \left(\sin \varphi_1 \cdot \frac{1}{\tilde{z}} + \cos \varphi_1 \cdot \frac{z_T}{\tilde{z}} \right) = \sin \varphi_1 + z_T \cos \varphi_1$. Дакле, $\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z_T \\ z_T \end{pmatrix}$, а тачка $(1, z_T, z_T)$ припада правој p , што значи да је тачка $T(x_T, y_T, z_T)$ слика при ротацији тачке $(1, z_T, z_T)$ с праве p око осе Oz за угао φ_1 . Дакле, површ која настаје при ротацији праве $p: x=1, y=z$ око осе Oz је једнограни хиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$.



Када пресецамо једнограни хиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$ равнима паралелним Oxy тј. равнима $z=z_0=\text{const}$ добијамо кругове $x^2+y^2=1+z_0^2$, а када га пресецамо равнима $y=y_0=\text{const}$ или $x=x_0=\text{const}$ добијамо хиперболе.

- 7.5. Шта је геометријско место тачака простора које су једнако удаљене од: а) две паралелне праве; б) две праве које се секу; в) две паралелне равни; г) две равни које се секу?

Решење: а) Нека су p и q две паралелне праве. Тада постоји раван која их садржи, назовимо је α . Уочимо Декартов правоугли координатни систем $Oxyz$ тако да раван Oxy буде раван α , а да x -оса буде права p . Тада је $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$ једначина праве p . Како је $q \parallel p$, то је вектор правца праве q исти као вектор правца праве p . Ако је Q произвољна тачка с праве q , онда тачка Q има координате $Q(x_0, y_0, 0)$ јер све тачке праве q припадају Oxy равни. Следи да је $\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-0}{0}$ једначина праве q . Означимо са $T(x, y, z)$ произвољну тачку простора која је једнако удаљена од правих p и q . Тада је $d(T, p) = d(T, q)$.



$$O(0,0,0) \in p \quad d(T, p) = \frac{\|\vec{OT} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|}$$

$$\vec{\mu}_p = (1, 0, 0)$$

$$\vec{OT} = [T] - [O] = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z)$$

$$\vec{OT} \times \vec{\mu}_p = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ y & z \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (z\vec{e}_2 - y\vec{e}_3) = (0, z, -y)$$

$$\|\vec{OT} \times \vec{\mu}_p\| = \sqrt{0^2 + z^2 + (-y)^2} = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \|\vec{\mu}_p\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$d(T, p) = \frac{\|\vec{OT} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|} = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{1} = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$Q(x_0, y_0, 0) \in q \quad d(T, q) = \frac{\|\vec{QT} \times \vec{\mu}_q\|}{\|\vec{\mu}_q\|}$$

$$\vec{\mu}_q = (1, 0, 0) \quad \|\vec{\mu}_q\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\vec{QT} = [T] - [Q] = (x, y, z) - (x_0, y_0, 0) = (x - x_0, y - y_0, z)$$

$$\vec{QT} \times \vec{\mu}_q = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x-x_0 & y-y_0 & z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ y-y_0 & z \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (z\vec{e}_2 - (y-y_0)\vec{e}_3) = (0, z, y_0 - y)$$

$$d(T, q) = \frac{\|\vec{QT} \times \vec{\mu}_q\|}{\|\vec{\mu}_q\|} = \frac{\sqrt{0^2 + z^2 + (y_0 - y)^2}}{1} = \sqrt{z^2 + (y - y_0)^2}$$

$$d(T, p) = d(T, q) \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + (y - y_0)^2} \Leftrightarrow y^2 + \cancel{z^2} = \cancel{z^2} + (y - y_0)^2 \Leftrightarrow y^2 = y^2 - 2yy_0 + y_0^2 \Leftrightarrow 2y_0y - y_0^2 = 0$$

1° Ако би било $y_0 = 0$, онда би тачка Q имала координате $Q(x_0, 0, 0)$, те би тачка Q припадала x -оси, тј. правој p и онда би се праве p и q поклапале јер су по услову задатка паралелне и q садржи Q која припада и правој p . Тада би за сваку тачку T еуклидског простора важило $d(T, p) = d(T, q)$.

2° Ако би било $y_0 \neq 0$, онда је $d(T, p) = d(T, q) \Leftrightarrow 2y_0y - y_0^2 = 0 \Leftrightarrow y_0(2y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ y_0 \neq 0}}{y_0} (2y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 2y - y_0 = 0 \Leftrightarrow y - \frac{y_0}{2} = 0$.

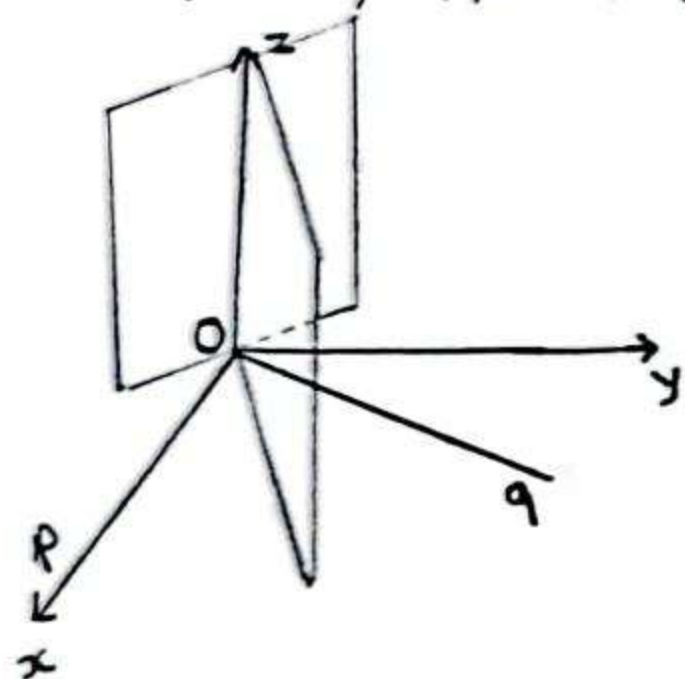
Дакле, геометријско место тачака које су једнако удаљене од паралелних правих $p: \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$ и $q: \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-0}{0}$ је раван $y - \frac{y_0}{2} = 0$. То је раван која садржи тачку $R(0, \frac{y_0}{2}, 0)$ и нормална је на y -оси.

Приметимо да је y -оса нормална на x -осу и сече је у тачки $O(0, 0, 0)$. Онда је y -оса нормална и на праву q јер је q паралелна са x -осом. Нађимо пресечну тачку правих q и y -осе. Ако су њене координате $(0, y', 0)$ јер је на y -оси, онда мора важити $\frac{0-x_0}{1} = \frac{y'-y_0}{0} = \frac{0-0}{0}$, те мора бити $y' = y_0$. Дакле, $(0, y_0, 0)$ је пресечна тачка међусобно нормалних правих q и y -осе.

Приметимо и да је тачка $R(0, \frac{y_0}{2}, 0)$ средиште дужи чије су крајње тачке $O(0, 0, 0)$ и $(0, y_0, 0)$.

Дакле, тражено геометријско место тачака је раван која садржи средиште дужи чији су крајеви пресечне тачке паралелних правих p и q с њиховом заједничком нормалом и та раван је нормална на ту заједничку нормалу.

б) Нека се праве p и q секу у тачки O . Тада постоји раван која их садржи. Одаберимо Декартов правоугли координатни систем $Oxyz$ такав да је његов координатни почетак пресечна тачка O правих p и q , да праве p и q припадају Oxy равни и да је x -оса права p . Тада права p има једначину $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$, а права q има једначину $\frac{x-0}{\mu} = \frac{y-0}{\vartheta} = \frac{z-0}{0}$ (вектор правца праве q мора бити у равни Oxy , стога је његова z -координата једнака 0), при чему вектор $(\mu, \vartheta, 0)$ није колинеаран са $(1, 0, 0)$, тј. не постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $(\mu, \vartheta, 0) = \lambda \cdot (1, 0, 0) = (\lambda, 0, 0)$. Дакле, $\vartheta \neq 0$. Без умањења општости, нека је $\|(\mu, \vartheta, 0)\| = 1$, односно $\sqrt{\mu^2 + \vartheta^2 + 0^2} = \sqrt{\mu^2 + \vartheta^2} = 1$, тј. $\mu^2 + \vartheta^2 = 1$.



Означимо са $T(x, y, z)$ произвољну тачку простора која је једнако удаљена од правих p и q . Тада је $d(T, p) = d(T, q)$. Тачка $O(0, 0, 0)$ припада и правој p и правој q , па је $d(T, p) = \frac{\|\vec{OT} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|}$ и $d(T, q) = \frac{\|\vec{OT} \times \vec{\mu}_q\|}{\|\vec{\mu}_q\|}$.

$$\vec{OT} = [T] - [O] = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \quad \vec{\mu}_p = (1, 0, 0) \quad \vec{\mu}_q = (\mu, \vartheta, 0), \vartheta \neq 0$$

$$\vec{OT} \times \vec{\mu}_p = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ y & z \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (z\vec{e}_2 - y\vec{e}_3) = z\vec{e}_2 - y\vec{e}_3 = (0, z, -y)$$

$$\|\vec{OT} \times \vec{\mu}_p\| = \sqrt{0^2 + z^2 + (-y)^2} = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \|\vec{\mu}_p\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\vec{OT} \times \vec{\mu}_q = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z \\ \mu & \vartheta & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} y & z \\ \vartheta & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot \vec{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} x & z \\ \mu & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ \mu & \vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \cdot \vec{e}_1 (y \cdot 0 - \vartheta z) + (-1)^3 \cdot \vec{e}_2 (x \cdot 0 - \mu z) + (-1)^4 \cdot \vec{e}_3 (x\vartheta - y\mu) =$$

$$= (-\vartheta z, \mu z, x\vartheta - y\mu) \quad \|\vec{\mu}_q\| = \sqrt{\mu^2 + \vartheta^2 + 0^2} = \sqrt{\mu^2 + \vartheta^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\vec{OT} \times \vec{\mu}_q\| = \sqrt{(-\vartheta z)^2 + (\mu z)^2 + (x\vartheta - y\mu)^2} = \sqrt{\vartheta^2 z^2 + \mu^2 z^2 + (x\vartheta - y\mu)^2} =$$

$$= \sqrt{(\mu^2 + \vartheta^2) z^2 + (x\vartheta - y\mu)^2} = \sqrt{1 \cdot z^2 + (x\vartheta - y\mu)^2} = \sqrt{z^2 + (x\vartheta - y\mu)^2}$$

$$d(T, p) = d(T, q) \Leftrightarrow \frac{\|\vec{OT} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|} = \frac{\|\vec{OT} \times \vec{\mu}_q\|}{\|\vec{\mu}_q\|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{1} = \frac{\sqrt{z^2 + (x\vartheta - y\mu)^2}}{1} \Leftrightarrow y^2 + z^2 = z^2 + (x\vartheta - y\mu)^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = (x\vartheta - y\mu)^2 \Leftrightarrow y^2 - (x\vartheta - y\mu)^2 = 0 \Leftrightarrow (y - x\vartheta + y\mu)(y + x\vartheta - y\mu) = 0 \Leftrightarrow y - x\vartheta + y\mu = 0 \vee y + x\vartheta - y\mu = 0.$$

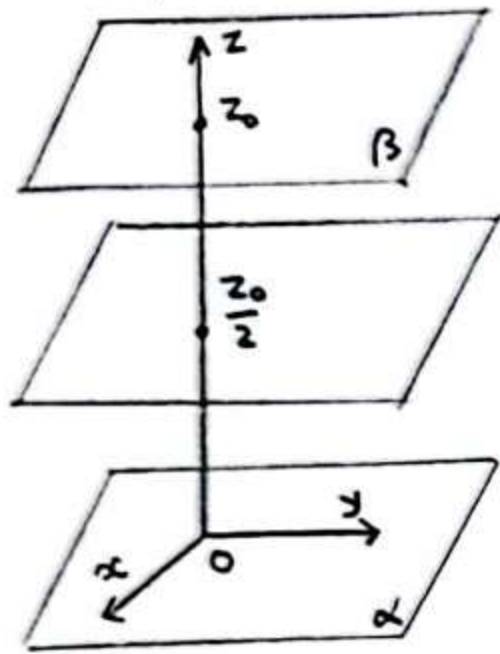
Другим речима, T је на једнаком растојању од правих p и q ако и само ако T припада равни $-ux + (1+m)y = 0$ или T припада равни $ux + (1-m)y = 0$, што значи да је тражено геометријско место тачака унија равни $-ux + (1+m)y = 0$ и равни $ux + (1-m)y = 0$. Обе равни садрже z -осу, јер свака тачка $(0, 0, z_0)$ са z -осе припада овим равнима, што значи да су оне нормалне на равни Oxy јер садрже z -осу која је нормална на раван Oxy .

Δ_1 - пресечна права равни $-ux + (1+m)y = 0$ и равни Oxy тј. $\Delta_1: \begin{matrix} ux = (1+m)y \\ z = 0 \end{matrix}$ тј. $\Delta_1: \frac{x}{1+m} = \frac{y}{u} = \frac{z}{0}$.

Δ_2 - пресечна права равни $ux + (1-m)y = 0$ и равни Oxy тј. $\Delta_2: \begin{matrix} ux = (m-1)y \\ z = 0 \end{matrix}$ тј. $\Delta_2: \frac{x}{m-1} = \frac{y}{u} = \frac{z}{0}$.

Вектор правца праве Δ_1 је $(1+m, u, 0) = (m, u, 0) + (1, 0, 0) = \vec{m}_q + \vec{m}_p$, а вектор правца праве Δ_2 је $(m-1, u, 0) = (m, u, 0) - (1, 0, 0) = \vec{m}_q - \vec{m}_p$. Како је $\|\vec{m}_p\| = 1 = \|\vec{m}_q\|$, то су $\vec{m}_p + \vec{m}_q$ и $\vec{m}_q - \vec{m}_p$ вектори правца симетрала углова који граде p и q . Важи и да пресечна тачка $O(0, 0, 0)$ правих p и q припада и Δ_1 и Δ_2 , те су Δ_1 и Δ_2 симетрале углова који граде p и q . Овим смо доказали да је тражено геометријско место тачака унија равни које садрже симетрале углова који граде p и q и нормалне су на равни која садржи p и q .

В) Нека су α и β две паралелне равни. Одаберимо Декартов правоугли координатни систем $Oxyz$ такав да је раван Oxy раван α . Тада раван α има једначину $z=0$, а раван β има једначину $z=z_0$.



Означимо са $T(x,y,z)$ произвољну тачку простора која је једнако удаљена од равни α и β .

Тада је $d(T, \alpha) = d(T, \beta)$.

$$\alpha: z=0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0$$

$$d(T, \alpha) = \frac{|0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|z|}{\sqrt{1}} = |z|$$

$$\beta: z=z_0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z - z_0 = 0$$

$$d(T, \beta) = \frac{|0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z - z_0|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|z - z_0|}{\sqrt{1}} = |z - z_0|$$

$$d(T, \alpha) = d(T, \beta) \Leftrightarrow |z| = |z - z_0| \Leftrightarrow |z|^2 = |z - z_0|^2 \Leftrightarrow z^2 = (z - z_0)^2 \Leftrightarrow z^2 = z^2 - 2z_0z + z_0^2 \Leftrightarrow 2z_0z - z_0^2 = 0.$$

1° случај $z_0 = 0$

$$d(T, \alpha) = d(T, \beta) \Leftrightarrow 2z_0z - z_0^2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 0 \cdot z - 0^2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow T$$

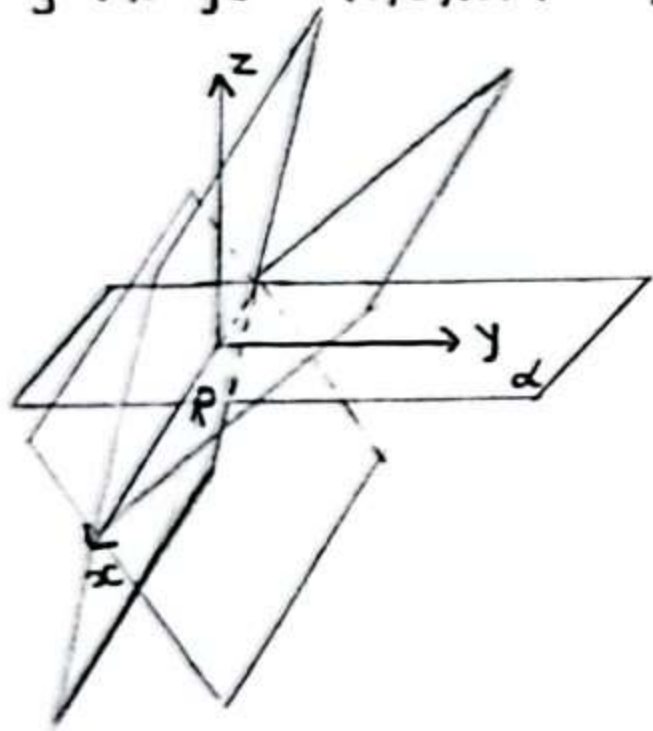
Свака тачка T простора је једнако удаљена од равни α и β , те је тражено геометријско место тачака цео простор.

2° случај $z_0 \neq 0$

$$d(T, \alpha) = d(T, \beta) \Leftrightarrow 2z_0z - z_0^2 = 0 \Leftrightarrow z_0(2z - z_0) = 0 \Leftrightarrow \underset{z_0 \neq 0}{\uparrow} 2z - z_0 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{z_0}{2}$$

Дакле, тражено геометријско место тачака које су једнако удаљене од равни $\alpha: z=0$ и $\beta: z=z_0$ је раван $z = \frac{z_0}{2}$. То је раван која садржи тачку $S(0,0, \frac{z_0}{2})$ на z -оси и паралелна је равнима α и β , а z -оса је заједничка нормала равни α и β . Приметимо да z -оса сече раван α у тачки $O(0,0,0)$, а раван β у тачки $B(0,0,z_0)$, а тачка $S(0,0, \frac{z_0}{2})$ је средиште дужи OB . Дакле, тражено геометријско место тачака је раван која садржи средиште дужи чији су крајеви пресечне тачке равни α и β и њихове заједничке нормале и та раван је паралелна равнима α и β .

г) Нека се равни α и β секу по правој p . Одаберимо Декартов правоугли координатни систем $Oxyz$ такав да је x -оса права p и да је раван Oxy раван α . Тада раван α има једначину $z=0$, а како раван β садржи праву p тј. x -осу, онда β садржи координатни почетак $O(0,0,0)$ (јер он припада x -оси) и њен вектор нормале (μ, ν, ω) мора бити нормалан на вектору правца x -осе, тј. на вектору $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$. Дакле, $0 = (\mu, \nu, \omega) \cdot (1, 0, 0) = \mu \cdot 1 + \nu \cdot 0 + \omega \cdot 0 = \mu$, односно $\mu = 0$. Приметимо да вектори нормале равни α и β не смеју бити колинеарни, зато што би се у супротном равни α и β поклапале јер имају заједничку праву p , те не би могле бити дисјунктне. Дакле, не сме да постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $(0, \nu, \omega) = \lambda \cdot (0, 0, 1) = (0, 0, \lambda)$, те следи да је $\nu \neq 0$. Једначина равни β која садржи координатни почетак и има вектор нормале $(0, \nu, \omega)$ је $0 \cdot (x-0) + \nu(y-0) + \omega(z-0) = 0$ тј. $\beta: \nu y + \omega z = 0$. Без умањења општости можемо претпоставити да је вектор нормале равни β норме 1, тј. да је $\|(0, \nu, \omega)\| = 1$, тј. $\sqrt{0^2 + \nu^2 + \omega^2} = 1$, тј. $\nu^2 + \omega^2 = 1$.



Означимо са T произвољну тачку простора која је једнако удаљена од равни α и β , односно $d(T, \alpha) = d(T, \beta)$.

$$\alpha: z = 0$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0$$

$$d(T, \alpha) = \frac{|0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|z|}{\sqrt{1}} = |z|$$

$$\beta: 0 \cdot x + \nu \cdot y + \omega \cdot z = 0 \quad d(T, \beta) = \frac{|0 \cdot x + \nu \cdot y + \omega \cdot z|}{\sqrt{0^2 + \nu^2 + \omega^2}} = \frac{|\nu y + \omega z|}{\sqrt{\nu^2 + \omega^2}} = \frac{|\nu y + \omega z|}{1} = |\nu y + \omega z|$$

$$d(T, \alpha) = d(T, \beta) \Leftrightarrow |z| = |\nu y + \omega z| \Leftrightarrow z = \nu y + \omega z \text{ или } z = -\nu y - \omega z$$

$$\Leftrightarrow \nu y + (\omega - 1)z = 0 \text{ или } \nu y + (\omega + 1)z = 0$$

Дакле, тачка T је на једнаком растојању од равни α и β ако и само ако T припада равни $\nu y + (\omega - 1)z = 0$ или равни $\nu y + (\omega + 1)z = 0$, те је тражено геометријско место тачака унија равни $\nu y + (\omega - 1)z = 0$ и равни $\nu y + (\omega + 1)z = 0$.

По услову задатка, равни α и β се секу по правој p и граде четири диедра. Симетрална раван диедра је раван која садржи праву p и заклапа исте углове с равнима α и β . Докажимо да су равни које представљају тражено геометријско место тачака симетралне равни парова унакрсних диедара које заклапају α и β . Обележимо $\zeta_1: \vartheta y + (w-1)z = 0$ и $\zeta_2: \vartheta y + (w+1)z = 0$. Обе равни садрже праву p , тј. x -осу јер свака тачка $(x_0, 0, 0)$ са x -осе припада и ζ_1 и ζ_2 . $\|\vec{n}_{\zeta_1}\| = \sqrt{0^2 + \vartheta^2 + (w-1)^2} = \sqrt{\vartheta^2 + (w-1)^2} \neq 0$ јер је $\vartheta \neq 0$

$$\cos \angle(\zeta_1, \alpha) = \frac{|\vec{n}_{\zeta_1} \cdot \vec{n}_\alpha|}{\|\vec{n}_{\zeta_1}\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\|} = \frac{|(0, \vartheta, w-1) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{0^2 + \vartheta^2 + (w-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 0 + w-1|}{\sqrt{\vartheta^2 + w^2 - 2w + 1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{|w-1|}{\sqrt{2-2w}}$$

$$\cos \angle(\zeta_1, \beta) = \frac{|\vec{n}_{\zeta_1} \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_{\zeta_1}\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{|(0, \vartheta, w-1) \cdot (0, \vartheta, w)|}{\sqrt{0^2 + \vartheta^2 + (w-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + \vartheta^2 + w^2}} = \frac{|0 + \vartheta^2 + (w-1) \cdot w|}{\sqrt{\vartheta^2 + w^2 - 2w + 1} \cdot \sqrt{\vartheta^2 + w^2}} = \frac{|\vartheta^2 + w^2 - w|}{\sqrt{2-2w} \cdot \sqrt{1}} = \frac{|1-w|}{\sqrt{2-2w}}$$

$$\Rightarrow \cos \angle(\zeta_1, \alpha) = \cos \angle(\zeta_1, \beta) \Rightarrow \angle(\zeta_1, \alpha) = \angle(\zeta_1, \beta)$$

Дакле, ζ_1 је симетрална раван једног од парова унакрсних диедара које заклапају α и β .

$$\cos \angle(\zeta_2, \alpha) = \frac{|\vec{n}_{\zeta_2} \cdot \vec{n}_\alpha|}{\|\vec{n}_{\zeta_2}\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\|} = \frac{|(0, \vartheta, w+1) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{0^2 + \vartheta^2 + (w+1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 0 + w+1|}{\sqrt{\vartheta^2 + (w+1)^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{|w+1|}{\sqrt{\vartheta^2 + w^2 + 2w + 1}} = \frac{|w+1|}{\sqrt{2+2w}}$$

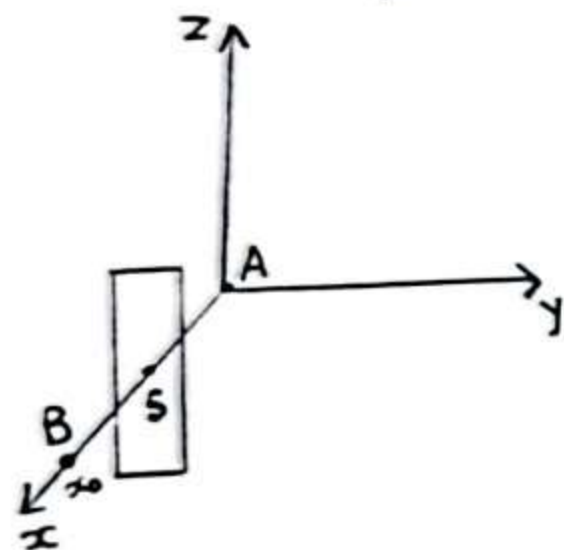
$$\cos \angle(\zeta_2, \beta) = \frac{|\vec{n}_{\zeta_2} \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_{\zeta_2}\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{|(0, \vartheta, w+1) \cdot (0, \vartheta, w)|}{\sqrt{0^2 + \vartheta^2 + (w+1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + \vartheta^2 + w^2}} = \frac{|0 + \vartheta^2 + (w+1)w|}{\sqrt{\vartheta^2 + w^2 + 2w + 1} \cdot \sqrt{\vartheta^2 + w^2}} = \frac{|\vartheta^2 + w^2 + w|}{\sqrt{2+2w}} = \frac{|1+w|}{\sqrt{2+2w}}$$

$$\Rightarrow \cos \angle(\zeta_2, \alpha) = \cos \angle(\zeta_2, \beta) \Rightarrow \angle(\zeta_2, \alpha) = \angle(\zeta_2, \beta).$$

Дакле, ζ_2 је симетрална раван другог пара унакрсних диедара које заклапају α и β . Зато је тражено геометријско место тачака унија симетралних равни парова унакрсних диедара које заклапају равни α и β .

7.6. Шта је геометријско место тачака простора које су једнако удаљене од: а) две тачке; б) тачке и праве; в) тачке и равни; г) две мимоилазне праве?

Решење: а) Означимо са A и B две тачке. Одаберимо Декартов правоугли координатни систем $Axyz$ такав да је A координатни почетак и да тачка B припада x -оси. Тада тачка A има координате $A(0,0,0)$, а тачка B има координате $B(x_0,0,0)$.



Означимо са $T(x,y,z)$ произвољну тачку простора која је једнако удаљена од тачака A и B , односно $d(T,A)=d(T,B)$.

$$d(T,A) = \|\vec{AT}\| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$d(T,B) = \|\vec{BT}\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}$$

$$d(T,A) = d(T,B) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (x-x_0)^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 \Leftrightarrow 2xx_0 - x_0^2 = 0$$

1^о случај $x_0 = 0$

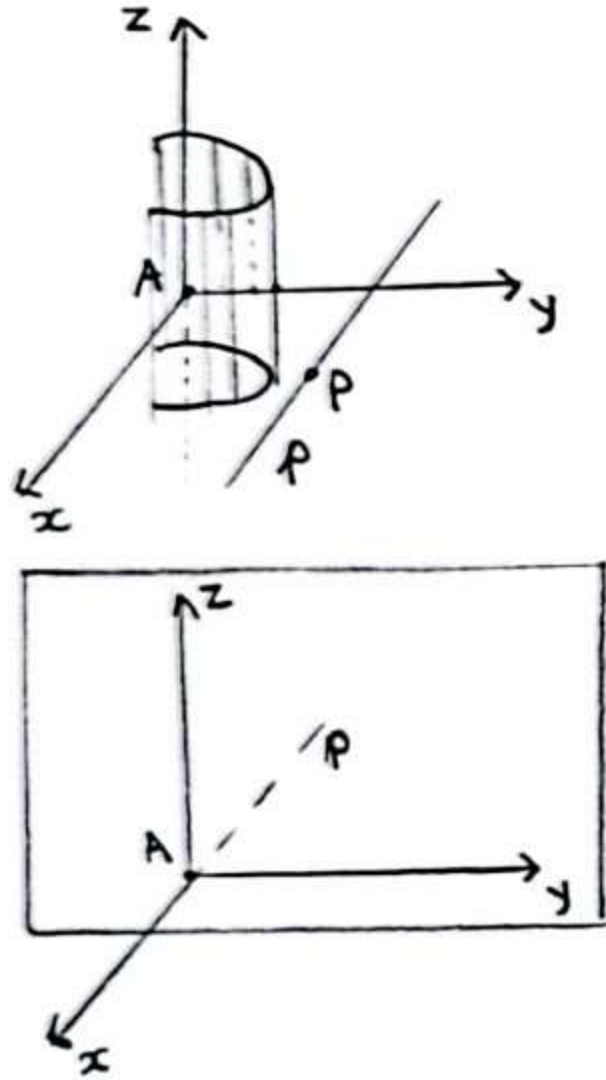
Тада би тачка B имала координате $(0,0,0)$, те би се B поклапало са A . Онда би свака тачка T простора била на истом растојању од тачака A и B , односно тражено геометријско место тачака је цео простор.

2^о случај $x_0 \neq 0$

$$d(T,A) = d(T,B) \Leftrightarrow 2xx_0 - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0(2x - x_0) = 0 \Leftrightarrow \underset{x_0 \neq 0}{\uparrow} 2x - x_0 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{x_0}{2}$$

Тражено геометријско место тачака је раван $x = \frac{x_0}{2}$. Та раван садржи тачку $S(\frac{x_0}{2}, 0, 0)$ која је средиште дужи AB , а како је та раван нормална на x -оси, нормална је и на дужи AB . Дакле, тражено геометријско место тачака је раван која садржи средиште дужи AB и нормална је на AB , тј. у питању је симетрална раван дужи AB .

б) Нека је A тачка и p права. Одaberимо Декартов правоугли координатни систем $Axyz$ такав да је A координатни почетак, а да права p припада равни Axy и да је паралелна са x -осом. Тада тачка A има координате $A(0,0,0)$, а права p садржи неку тачку $P(x_0, y_0, 0)$ у равни Axy и има вектор правца $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, те је њена једначина $p: \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-0}{0}$.



Означимо са $T(x, y, z)$ произвољну тачку простора која је једнако удаљена од тачке A и праве p , односно $d(T, A) = d(T, p)$.

$$d(T, A) = \|\vec{AT}\| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$d(T, p) = \frac{\|\vec{PT} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|}$$

$$\vec{PT} = [T] - [P] = (x, y, z) - (x_0, y_0, 0) = (x - x_0, y - y_0, z)$$

$$\vec{PT} \times \vec{\mu}_p = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x-x_0 & y-y_0 & z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ y-y_0 & z \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (z\vec{e}_2 - (y-y_0)\vec{e}_3) = z\vec{e}_2 - (y-y_0)\vec{e}_3 =$$

$$= (0, z, y_0 - y)$$

$$\|\vec{PT} \times \vec{\mu}_p\| = \sqrt{0^2 + z^2 + (y_0 - y)^2} \quad \|\vec{\mu}_p\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$d(T, p) = \frac{\|\vec{PT} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|} = \frac{\sqrt{z^2 + (y_0 - y)^2}}{1} = \sqrt{z^2 + (y_0 - y)^2}$$

$$d(T, A) = d(T, p) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + (y_0 - y)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \cancel{z^2} = \cancel{z^2} + (y_0 - y)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = y_0^2 - 2y_0y + y^2 \Leftrightarrow x^2 = -2y_0(y - \frac{y_0}{2})$$

1° случај $y_0 = 0$

Тада тачка $P(x_0, y_0, 0)$ има координате $(x_0, 0, 0)$, те припада x -оси. Како је права p паралелна x -оси, следи да права p јесте x -оса, а тачка $A(0, 0, 0)$ припада x -оси. Тада је произвољна тачка $T(x, y, z)$ једнако удаљена од тачке A и од праве p ако и само ако је $x^2 = 0$ тј. $x = 0$, те је тражено геометријско место тачака раван $x = 0$, тј. раван Oyz , што је раван која садржи тачку A и нормална је на правој p .

2° случај $y_0 \neq 0$

$$p: \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-0}{0} = t \Rightarrow x-x_0=t, y-y_0=0, z-0=0$$

$A(0,0,0) \notin p$ јер је њена друга координата једнака 0, а y -координата сваке тачке праве p је једнака y_0 , што је различито од нуле. Произвољна тачка $T(x,y,z)$ је једнако удаљена од тачке A и од праве p ако и само ако је $x^2 = -2y_0(y - \frac{y_0}{2})$. Уведимо нови координатни Декартов правоугли систем $Ox'y'z'$ такав да је $y'=x$, $x'=-y+\frac{y_0}{2}$, $z'=z$, тј. $x=y'$, $y=-x'+\frac{y_0}{2}$, $z=z'$, онда је тражено геометријско место тачака површ $y'^2 = 2y_0x'$. Из теорије о класификацији површи другог реда знамо да је $y'^2 = 2y_0x'$ канонска једначина параболичног цилиндра (у свакој равни $z'=z'_1$ имамо параболу $y'^2 = 2y_0x'$, $z'=z'_1$, те за произвољну тачку $(x'_1, y'_1, 0)$ с параболе $y'^2 = 2y_0x'$, $z'=0$ читава права $\frac{x'-x'_1}{0} = \frac{y'-y'_1}{0} = \frac{z'-0}{1}$ која је паралелна z' -оси, припада површи $y'^2 = 2y_0x'$, што значи да су изводнице овог цилиндра паралелне z' -оси, а генератриса је нпр. парабола $y'^2 = 2y_0x'$, $z'=0$).

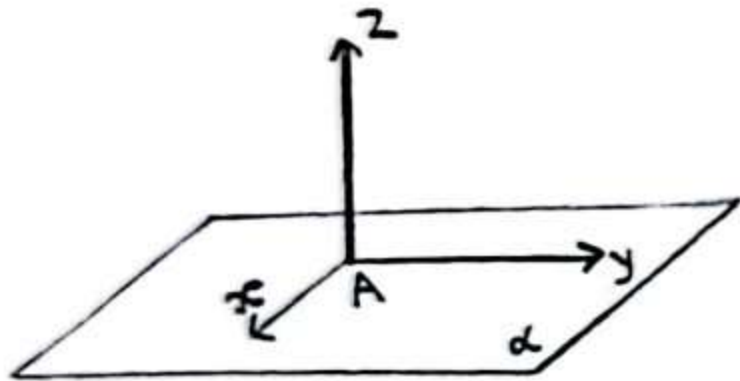
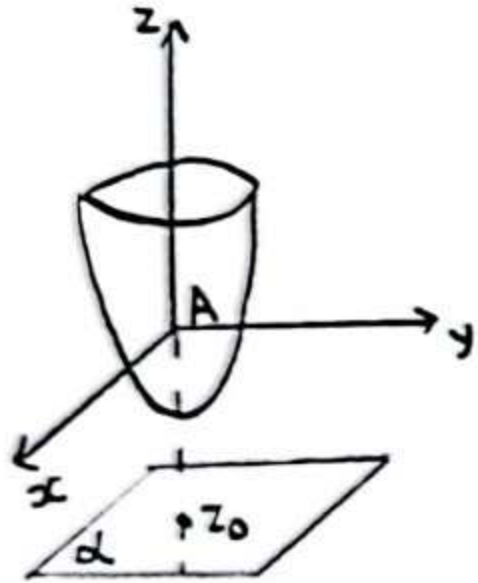
У равни $z'=0$, тј. $z=0$ у којој се налазе тачка A и права p , имамо параболу $y'^2 = 2y_0x'$, $z'=0$, па је у $Ox'y'z'$ координатама $F(\frac{y_0}{2}, 0, 0)$ њена жижа, а $d: x' = -\frac{y_0}{2}$, $z'=0$ њена директриса.

У $Axyz$ координатном систему је F дато помоћу координата $x=y'=0$, $y=-x'+\frac{y_0}{2} = -\frac{y_0}{2} + \frac{y_0}{2} = 0$ и $z=z'=0$, тј. F има координате $(0,0,0)$, а за директрису d важи $-y+\frac{y_0}{2} = -\frac{y_0}{2}$, $z=0$ тј. $y=y_0$, $z=0$.

Приметимо да је жижа те параболе заправо тачка A , а директриса те параболе је права p .

Дакле, тражено геометријско место тачака је цилиндар генерисан параболом у равни, која је одређена тачком A и правом p , при чему је A жижа те параболе, а p директриса, а изводнице цилиндра су нормалне на равни те параболе.

В) Нека је A тачка и α равн. Одaberимо Декартов правоугли координатни систем $Axyz$ са координатним почетком A и да је равн α паралелна равни Axy . Тада тачка A има координате $A(0,0,0)$ и равн α има једначину $z = z_0$.



Нека је $T(x,y,z)$ произвољна тачка простора која је једнако удаљена од тачке A и равни α , односно $d(T,A) = d(T,\alpha)$.

$$d(T,A) = \|\vec{AT}\| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\alpha: 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z - z_0 = 0$$

$$d(T,\alpha) = \frac{|0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z - z_0|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|z - z_0|}{\sqrt{1}} = |z - z_0|$$

$$d(T,A) = d(T,\alpha) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |z - z_0| \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (z - z_0)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \cancel{z^2} = \cancel{z^2} - 2zz_0 + z_0^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = -2z_0(z - \frac{z_0}{2})$$

1° случај $z_0 = 0$

$\alpha: z = 0$ тј. равн Axy , те тачка A припада равни α .

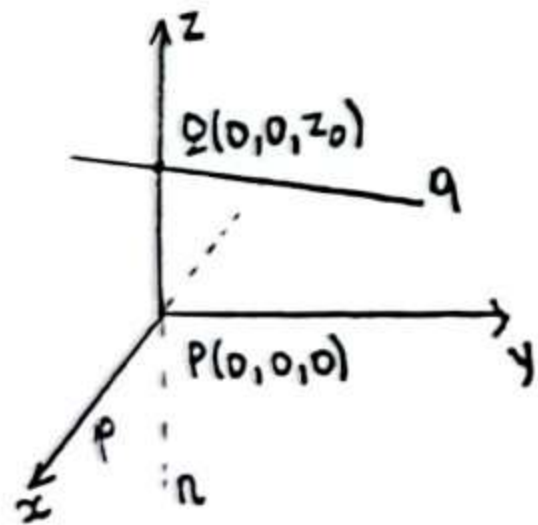
Тада је $T(x,y,z)$ једнако удаљена од тачке A и равни α ако и само ако је $x^2 + y^2 = 0$, тј. $x = 0$ и $y = 0$, односно ако и само ако T припада z -оси.

2° случај $z_0 \neq 0$

Уведимо нови Декартов правоугли координатни систем $Ox'y'z'$ такав да је $x' = x$, $y' = y$ и $z' = -z + \frac{z_0}{2}$, тј. $x = x'$, $y = y'$ и $z = -z' + \frac{z_0}{2}$. Тада је тачка $T(x',y',z')$ једнако удаљена од тачке A и равни α ако и само ако је $x'^2 + y'^2 = 2z_0z'$.

Из теорије о класификацији површи следи да је $x'^2 + y'^2 = 2z_0z'$ канонска једначина (елиптичког) параболоида, те је тражено геометријско место тачака је параболоид.

г) Нека су p и q две мимолазне праве. Тада постоји њихова јединствена заједничка нормала n , тј. права која сече праву p у тачки P , праву q у тачки Q и нормална је и на p и на q . Одаберимо Декартов правоугли координатни систем $Pxyz$ такав да је његов координатни почетак тачка P , његова x -оса права p и његова z -оса права n . Тада тачка P има координате $P(0,0,0)$, права p једначину $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$, тачка Q координате $Q(0,0,z_0)$ јер је Q пресечна тачка правих q и n , па припада правој n , тј. z -оси, а како је n нормална на q , то вектор правца $\vec{\mu}_q = (\mu, \nu, \omega)$ задовољава $0 = \vec{\mu}_q \cdot \vec{e}_3 = (\mu, \nu, \omega) \cdot (0, 0, 1) = 0 + 0 + \omega = \omega$, тј. $\omega = 0$. Такође, $\vec{\mu}_q$ није колинеаран с $\vec{\mu}_p$, те не постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $\vec{\mu}_q = \lambda \vec{\mu}_p$, тј. $(\mu, \nu, 0) = \lambda \cdot (1, 0, 0)$, те следи да је $\nu \neq 0$. Тачке P и Q се разликују, јер би се у супротном праве p и q секле, а оне су по услову задатка мимолазне. Зато је $z_0 \neq 0$. Без умањења општости је $\|\vec{\mu}_q\| = 1$.



Означимо са $T(x, y, z)$ произвољну тачку простора која је једнако удаљена од правих p и q , односно $d(T, p) = d(T, q)$.

$$d(T, p) = \frac{\|\vec{PT} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|}$$

$$\vec{PT} = [T] - [P] = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \quad \vec{\mu}_p = (1, 0, 0)$$

$$\vec{PT} \times \vec{\mu}_p = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ y & z \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot 1 \cdot (z\vec{e}_2 - y\vec{e}_3) = (0, z, -y)$$

$$\|\vec{PT} \times \vec{\mu}_p\| = \sqrt{0^2 + z^2 + (-y)^2} = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \|\vec{\mu}_p\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$d(T, p) = \frac{\|\vec{PT} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|} = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{1} = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$d(T, q) = \frac{\|\vec{QT} \times \vec{\mu}_q\|}{\|\vec{\mu}_q\|}$$

$$\vec{QT} = [T] - [Q] = (x, y, z) - (0, 0, z_0) = (x, y, z - z_0)$$

$$\vec{QT} \times \vec{\mu}_q = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z - z_0 \\ \mu & \nu & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} y & z - z_0 \\ \nu & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} x & z - z_0 \\ \mu & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ \mu & \nu \end{vmatrix} \vec{e}_3 =$$

$$= (-1)^2 \cdot (-\vartheta(z-z_0)) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (x \cdot 0 - \mu(z-z_0)) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (x\vartheta - \mu y) \vec{e}_3 = -\vartheta(z-z_0) \vec{e}_1 + \mu(z-z_0) \vec{e}_2 + (x\vartheta - \mu y) \vec{e}_3 =$$

$$= (-\vartheta(z-z_0), \mu(z-z_0), \vartheta x - \mu y)$$

$$\|\vec{Q}_T \times \vec{\mu}_q\| = \sqrt{(-\vartheta(z-z_0))^2 + (\mu(z-z_0))^2 + (\vartheta x - \mu y)^2} = \sqrt{\vartheta^2(z-z_0)^2 + \mu^2(z-z_0)^2 + (\vartheta x - \mu y)^2} = \sqrt{\underbrace{(\mu^2 + \vartheta^2)}_1 (z-z_0)^2 + (\vartheta x - \mu y)^2}$$

$$= \sqrt{(z-z_0)^2 + (\vartheta x - \mu y)^2}$$

$$d(\tau, q) = \frac{\|\vec{Q}_T \times \vec{\mu}_q\|}{\|\vec{\mu}_q\|} = \frac{\sqrt{(z-z_0)^2 + (\vartheta x - \mu y)^2}}{1} = \sqrt{(z-z_0)^2 + (\vartheta x - \mu y)^2}$$

$$d(\tau, p) = d(\tau, q) \Leftrightarrow \frac{\|\vec{P}_T \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|} = \frac{\|\vec{Q}_T \times \vec{\mu}_q\|}{\|\vec{\mu}_q\|} \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{(z-z_0)^2 + (\vartheta x - \mu y)^2} \Leftrightarrow$$

$$y^2 + z^2 = (z-z_0)^2 + (\vartheta x - \mu y)^2 \Leftrightarrow y^2 + z^2 = z^2 - 2z_0 z + z_0^2 + \vartheta^2 x^2 - 2\mu\vartheta xy + \mu^2 y^2 \Leftrightarrow$$

$$2z_0 z - z_0^2 = \vartheta^2 x^2 - 2\mu\vartheta xy + (\mu^2 - 1)y^2 \Leftrightarrow 2z_0 \left(z - \frac{z_0}{2}\right) = \vartheta^2 x^2 - 2\mu\vartheta xy - \vartheta^2 y^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \mu^2 + \vartheta^2 = 1 \\ \mu^2 - 1 = -\vartheta^2 \end{array}$$

$$2z_0 \left(z - \frac{z_0}{2}\right) = \vartheta^2 (x^2 - 2\frac{\mu}{\vartheta} xy - y^2)$$

1° случај $\mu=0$

$$\mu^2 + \vartheta^2 = 1 \rightarrow \vartheta^2 = 1$$

$$d(\tau, p) = d(\tau, q) \Leftrightarrow 2z_0 \left(z - \frac{z_0}{2}\right) = x^2 - y^2$$

Дакле, тражено геометријско место тачака је површ $2z_0 \left(z - \frac{z_0}{2}\right) = x^2 - y^2$. Увођењем новог координатног система $O'x'y'z'$ таквог да је $x'=x$, $y'=y$ и $z'=z - \frac{z_0}{2}$, тј. $x=x'$, $y=y'$, $z=z'+\frac{z_0}{2}$ добијамо да та површ има једначину $x'^2 - y'^2 = 2z_0 z'$, а из теорије класификације површи другог реда препознајемо да је у питању хиперболички параболоид (седло).

2° $\mu \neq 0$

$$d(\tau, \rho) = d(\tau, q) \Leftrightarrow 2z_0(z - \frac{z_0}{2}) = \vartheta^2(x^2 - 2\frac{\mu}{\vartheta}xy - y^2)$$

Желимо да из израза $x^2 - 2\frac{\mu}{\vartheta}xy - y^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mu}{\vartheta} \\ -\frac{\mu}{\vartheta} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ елиминишемо члан xy , тј. уведемо нове координате $(x' \ y')$ такве да је $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ (R је нека ортогонална матрица) и да израз $(x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mu}{\vartheta} \\ -\frac{\mu}{\vartheta} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x' \ y') R^T \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mu}{\vartheta} \\ -\frac{\mu}{\vartheta} & -1 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ нема члан $x'y'$, тј. да је $R^T \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mu}{\vartheta} \\ -\frac{\mu}{\vartheta} & -1 \end{pmatrix} R$ дијагонална матрица. Ово је поступак дијагонализације из Линеарне алгебре.

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mu}{\vartheta} \\ -\frac{\mu}{\vartheta} & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{\mu}{\vartheta} \\ -\frac{\mu}{\vartheta} & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - \left(-\frac{\mu}{\vartheta}\right) \cdot \left(-\frac{\mu}{\vartheta}\right) = -(1-\lambda)(1+\lambda) - \frac{\mu^2}{\vartheta^2} =$$

$$= -(1-\lambda^2) - \frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \lambda^2 - 1 - \frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \lambda^2 - \frac{\vartheta^2 + \mu^2}{\vartheta^2} = \lambda^2 - \frac{1}{\vartheta^2} = \left(\lambda - \frac{1}{\vartheta}\right) \left(\lambda + \frac{1}{\vartheta}\right)$$

Сопствене вредности су решења једначине $\left(\lambda - \frac{1}{\vartheta}\right) \left(\lambda + \frac{1}{\vartheta}\right) = 0$, тј. $\lambda = \frac{1}{\vartheta}$ и $\lambda = -\frac{1}{\vartheta}$.

1) $\lambda = \frac{1}{\vartheta}$

Сопствени вектори су вектори $(a, b) \neq (0, 0)$ такви да је $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mu}{\vartheta} \\ -\frac{\mu}{\vartheta} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\vartheta} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mu}{\vartheta} \\ -\frac{\mu}{\vartheta} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\vartheta} \\ \frac{b}{\vartheta} \end{pmatrix}$$

$$a - \frac{\mu}{\vartheta}b = \frac{a}{\vartheta} \quad | \cdot \vartheta \neq 0$$

$$-\frac{\mu}{\vartheta}a - b = \frac{b}{\vartheta} \quad | \cdot \vartheta \neq 0$$

$$\vartheta a - \mu b = a$$

$$-\mu a - \vartheta b = b$$

$$\vartheta a - \mu b = 0 \quad | \cdot \left(-\frac{\vartheta+1}{\mu}\right) \quad \mu \neq 0$$

$$-\mu a - (\vartheta+1)b = 0 \quad \leftarrow +$$

$$\vartheta a - \mu b = 0$$

$$-\frac{(\vartheta-1)(\vartheta+1)}{\mu}a - \mu a - (\vartheta+1)b + (\vartheta+1)b = 0$$

$$\begin{aligned} (\vartheta-1)a - \mu b &= 0 \\ -\frac{\vartheta^2-1}{\mu}a - \frac{\mu^2}{\mu}a &= 0 \quad | \cdot (-\mu) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\vartheta a - \mu b = 0$$

$$(\vartheta^2-1)a + \mu^2 a = 0$$

$$\vartheta a - \mu b = 0$$

$$(\underbrace{\mu^2 + \vartheta^2 - 1}_1)a = 0$$

$$\vartheta a - \mu b = 0$$

$$0=0$$

$$\Rightarrow b = \frac{\vartheta-1}{\mu}a$$

Сопствени вектори су $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \frac{\vartheta-1}{\mu}a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$.

$$2) \lambda = -\frac{1}{\vartheta}$$

Сопствени вектори су вектори $(a, b) \neq (0, 0)$ такви да је $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mu}{\vartheta} \\ -\frac{\mu}{\vartheta} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{1}{\vartheta} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mu}{\vartheta} \\ -\frac{\mu}{\vartheta} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{1}{\vartheta} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a - \frac{\mu}{\vartheta} b \\ -\frac{\mu}{\vartheta} a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\vartheta} \\ -\frac{b}{\vartheta} \end{pmatrix}$$

$$a - \frac{\mu}{\vartheta} b = -\frac{a}{\vartheta} \quad | \cdot \vartheta \neq 0$$

$$-\frac{\mu}{\vartheta} a - b = -\frac{b}{\vartheta} \quad | \cdot \vartheta \neq 0$$

$$\vartheta a - \mu b = -a$$

$$-\mu a - \vartheta b = -b$$

$$(\vartheta + 1)a - \mu b = 0$$

$$-\mu a - (\vartheta - 1)b = 0$$

$$-\mu a - (\vartheta - 1)b = 0 \quad | \cdot \frac{\vartheta + 1}{\mu} \quad \mu \neq 0$$

$$(\vartheta + 1)a - \mu b = 0$$

$$-\mu a - (\vartheta - 1)b = 0$$

$$-\frac{(\vartheta - 1)(\vartheta + 1)}{\mu} b - \mu b = 0$$

$$-\mu a - (\vartheta - 1)b = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$-\frac{\vartheta^2 - 1}{\mu} b - \mu b = 0 \quad | \cdot (-\mu) \quad \mu \neq 0$$

$$\mu a + (\vartheta - 1)b = 0$$

$$(\vartheta^2 - 1 + \mu^2)b = 0$$

$$\mu^2 + \vartheta^2 = 1$$

$$\mu a + (\vartheta - 1)b = 0$$

$$(1 - 1)b = 0$$

$$\mu a + (\vartheta - 1)b = 0$$

$$0 = 0$$

$$a = -\frac{\vartheta - 1}{\mu} b$$

Сопствени вектори су $\begin{pmatrix} -\frac{\vartheta - 1}{\mu} b \\ b \end{pmatrix}, b \neq 0$.

Желимо јединичне векторе, тј. векторе норме 1.

$$\| (a, \frac{v-1}{u} a) \| = \sqrt{a^2 + (\frac{v-1}{u})^2 a^2} = \sqrt{a^2 (1 + (\frac{v-1}{u})^2)} = |a| \cdot \sqrt{1 + (\frac{v-1}{u})^2} = |a| \cdot \sqrt{1 + \frac{v^2 - 2v + 1}{u^2}} = |a| \cdot \sqrt{\frac{u^2 + v^2 - 2v + 1}{u^2}} =$$

$$= |a| \cdot \frac{\sqrt{2-2v}}{|u|}$$

Да би норма била 1, мора бити $|a| = \frac{|u|}{\sqrt{2-2v}}$, те можемо узети нпр. $a = \frac{u}{\sqrt{2-2v}}$ (при томе, како је $2-2v = u^2 + v^2 - 2v + 1 = u^2 + (v-1)^2$ и $u \neq 0$, то је $2-2v > 0$). Добијамо сопствени вектор $\begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{2-2v}} \\ \frac{v-1}{u} \cdot \frac{u}{\sqrt{2-2v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{2-2v}} \\ \frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} \end{pmatrix}$, а матрица R је $R = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{2-2v}} & -\frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} \\ \frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} & \frac{u}{\sqrt{2-2v}} \end{pmatrix}$.

Како је $u^2 + v^2 = 1$ $RR^T = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{2-2v}} & -\frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} \\ \frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} & \frac{u}{\sqrt{2-2v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{2-2v}} & \frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} \\ -\frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} & \frac{u}{\sqrt{2-2v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2-2v} + \frac{(v-1)^2}{2-2v} & \frac{u(v-1)}{2-2v} - \frac{u(v-1)}{2-2v} \\ \frac{u(v-1)}{2-2v} - \frac{u(v-1)}{2-2v} & \frac{(v-1)^2}{2-2v} + \frac{u^2}{2-2v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^2 + v^2 - 2v + 1}{2-2v} & 0 \\ 0 & \frac{v^2 - 2v + 1 + u^2}{2-2v} \end{pmatrix} =$

$$\downarrow = \begin{pmatrix} \frac{2-2v}{2-2v} & 0 \\ 0 & \frac{2-2v}{2-2v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \text{ то је } RR^T = E, \text{ а } R^T R = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{2-2v}} & \frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} \\ -\frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} & \frac{u}{\sqrt{2-2v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{2-2v}} & -\frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} \\ \frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} & \frac{u}{\sqrt{2-2v}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2-2v} + \frac{(v-1)^2}{2-2v} & -\frac{u(v-1)}{2-2v} + \frac{u(v-1)}{2-2v} \\ -\frac{u(v-1)}{2-2v} + \frac{u(v-1)}{2-2v} & \frac{(v-1)^2}{2-2v} + \frac{u^2}{2-2v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^2 + v^2 - 2v + 1}{2-2v} & 0 \\ 0 & \frac{v^2 - 2v + 1 + u^2}{2-2v} \end{pmatrix} \stackrel{u^2 + v^2 = 1}{=} \begin{pmatrix} \frac{2-2v}{2-2v} & 0 \\ 0 & \frac{2-2v}{2-2v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

те је R ортогонална матрица и можемо увести Декартов правоугли координатни систем $Ox'y'z'$ такв

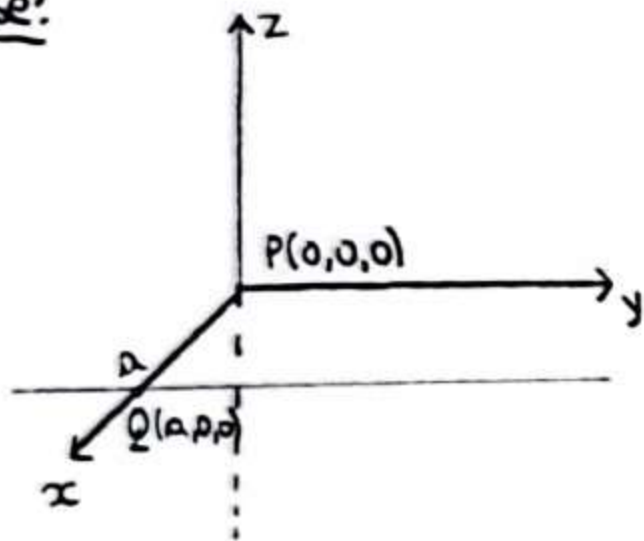
да је $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{2-2v}} & -\frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} \\ \frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} & \frac{u}{\sqrt{2-2v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{2-2v}} x' - \frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} y' \\ \frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} x' + \frac{u}{\sqrt{2-2v}} y' \end{pmatrix}$ и $z' = z - \frac{z_0}{2}$, тј. формуле трансформације су

$$x = \frac{u}{\sqrt{2-2v}} x' - \frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} y', \quad y = \frac{v-1}{\sqrt{2-2v}} x' + \frac{u}{\sqrt{2-2v}} y', \quad z' = z - \frac{z_0}{2}.$$

У овом координатном систему је $x^2 - 2\frac{u}{v}xy - y^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{u}{v} \\ -\frac{u}{v} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x' \ y') R^T \begin{pmatrix} 1 & -\frac{u}{v} \\ -\frac{u}{v} & -1 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, а
 $R^T \begin{pmatrix} 1 & -\frac{u}{v} \\ -\frac{u}{v} & -1 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{v} \end{pmatrix}$, те је $x^2 - 2\frac{u}{v}xy - y^2 = \frac{1}{v}x'^2 - \frac{1}{v}y'^2$. Дакле, тражено геометријско место тачака
 које су једнако удаљене од мимоилазних правих p и q је површ $2z_0 z' = v^2 \left(\frac{1}{v}x'^2 - \frac{1}{v}y'^2 \right)$, тј.
 $v x'^2 - v y'^2 = 2z_0 z'$. Из класификације површи другог реда знамо да је то хиперболички параболоид
 (седло).

7.7. Одредити једначину геометријског места тачака које су једнако удаљене од мимоилазних правих $p: x=0, y=0$ и $q: z=0, x=a$. Свести површ на канонски облик. О којој се површи ради?

Решење:



Како су праве $p: x=0, y=0$ и $q: z=0, x=a$ мимоилазне, то не постоји њихова пресечна тачка, тј. систем $x_0=0, y_0=0, z_0=0, x_0=a$ нема решења где је (x_0, y_0) та пресечна тачка. Зато мора бити $a \neq 0$.

Нека је $T(x, y, z)$ произвољна тачка простора која је једнако удаљена од правих p и q . Тада је $d(T, p) = d(T, q)$. Права p има једначину $x=0, y=0$, па је $z=\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ и једначина у канонском облику гласи $p: \frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{1} = \lambda$, а права q има једначину $z=0, x=a$, па је $y=\mu, \mu \in \mathbb{R}$ и једначина у канонском облику гласи $q: \frac{x-a}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0} = \mu$.

Тада p садржи тачку $P(0,0,0)$ и има вектор правца $\vec{\mu}_p = (0,0,1)$, а q садржи тачку $Q(a,0,0)$ и има вектор правца $\vec{\mu}_q = (0,1,0)$.

$$d(T, p) = \frac{\|\vec{PT} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|}$$

$$\vec{PT} = [T] - [P] = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \quad \vec{\mu}_p = (0, 0, 1) \Rightarrow \|\vec{\mu}_p\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\vec{PT} \times \vec{\mu}_p = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ y & z \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \\ x & z \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ x & y \end{vmatrix} = y\vec{e}_1 - x\vec{e}_2 = (y, -x, 0)$$

$$\|\vec{PT} \times \vec{\mu}_p\| = \sqrt{y^2 + (-x)^2 + 0^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow d(T, p) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d(T, q) = \frac{\|\vec{QT} \times \vec{\mu}_q\|}{\|\vec{\mu}_q\|}$$

$$\vec{QT} = [T] - [Q] = (x, y, z) - (a, 0, 0) = (x-a, y, z) \quad \vec{\mu}_q = (0, 1, 0) \Rightarrow \|\vec{\mu}_q\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\vec{QT} \times \vec{\mu}_q = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x-a & y & z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ y & z \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \\ x-a & z \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ x-a & y \end{vmatrix} = -(z\vec{e}_1 - (x-a)\vec{e}_3) = -z\vec{e}_1 + (x-a)\vec{e}_3$$

$$\|\vec{QT} \times \vec{\mu}_q\| = \sqrt{(-z)^2 + (x-a)^2} = \sqrt{z^2 + (x-a)^2} \Rightarrow d(T, q) = \frac{\sqrt{z^2 + (x-a)^2}}{1} = \sqrt{z^2 + (x-a)^2}$$

$$d(p, r) = d(p, q) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z^2 + (x-a)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 + (x-a)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} + y^2 = z^2 + \cancel{x^2} - 2xa + a^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = z^2 - 2xa + a^2 \Leftrightarrow 2ax - a^2 = z^2 - y^2 \Leftrightarrow 2a(x - \frac{a}{2}) = z^2 - y^2$$

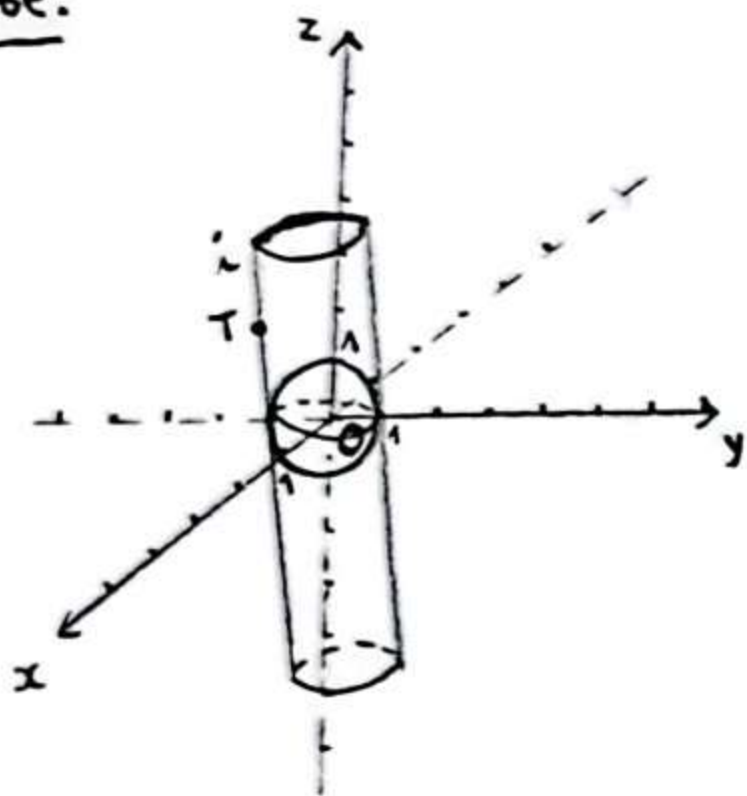
Дакле, тражено геометријско место тачака које су једнако удаљене од мимоилазних правих p и q је површ $2a(x - \frac{a}{2}) = z^2 - y^2$.

Уведимо нови координатни систем $O'x'y'z'$ такав да је $x' = z$, $y' = y$, $z' = x - \frac{a}{2}$, тј. $x = z' + \frac{a}{2}$, $y = y'$, $z = x'$,
односно $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ добијамо $x'^2 - y'^2 = 2az'$, а на основу теорије о класификацији

површи другог реда знамо да је то хиперболички параболоид (седло).

7.8. Одредити једначину цилиндра који је описан око сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ чије су изводнице паралелне вектору $(1, 1, -2)$.

Решење:



Цилиндар је описан око сфере ако и само ако су све изводнице тог цилиндра тангенте сфере.

Нека је $T(x_T, y_T, z_T)$ произвољна тачка тог цилиндра. Тада она припада некој изводници $\lambda: \frac{x-x_T}{1} = \frac{y-y_T}{1} = \frac{z-z_T}{-2}$ (услов задатка је да је вектор правца сваке изводнице $(1, 1, -2)$ јер су све изводнице паралелне том вектору), а како је свака изводница тангента сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с центром $O(0, 0, 0)$ и полупречником 1 то је $d(O, \lambda) = 1$. Како $T \in \lambda$ и вектор правца изводнице λ је $(1, 1, -2)$, то је $d(O, \lambda) = \frac{\|\vec{TO} \times \vec{\mu}_\lambda\|}{\|\vec{\mu}_\lambda\|}$.

$$\vec{TO} = [O] - [T] = (0, 0, 0) - (x_T, y_T, z_T) = (-x_T, -y_T, -z_T) \quad \vec{\mu}_\lambda = (1, 1, -2)$$

$$\vec{TO} \times \vec{\mu}_\lambda = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -x_T & -y_T & -z_T \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -y_T & -z_T \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -x_T & -z_T \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -x_T & -y_T \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =$$

$$= (-1)^2 \cdot ((-y_T) \cdot (-2) - 1 \cdot (-z_T)) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot ((-x_T) \cdot (-2) - 1 \cdot (-z_T)) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot ((-x_T) \cdot 1 - 1 \cdot (-y_T)) \vec{e}_3 =$$

$$= 1 \cdot (2y_T + z_T) \vec{e}_1 + (-1) \cdot (2x_T + z_T) \vec{e}_2 + (-x_T + y_T) \vec{e}_3 = (2y_T + z_T, -2x_T - z_T, -x_T + y_T)$$

$$\|\vec{TO} \times \vec{\mu}_\lambda\| = \sqrt{(2y_T + z_T)^2 + (-2x_T - z_T)^2 + (-x_T + y_T)^2}$$

$$\|\vec{\mu}_\lambda\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

$$1 = d(O, \lambda) = \frac{\|\vec{TO} \times \vec{\mu}_\lambda\|}{\|\vec{\mu}_\lambda\|} = \frac{\sqrt{(2y_T + z_T)^2 + (-2x_T - z_T)^2 + (-x_T + y_T)^2}}{\sqrt{6}} \quad |^2$$

$$1 = \frac{(2y_T + z_T)^2 + (-2x_T - z_T)^2 + (-x_T + y_T)^2}{6} \quad | \cdot 6$$

$$(2y_T + z_T)^2 + (-2x_T - z_T)^2 + (-x_T + y_T)^2 = 6$$

Дакле, T припада површи $(2y + z)^2 + (-2x - z)^2 + (-x + y)^2 = 6$, те како је T произвољна тачка траженог цилиндра то је тражени цилиндар подскуп површи $(2y + z)^2 + (-2x - z)^2 + (-x + y)^2 = 6$.

Докажимо и обрнуто, да за произволну тачку $P(x_p, y_p, z_p)$ с површи $(2y+z)^2 + (-2x-z)^2 + (-x+y)^2 = 6$ важи да припада траженом цилиндру.

$$\vec{PO} = [O] - [P] = (0, 0, 0) - (x_p, y_p, z_p) = (-x_p, -y_p, -z_p)$$

$$\begin{aligned} \vec{PO} \times (1, 1, -2) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -x_p & -y_p & -z_p \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -y_p & -z_p \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -x_p & -z_p \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -x_p & -y_p \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= (-1)^2 \cdot ((-y_p)(-2) - 1 \cdot (-z_p)) \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot ((-x_p)(-2) - 1 \cdot (-z_p)) \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot ((-x_p)(1) - 1 \cdot (-y_p)) \vec{e}_3 \\ &= (2y_p + z_p, -2x_p - z_p, -x_p + y_p) \end{aligned}$$

$$\|\vec{PO} \times (1, 1, -2)\| = \sqrt{(2y_p + z_p)^2 + (-2x_p - z_p)^2 + (-x_p + y_p)^2} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{6}$$

P припада површи $(2y+z)^2 + (-2x-z)^2 + (-x+y)^2 = 6$

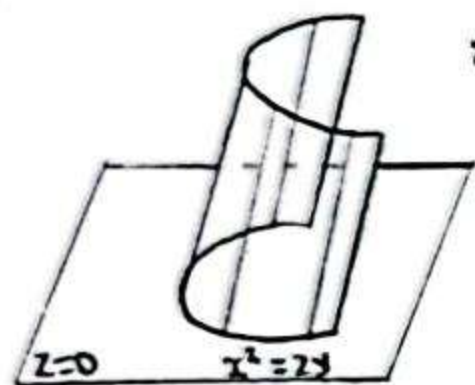
$$\|(1, 1, -2)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\vec{PO} \times (1, 1, -2)\|}{\|(1, 1, -2)\|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1 \Rightarrow \text{Правца која садржи тачку } P \text{ и има вектор правца } (1, 1, -2) \text{ на растојању } 1 \text{ од центра сфере } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ те је та права тангента сфере.}$$

Зато тачка P припада цилиндру описаном око сфере, чије су изводнице паралелне вектору $(1, 1, -2)$, те како је P била произволна тачка површи $(2y+z)^2 + (-2x-z)^2 + (-x+y)^2 = 6$, то је тражени цилиндар једнак површи $(2y+z)^2 + (-2x-z)^2 + (-x+y)^2 = 6$. Након сређивања ова једначина постаје $4y^2 + 4yz + z^2 + 4x^2 + 4xz + z^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 6$, односно $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz - 6 = 0$.

7.9. Одредити једначину цилиндра чије су изводнице паралелне правој $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$, а који садржи параболу $x^2=2y, z=0$.

Решење:



По дефиницији, тражени цилиндар је унија правих одређених тачкама параболе $x^2=2y, z=0$ и вектором правца $(2,3,4)$ јер су те праве изводнице цилиндра које по услову задатка морају бити паралелне правој $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$, а њен вектор правца је $(2,3,4)$.

Означимо са $T(x_T, y_T, z_T)$ произвољну тачку параболе $x^2=2y, z=0$. То значи да је $x_T^2=2y_T, z_T=0$. Једначина праве која садржи тачку T и има вектор правца $(2,3,4)$ је $\frac{x-x_T}{2} = \frac{y-y_T}{3} = \frac{z-z_T}{4} = t$, тј. $x-x_T=2t, y-y_T=3t, z-z_T=4t$, односно $x_T=x-2t, y_T=y-3t, z_T=z-4t$. Како је $z_T=0$, то је $z-4t=0$, тј. $t=\frac{z}{4}$.

$$x_T = x - 2t = x - 2 \cdot \frac{z}{4} = x - \frac{z}{2}, \quad y_T = y - 3t = y - 3 \cdot \frac{z}{4} = y - \frac{3z}{4}.$$

Како је $x_T^2=2y_T$, то је $(x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})$. Дакле, свака тачка (x, y, z) праве која садржи тачку $T(x_T, y_T, z_T)$ и има вектор правца $(2,3,4)$ припада површи $(x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})$, те је та изводница подскуп површи $(x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})$.

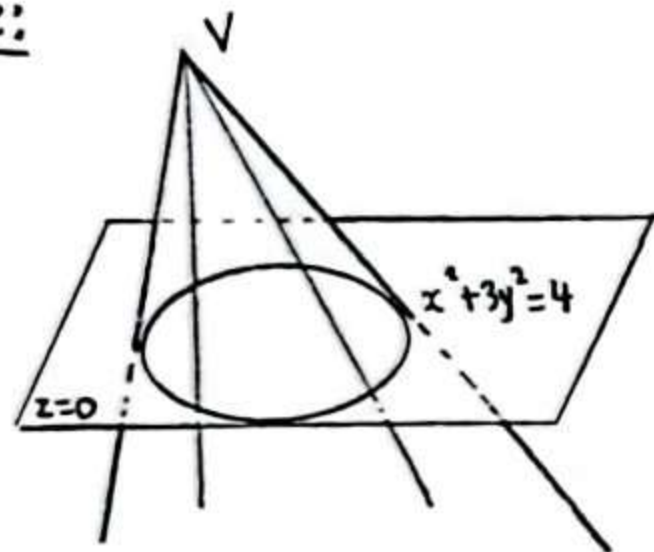
Пошто је тачка T била произвољна тачка параболе $x^2=2y, z=0$, значи да су све изводнице траженог цилиндра подскуп површи $(x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})$, а како је цилиндар унија својих изводница, то је цео цилиндар подскуп површи $(x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})$.

Докажимо да важи и обрнуто, да произвољна тачка $P(x_P, y_P, z_P)$ површи $(x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})$ припада траженом цилиндру. Нађимо тачку $P'(x_{P'}, y_{P'}, z_{P'})$ у пресеку праве $\frac{x-x_P}{2} = \frac{y-y_P}{3} = \frac{z-z_P}{4}$ (која садржи тачку (x_P, y_P, z_P) и паралелна је правој $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$, односно има вектор правца $(2,3,4)$) и равни $z=0$. Тада је $z_{P'}=0$ и постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $\frac{x_{P'}-x_P}{2} = \frac{y_{P'}-y_P}{3} = \frac{z_{P'}-z_P}{4} = \lambda$, тј. $x_{P'}=2\lambda+x_P, y_{P'}=3\lambda+y_P, z_{P'}=4\lambda+z_P$. То значи да је $4\lambda+z_P=z_{P'}=0$, односно $\lambda=-\frac{z_P}{4}$. Следи да је $x_{P'}=2\lambda+x_P=2 \cdot (-\frac{z_P}{4})+x_P=$

$= x_p - \frac{z_p}{2}$ и $y_{p1} = y_p + 3\lambda = y_p + 3 \cdot (-\frac{z_p}{4}) = y_p - \frac{3z_p}{4}$. Како тачка $P(x_p, y_p, z_p)$ припада површи $(x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})$, следи да је $(x_p - \frac{z_p}{2})^2 = 2(y_p - \frac{3z_p}{4})$, одакле је $x_{p1}^2 = 2 \cdot y_{p1}$, а како је и $z_{p1} = 0$, то тачка $P'(x_{p1}, y_{p1}, z_{p1})$ припада параболу $x^2 = 2y, z = 0$. Следи да је $\frac{x - x_p}{2} = \frac{y - y_p}{3} = \frac{z - z_p}{4}$ права која садржи тачку P' с параболе $x^2 = 2y, z = 0$ и паралелна је правој $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$, што значи да је $\frac{x - x_p}{2} = \frac{y - y_p}{3} = \frac{z - z_p}{4}$ изводница траженог цилиндра. Дакле, тачка P припада траженом цилиндру, те како је P била произвољна тачка површи $(x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})$ следи да је та површ подскуп траженог цилиндра. Како је већ доказано да је и тражени цилиндар подскуп те површи, то је тражени цилиндар једнак површи $(x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})$, односно тражена једначина цилиндра је $(x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})$.

7.10. Одредити једначину конуса чији је врх тачка $V(0,1,1)$ и који садржи елипсу $x^2+3y^2=4, z=0$.

Решење:



По дефиницији, тражени конус је унија правих одређених тачкама елипсе и тачком V , која не припада равни елипсе $x^2+3y^2=4, z=0$, јер је трећа координата врха $V(0,1,1)$ једнака 1, а не 0.

Нека је $T(x_T, y_T, z_T)$ произвољна тачка елипсе $x^2+3y^2=4, z=0$. Тада је $x_T^2+3y_T^2=4, z_T=0$. Права која садржи тачке T и V има вектор правца $\vec{VT} = [T] - [V] = (x_T, y_T, z_T) - (0, 1, 1) = (x_T, y_T - 1, z_T - 1) = (x_T, y_T - 1, -1)$, те је њена једначина $\frac{x-0}{x_T} = \frac{y-1}{y_T-1} = \frac{z-1}{-1} = t$.

1° случај Ако је $t \neq 0$, тада је $x_T = \frac{x}{t}, y_T - 1 = \frac{y-1}{t}, -1 = \frac{z-1}{t}$ тј. $t = \frac{z-1}{-1} = 1-z$. Како је $t \neq 0$, то је $1-z \neq 0$, односно $z \neq 1$. Заменом $t = 1-z$ добијамо $x_T = \frac{x}{1-z} = \frac{x}{1-z}, y_T = \frac{y-1}{1-z} + 1 = \frac{y-1}{1-z} + 1 = \frac{y-1+1-z}{1-z} = \frac{y-z}{1-z}$. Како је $x_T^2+3y_T^2=4$, то је $\left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + 3\left(\frac{y-z}{1-z}\right)^2 = 4$, те након множења са $(1-z)^2 \neq 0$, добијамо

$$x^2 + 3(y-z)^2 = 4(1-z)^2.$$

2° случај Ако је $t = 0$, тада је $x=0, y=1, z=1$. Тачка $(0,1,1)$ је заправо врх V и она припада површи $x^2+3(y-z)^2=4(1-z)^2$ јер је $0^2+3\cdot(1-1)^2=4\cdot(1-1)^2$, тј. $0+0=0$.

Дакле, свака тачка праве $\frac{x-0}{x_T} = \frac{y-1}{y_T-1} = \frac{z-1}{-1}$ тј. праве VT припада површи $x^2+3(y-z)^2=4(1-z)^2$.

Како је тачка T била произвољна тачка елипсе $x^2+3y^2=4, z=0$, следи да је тражени конус подскуп површи $x^2+3(y-z)^2=4(1-z)^2$.

Докажимо да важи и обрнуто, да произвољна тачка $P(x_P, y_P, z_P)$ површи $x^2+3(y-z)^2=4(1-z)^2$ припада траженом конусу. Разликујемо два случаја.

1° случај Ако је $z_p = 1$, онда је $\underbrace{x_p^2}_{=0} + 3(\underbrace{y_p - 1}_{=0})^2 = 4(1-1)^2 = 4 \cdot 0^2 = 0$, односно $x_p = 0$ и $y_p - 1 = 0$ тј. $y_p = 1$, те је $P(0, 1, 1)$ заправо врх V , а он припада конусу.

2° случај Ако је $z_p \neq 1$, онда се P и V разликују јер је трећа координата тачке $V(0, 1, 1)$ једнака 1.

Права која садржи тачке P и V има вектор правца $\vec{VP} = [P] - [V] = (x_p, y_p, z_p) - (0, 1, 1) = (x_p, y_p - 1, z_p - 1)$, те је њена једначина $\frac{x-0}{x_p} = \frac{y-1}{y_p-1} = \frac{z-1}{z_p-1}$. Нађимо тачку $P'(x_{p'}, y_{p'}, z_{p'})$ у пресеку VP и равни $z=0$.

Тадa је $\frac{x_{p'}-0}{x_p} = \frac{y_{p'}-1}{y_p-1} = \frac{z_{p'}-1}{z_p-1} = \lambda$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$ и $z_{p'} = 0$, те је $\lambda = \frac{0-1}{z_p-1} = \frac{-1}{z_p-1} = \frac{1}{1-z_p}$.

Следи и да је $x_{p'} = \lambda x_p = \frac{1}{1-z_p} \cdot x_p = \frac{x_p}{1-z_p}$, $y_{p'} - 1 = \lambda(y_p - 1) = \frac{1}{1-z_p} (y_p - 1) = \frac{y_p - 1}{1-z_p}$, те је $y_{p'} = \frac{y_p - 1}{1-z_p} + 1 =$

$= \frac{y_p - 1 + 1 - z_p}{1-z_p} = \frac{y_p - z_p}{1-z_p}$. Како тачка $P(x_p, y_p, z_p)$ припада површи $x^2 + 3(y-z)^2 = 4(1-z)^2$, то је $x_p^2 + 3(y_p - z_p)^2 =$

$4(1-z_p)^2$, а како је $1-z_p \neq 0$ у случају који радимо, то након дељења са $(1-z_p)^2 \neq 0$ добијамо

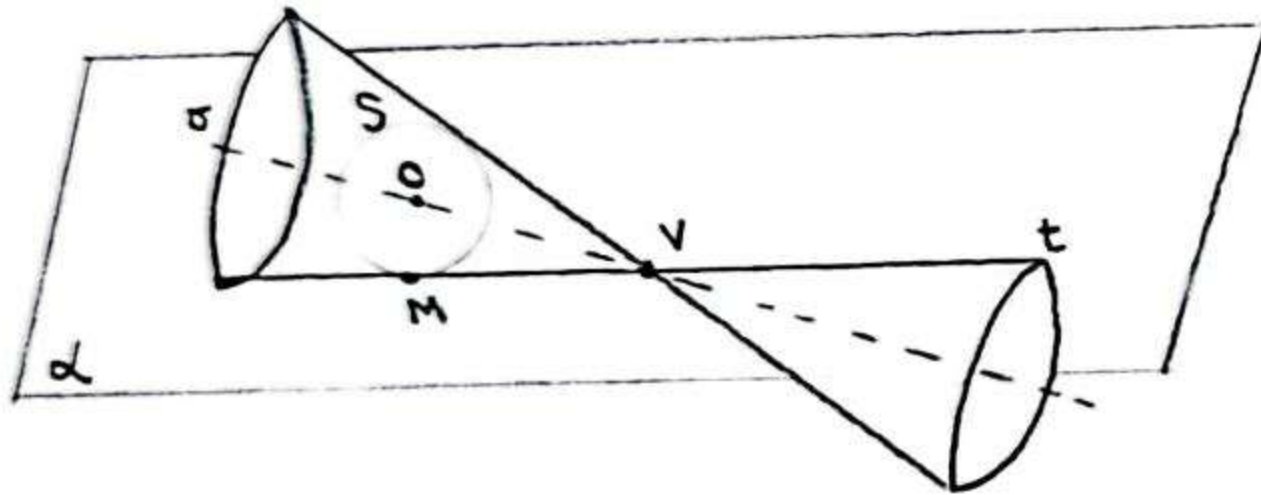
$\left(\frac{x_p}{1-z_p}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{y_p - z_p}{1-z_p}\right)^2 = 4$, тј. $x_{p'}^2 + 3y_{p'}^2 = 4$. Дакле, тачка $P'(x_{p'}, y_{p'}, z_{p'})$ припада елипси $x^2 + 3y^2 = 4$,

$z=0$, те је VP права која садржи тачку P' с елипсе $x^2 + 3y^2 = 4$, $z=0$ и тачку V , што значи да је VP изводница траженог конуса. Дакле, тачка P припада траженом конусу, те како је P била произвољна тачка површи $x^2 + 3(y-z)^2 = 4(1-z)^2$, следи да је та површ подскуп траженог конуса.

Како смо већ доказали и да је тражени конус подскуп површи $x^2 + 3(y-z)^2 = 4(1-z)^2$, следи да је тражени конус једнак површи $x^2 + 3(y-z)^2 = 4(1-z)^2$.

7.11. Одредити једначину кружног конуса коме је права $\sigma: x-y=0, 4x-z=0$ оса и коме је раван $\alpha: x+y+z=0$ тангентна раван.

Решење: Кружни конус има својство да све његове изводнице граде исти угао с његовом осом. Знамо како изгледа тангентна раван сфере, а важи да када се две површи додирнују у некој тачки, оне имају исту тангентну раван у тој тачки. У кружни конус се може уписати сфера. Сфера је уписана у кружни конус ако и само ако су све изводнице тог конуса тангенте сфере.



Означимо са M једну од додирних тачака траженог кружног конуса и равни α . Нека је S сфера која је уписана у кружни конус таква да је M једна од додирних тачака сфере и конуса. Тада је α тангентна раван сфере S .

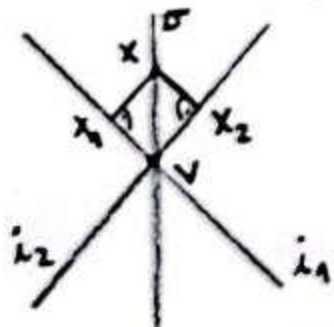
Ако је t изводница кружног конуса која садржи тачку M , онда је t тангента сфере S у тачки M , те права t мора припадати тангентној равни α на сферу S у тачки M .

Дакле, све тачке изводнице t припадају равни α , па специјално и врх V кружног конуса (врх V кружног конуса припада свим изводницама тог конуса). Врх V кружног конуса припада и његовој оси σ , те је $\{V\} = \sigma \cap \alpha$.

Ако је $V(x_v, y_v, z_v)$ онда из $V \in \sigma$ следи $x_v - y_v = 0, 4x_v - z_v = 0$, а из $V \in \alpha$ следи $x_v + y_v + z_v = 0$.

$$\begin{array}{l} y_v = x_v \quad z_v = 4x_v \quad \rightarrow \quad x_v + x_v + 4x_v = 0 \\ 6x_v = 0 \\ x_v = \frac{0}{6} = 0 \\ y_v = x_v = 0 \\ z_v = 4x_v = 4 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

Дакле, врх траженог конуса је $V(0,0,0)$.



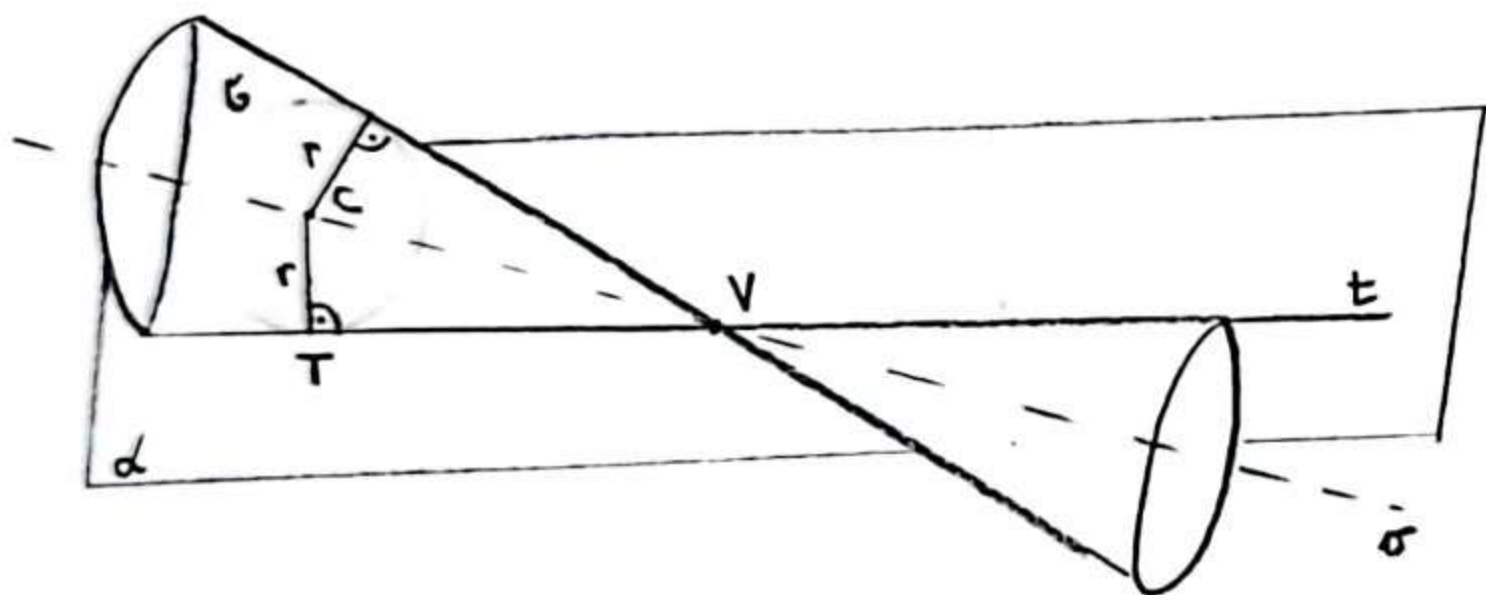
означимо са X произвољну тачку с осе σ кружног конуса, различиту од врха V . Нека су l_1 и l_2 произвољне изводнице кружног конуса, а x_1 и x_2 подножја нормала из тачке X на изводницама l_1 и l_2 , редом.

$$\begin{array}{l} XV = XV \\ \angle x_1 V = \angle x_2 V = 90^\circ \\ \angle XVx_1 = \angle XVx_2 \text{ јер све изводнице, па и } l_1 \text{ и } l_2, \text{ кружног конуса граде исти угао с осом } \sigma \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} XV = XV \\ \angle x_1 V = \angle x_2 V = 90^\circ \\ \angle XVx_1 = \angle XVx_2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{у} \text{ } \Delta \\ \Rightarrow \Delta XVx_1 \cong \Delta XVx_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Тачка X је на истом растојању од изводница i_1 и i_2 . Како су i_1 и i_2 произвољне изводнице, следи да је тачка X на истом растојању од свих изводница кружног конуса.

Оса σ има једначине $x-y=0$, $4x-z=0$, тј. $x=y$, $4x=z$. Следи да је $\sigma: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$. Приметимо да тачка $C(1,1,4)$ припада оси σ јер је $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{4}{4} = 1$, те је тачка C на истом растојању од свих изводница кружног конуса. Означимо са r то растојање и уочимо сферу $\mathcal{G}$ с центром C и полупречником r .

Посматрајмо и изводницу t по којој се раван α и кружни конус додирују. Како је сфера $\mathcal{G}$ уписана у кружни конус, то свака изводница кружног конуса јесте тангента сфере, те постоји додирна тачка T изводнице t и сфере $\mathcal{G}$.



$$T \in t, t \subset \alpha \Rightarrow T \in \alpha$$

Тачка T је на изводници конуса, те је и на конусу, па постоји јединствена тангентна раван конуса у тачки T , а како $T \in \alpha$ и α је тангентна раван конуса по услову задатка, то је α јединствена тангентна раван конуса у тачки T , а како је T једна од додирних тачака конуса и сфере $\mathcal{G}$ то је α тангентна раван сфере $\mathcal{G}$ у тачки T .

$$\Rightarrow d(C, \alpha) = r \quad \alpha: x+y+z=0 \quad C(1,1,4)$$

$$r = d(C, \alpha) = \frac{|1+1+4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Ако је i произвољна изводница кружног конуса, онда $V \in i$ и једначина изводнице i је $\frac{x-0}{u} = \frac{y-0}{v} = \frac{z-0}{w}$ за неки вектор $\vec{m}_i = (u, v, w) \neq (0,0,0)$. Важи да је $2\sqrt{3} = r = d(C, i) = \frac{\|\vec{VC} \times \vec{m}_i\|}{\|\vec{m}_i\|}$.

$$\vec{VC} = [C] - [V] = (1, 1, 4) - (0, 0, 0) = (1, 1, 4)$$

$$\vec{\mu}_i = (\mu, \vartheta, w)$$

$$\vec{VC} \times \vec{\mu}_i = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 4 \\ \mu & \vartheta & w \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ \vartheta & w \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ \mu & w \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu & \vartheta \end{vmatrix} \vec{e}_3 = (-1)^2 \cdot (1 \cdot w - 4 \vartheta) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (1 \cdot w - 4 \mu) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (1 \cdot \vartheta - 1 \cdot \mu) \vec{e}_3 = (w - 4 \vartheta) \vec{e}_1 - (w - 4 \mu) \vec{e}_2 + (\vartheta - \mu) \vec{e}_3 = (w - 4 \vartheta, -w + 4 \mu, \vartheta - \mu)$$

$$\|\vec{VC} \times \vec{\mu}_i\| = \sqrt{(w - 4 \vartheta)^2 + (-w + 4 \mu)^2 + (\vartheta - \mu)^2} \quad \|\vec{\mu}_i\| = \sqrt{\mu^2 + \vartheta^2 + w^2}$$

$$2\sqrt{3} = d(C, i) = \frac{\|\vec{VC} \times \vec{\mu}_i\|}{\|\vec{\mu}_i\|} = \frac{\sqrt{(w - 4 \vartheta)^2 + (-w + 4 \mu)^2 + (\vartheta - \mu)^2}}{\sqrt{\mu^2 + \vartheta^2 + w^2}} \quad /^2$$

$$12 = \frac{(w - 4 \vartheta)^2 + (-w + 4 \mu)^2 + (\vartheta - \mu)^2}{\mu^2 + \vartheta^2 + w^2}$$

Нека је $K(x, y, z)$ произвољна тачка с траженог кружног конуса, различита од његовог врха V . Тада је $\vec{VK} = [K] - [V] = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z)$ вектор правца изводнице тог кружног конуса, па задовољава

$$12 = \frac{(z - 4y)^2 + (-z + 4x)^2 + (y - x)^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ односно } (z - 4y)^2 + (-z + 4x)^2 + (y - x)^2 = 12(x^2 + y^2 + z^2).$$

Врх $V(0, 0, 0)$ такође задовољава ову једначину ($0^2 + 0^2 + 0^2 = 12 \cdot (0^2 + 0^2 + 0^2)$), те је тражени кружни конус подскуп површи $(z - 4y)^2 + (-z + 4x)^2 + (y - x)^2 = 12(x^2 + y^2 + z^2)$.

Докажимо сада и обрнуто, да за произвољну тачку $P(x_p, y_p, z_p)$ с површи $(z - 4y)^2 + (-z + 4x)^2 + (y - x)^2 = 12(x^2 + y^2 + z^2)$ важи да припада траженом кружном конусу. Разликујемо два случаја.

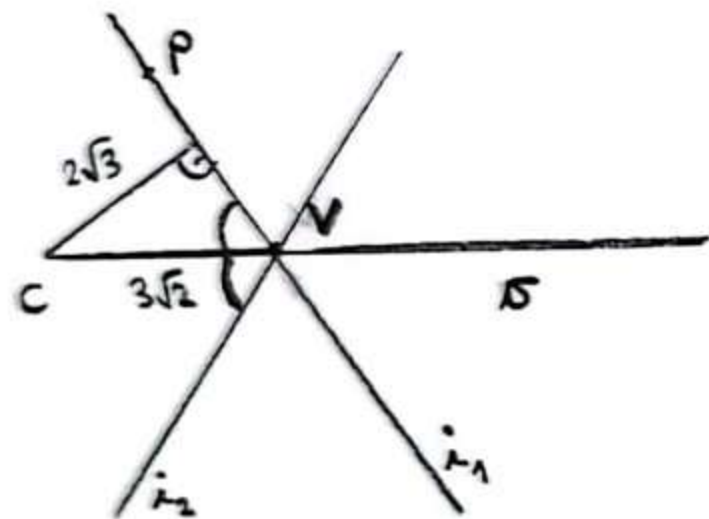
1) Ако је $\underbrace{x_p^2}_{\geq 0} + \underbrace{y_p^2}_{\geq 0} + \underbrace{z_p^2}_{\geq 0} = 0$, онда је $(x_p, y_p, z_p) = (0, 0, 0)$ (ова тачка задовољава једначину површи

$(z - 4y)^2 + (-z + 4x)^2 + (y - x)^2 = 12(x^2 + y^2 + z^2)$ јер је $0^2 + 0^2 + 0^2 = 12 \cdot (0^2 + 0^2 + 0^2)$), тј. $P = V$, а V припада траженом кружном конусу.

2) Ако је $x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 \neq 0$, онда вектор $\vec{\mu}_p = \vec{VP} = [P] - [V] = (x_p, y_p, z_p) - (0, 0, 0) = (x_p, y_p, z_p)$ задовољава

$$\frac{(z_p - 4y_p)^2 + (-z_p + 4x_p)^2 + (y_p - x_p)^2}{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2} = 12 \quad \text{тј.} \quad \frac{\|\vec{VC} \times \vec{\mu}_p\|^2}{\|\vec{\mu}_p\|^2} = 12, \quad \text{тј.} \quad \frac{\|\vec{VC} \times \vec{\mu}_p\|}{\|\vec{\mu}_p\|} = 2\sqrt{3}. \text{ Дакле, растојање тачке } C$$

од праве VP , која садржи врх V и има вектор правца $\vec{d}_P = \vec{VP}$, једнако је $2\sqrt{3}$. Зато тачка P припада кружном конусу јер су једине праве које садрже тачку V и на растојању су $2\sqrt{3}$ од тачке C с осе σ управо његове изводнице (оне садрже тачку V и заклапају угао чији је синус $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, јер

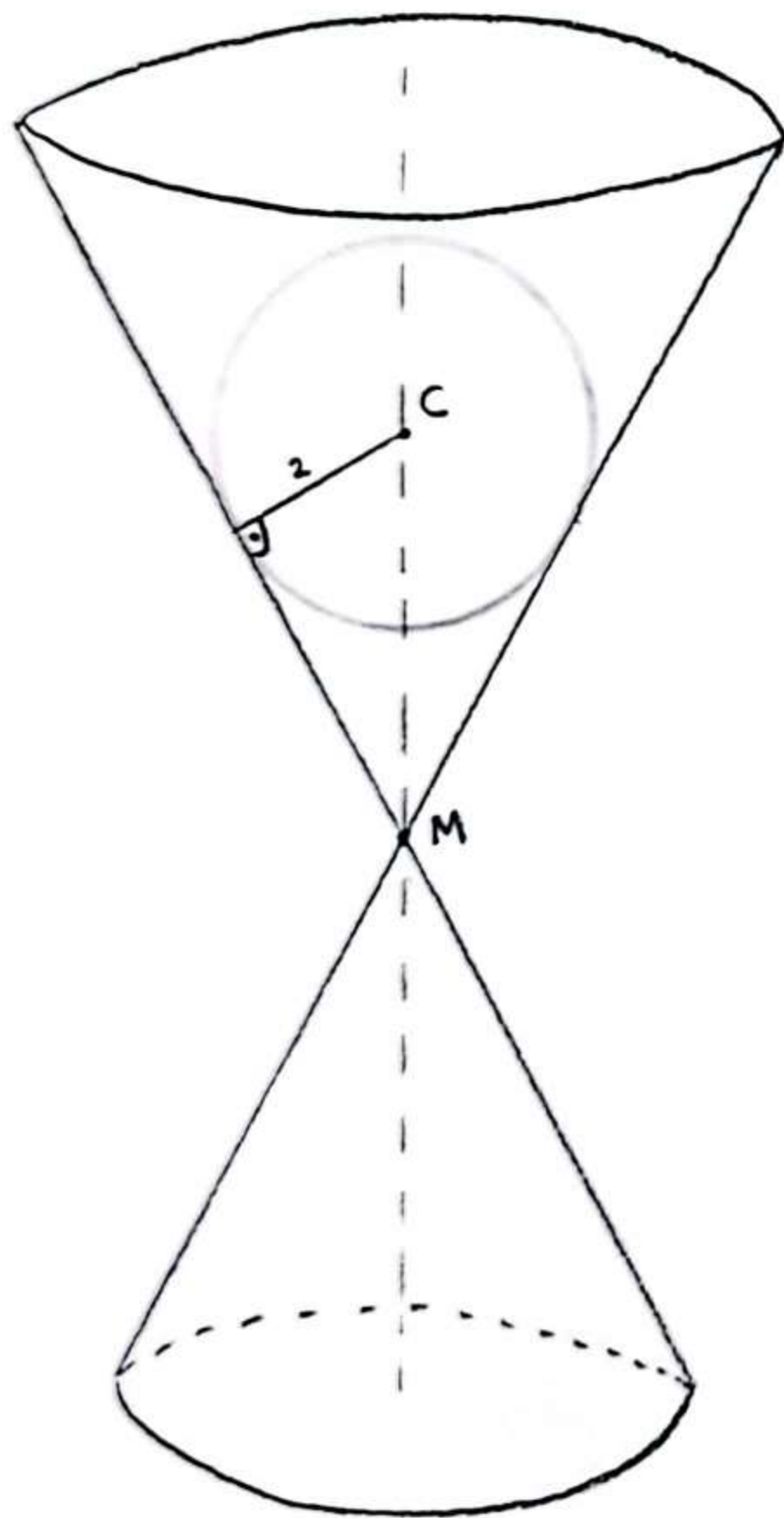


је $r=2\sqrt{3}$ и $\|\vec{VC}\| = \sqrt{1^2+1^2+4^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$, са осом σ , а кружни конус има својство да све његове изводнице граде исти угао с његовом осом σ).

Тиме смо доказали да је једначина траженог кружног конуса $(z-4y)^2 + (-z+4x)^2 + (y-x)^2 = 12(x^2+y^2+z^2)$, односно након сређивања $z^2 - 8yz + 16y^2 + z^2 - 8xz + 16x^2 + y^2 - 2xy + x^2 = 12x^2 + 12y^2 + 12z^2$ гј.
 $5x^2 + 5y^2 - 10z^2 - 2xy - 8xz - 8yz = 0$.

7.12. Одредити једначину конуса чије је теме тачка $M(1,4,5)$ и који додирује сферу $\zeta: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$.
Ако је извор светлости у тачки M одредити која је крива контура сенке сфере на равни Oxz .

Решење: По услову задатка тачка $M(1,4,5)$ је теме, односно врх конуса, а како конус додирује сферу $\zeta: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$ с центром $C(1,2,1)$ и полупречником $r = \sqrt{4} = 2$, то су изводнице траженог конуса праве које садрже тачку M (врх конуса) и тангентне су на сфери ζ .



Нека је λ произволна изводница траженог конуса. Тада λ има једначину $\frac{x-1}{u} = \frac{y-4}{v} = \frac{z-5}{w}$ јер λ садржи тачку $M(1,4,5)$, а њен вектор правца је $\vec{\mu}_\lambda = (u, v, w) \neq (0,0,0)$. Растојање тачке $C(1,2,1)$ од изводнице λ једнако је 2, тј. $d(C, \lambda) = 2$.

$$2 = d(C, \lambda) = \frac{\|\vec{MC} \times \vec{\mu}_\lambda\|}{\|\vec{\mu}_\lambda\|}$$

$$\vec{MC} = [C] - [M] = (1, 2, 1) - (1, 4, 5) = (0, -2, -4)$$

$$\vec{\mu}_\lambda = (u, v, w)$$

$$\vec{MC} \times \vec{\mu}_\lambda = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & -2 & -4 \\ u & v & w \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ v & w \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ u & w \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ u & v \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

$$= (-1)^2 \cdot (-2 \cdot w - (-4)v) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (0 \cdot w - (-4)u) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (0 \cdot v - u \cdot (-2)) \vec{e}_3$$

$$= 1 \cdot (-2w + 4v) \vec{e}_1 + (-1) \cdot 4u \vec{e}_2 + 1 \cdot 2u \vec{e}_3 = (-2w + 4v, -4u, 2u)$$

$$\|\vec{MC} \times \vec{\mu}_\lambda\| = \sqrt{(-2w + 4v)^2 + (-4u)^2 + (2u)^2}$$

$$2 = d(C, \lambda) = \frac{\|\vec{MC} \times \vec{\mu}_\lambda\|}{\|\vec{\mu}_\lambda\|} = \frac{\sqrt{(-2w + 4v)^2 + (-4u)^2 + (2u)^2}}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \quad /^2$$

$$4 = \frac{(-2w + 4v)^2 + (-4u)^2 + (2u)^2}{u^2 + v^2 + w^2}$$

$$4 = \frac{(-2w + 4v)^2 + 16u^2 + 4u^2}{u^2 + v^2 + w^2}$$

$$4 = \frac{(-2w+4v)^2 + 20u^2}{u^2+v^2+w^2}$$

Ако је $X(x, y, z)$ произвољна тачка траженог конуса, различита од његовог врха $M(1, 4, 5)$, онда тачка X припада изводници MX , чији је вектор правца вектор $\vec{MX} = [X] - [M] = (x, y, z) - (1, 4, 5) = (x-1, y-4, z-5)$ и он задовољава $\frac{(-2(z-5)+4(y-4))^2 + 20(x-1)^2}{(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2} = 4$. Дакле, тачка $X(x, y, z)$ припада површи $(-2(z-5)+4(y-4))^2 + 20(x-1)^2 = 4 \cdot ((x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2)$. Овој површи припада и врх $M(1, 4, 5)$ јер се $(-2(5-5)+4(4-4))^2 + 20(1-1)^2 = 4 \cdot ((1-1)^2 + (4-4)^2 + (5-5)^2)$ своди на $(-2 \cdot 0 + 4 \cdot 0)^2 + 20 \cdot 0^2 = 4 \cdot (0^2 + 0^2 + 0^2)$ тј. $0=0$ што је тачно.

Дакле, тражени конус је подскуп површи $(-2(z-5)+4(y-4))^2 + 20(x-1)^2 = 4 \cdot ((x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2)$.

Докажимо да важи и обрнуто, да произвољна тачка $Y(x_Y, y_Y, z_Y)$ с површи $(-2(z-5)+4(y-4))^2 + 20(x-1)^2 = 4 \cdot ((x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2)$ припада уоченом конусу. Разликујемо два случаја.

1) Ако је $(x_Y-1)^2 + (y_Y-4)^2 + (z_Y-5)^2 = 0$ тј. $x_Y=1, y_Y=4, z_Y=5$, онда се тачке Y и M поклапају. Тачка M је врх траженог конуса, те је Y елемент конуса.

2) Ако је $(x_Y-1)^2 + (y_Y-4)^2 + (z_Y-5)^2 \neq 0$, онда се тачке Y и M разликују. Нека је $\vec{\mu}_Y = \vec{MY}$. Тада је $\vec{\mu}_Y = (x_Y-1, y_Y-4, z_Y-5)$ и овај вектор задовољава $\frac{(-2(z_Y-5)+4(y_Y-4))^2 + 20(x_Y-1)^2}{(x_Y-1)^2 + (y_Y-4)^2 + (z_Y-5)^2} = 4$ јер тачка $Y(x_Y, y_Y, z_Y)$

припада површи $(-2(z-5)+4(y-4))^2 + 20(x-1)^2 = 4 \cdot ((x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2)$. То значи да је $\frac{\|\vec{MC} \times \vec{\mu}_Y\|^2}{\|\vec{\mu}_Y\|^2} = 4$

јер је $\vec{MC} \times \vec{\mu}_Y = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & -2 & -4 \\ x_Y-1 & y_Y-4 & z_Y-5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ y_Y-4 & z_Y-5 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ x_Y-1 & z_Y-5 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ x_Y-1 & y_Y-4 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =$

$= (-2(z_Y-5)+4(y_Y-4))\vec{e}_1 - 4(x_Y-1)\vec{e}_2 + 2 \cdot (x_Y-1)\vec{e}_3 = (-2(z_Y-5)+4(y_Y-4), -4(x_Y-1), 2(x_Y-1))$. Дакле, права MY

чији је вектор правца $\vec{\mu}_Y = \vec{MY}$ задовољава да је $d(C, MY) = \frac{\|\vec{MC} \times \vec{\mu}_Y\|}{\|\vec{\mu}_Y\|} = \sqrt{4} = 2$. Једине праве које садрже тачку M и на растојању су 2 од тачке C која је центар сфере $\Gamma: (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 4$, јесу изводнице конуса чији је врх M и које су тангенте сфере Γ , тј. изводнице конуса с врхом M

који додирује сферу $\mathcal{B}$, што је тражени конус. Према томе, MY је изводница траженог конуса, па Y припада траженом конусу. Следи да је површ $(-2(z-5)+4(y-4))^2+20(x-1)^2=4\cdot((x-1)^2+(y-4)^2+(z-5)^2)$ подскуп траженог конуса, па како је и конус подскуп ове површи, следи да се они поклапају. Дакле, једначина траженог конуса је $(-2(z-5)+4(y-4))^2+20(x-1)^2=4((x-1)^2+(y-4)^2+(z-5)^2)$.

Нађимо тачке $S(x_s, y_s, z_s)$ у пресеку равни Oxz и сфере $\mathcal{B}$.

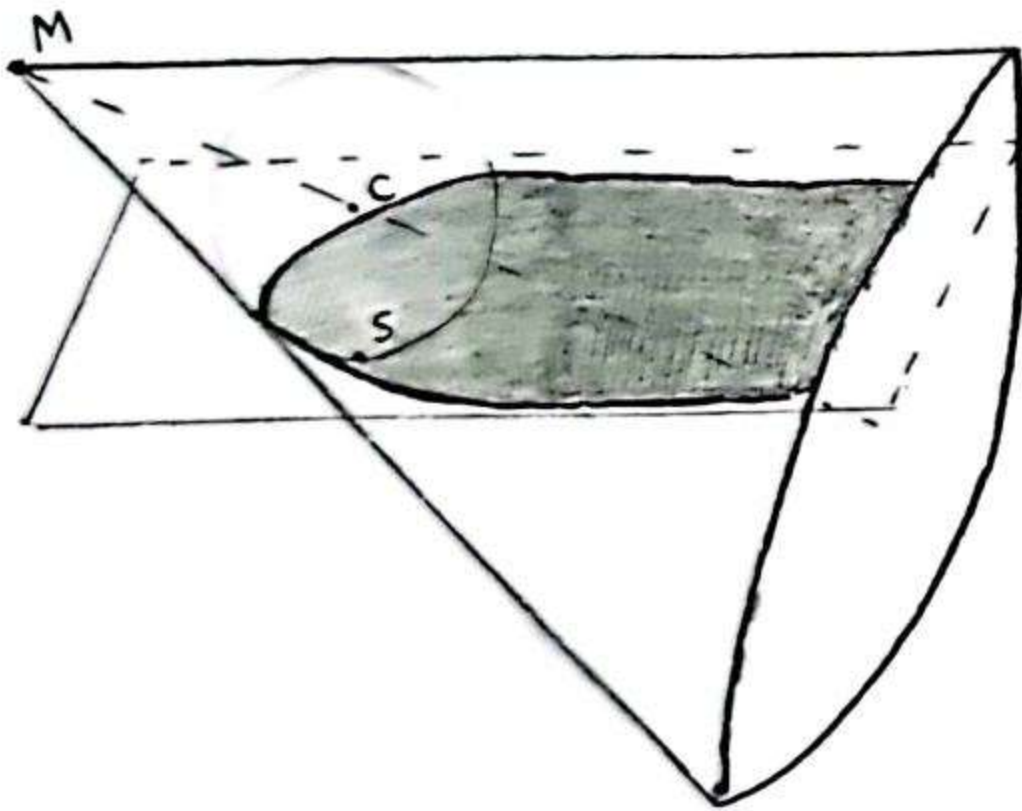
Једначина равни Oxz је $y=0$, те је $(x_s-1)^2+(y_s-2)^2+(z_s-1)^2=4$ и $y_s=0$.

Одатле следи $(x_s-1)^2+(0-2)^2+(z_s-1)^2=4$, тј. $(x_s-1)^2+4+(z_s-1)^2=4$,

односно $\underbrace{(x_s-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(z_s-1)^2}_{\geq 0} = 0$, те мора бити $x_s-1=0$ и $z_s-1=0$, тј.

$x_s=1$ и $z_s=1$. Зато је једина тачка S у пресеку равни Oxz и сфере $\mathcal{B}$ тачка $S(1,0,1)$. Дакле, Oxz је тангентна раван сфере $\mathcal{B}$, што значи да се све тачке сфере $\mathcal{B}$, осим тачке S , налазе са исте стране равни Oxz с које се налази тачка $C(1,2,1)$, тј. центар сфере $\mathcal{B}$. С исте стране равни Oxz налази се и тачка $M(1,4,5)$ зато што y -координате тачака C и M задовољавају $2>0$ и $4>0$.

Када се светлост емитује из тачке M , она се шири у зрацима који представљају полуправе с теменом M . Пошто се тачка M и сфера $\mathcal{B}$ (сем тачке $S(1,0,1)$) налазе с исте стране равни Oxz , следи да они зраци светлости (тј. полуправе с теменом M) који ударају у сферу $\mathcal{B}$ неће допрети до равни Oxz , а они који не ударају у сферу $\mathcal{B}$ хоће. Уместо целог конуса посматрамо унију полуправих с теменом M које додирују сферу $\mathcal{B}$. Приметимо да су полуправе с теменом M које ударају у сферу $\mathcal{B}$ у унутрашњости посматраног дела конуса, а полуправе с теменом M које не секу сферу $\mathcal{B}$ су у спољашњости посматраног дела конуса.



Одавде следи да ће део равни Oxz у унутрашњости посматраног дела конуса бити у сенци (до тог дела равни неће допрети ниједан зрак светлости јер зраци који треба да допру до тог дела равни ударају у сферу σ која се налази између тачке M и равни), а део равни Oxz у спољашњости посматраног дела конуса ће бити осветљен. Контуру сенке, тј. границу између освененог и неосвененог дела равни, чини крива у пресеку равни Oxz и конуса.

Та крива задовољава једначине:

$$y=0$$

$$(-2(z-5)+4(y-4))^2 + 20(x-1)^2 = 4((x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2)$$

$$y=0$$

$$(-2(z-5)+4(0-4))^2 + 20(x-1)^2 = 4(x-1)^2 + 4(0-4)^2 + 4(z-5)^2$$

$$y=0$$

$$(-2(z-5)-16)^2 + 16(x-1)^2 = 4(-4)^2 + 4(z-5)^2$$

$$y=0$$

$$4(z-5)^2 + 2 \cdot 2(z-5) \cdot 16 + 16^2 + 16(x-1)^2 = 4 \cdot 16 + 4(z-5)^2$$

$$y=0$$

$$64(z-5) + 256 + 16(x-1)^2 = 64 \quad / : 16$$

$$y=0$$

$$4(z-5) + 16 + (x-1)^2 = 4$$

$$y=0$$

$$(x-1)^2 = -4(z-5) - 12$$

$$y=0$$

$$(x-1)^2 = 4(-z+2)$$

Трансформацијом координата $x'=x-1$, $y'=y$, $z'=-z+2$, тј. $x=x'+1$, $y=y'$, $z=-z'+2$, добијамо да тражена крива има једначину $y'=0$, $x'^2 = 4z'$, што је једначина параболе.

7.13. Дат је параболоид $S: z+2=x^2+y^2$ и раван $\pi_1: y-z=4$. а) Одредити једначину равни π_2 која садржи тачку $M_0(0, \frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$ а ортогонална је на раван Oyz и раван π_1 . б) Пресечну криву L равни π_2 и површи S пројектовати редом на све три координатне равни, одредити једначине тих пројекција и прецизно утврдити које су криве те пројекције.

Решење: а) $\vec{n}_{\pi_2}$ - вектор нормале равни π_2

Оса ox је нормална на раван Oyz , те је вектор нормале равни Oyz једнак $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, а вектор нормале равни $\pi_1: y-z=4$ тј. $\pi_1: y-z-4=0$ је $\vec{n}_{\pi_1} = (0, 1, -1)$.

$$\pi_2 \perp Oyz \Rightarrow \vec{n}_{\pi_2} \perp \vec{e}_1 \quad \pi_2 \perp \pi_1 \Rightarrow \vec{n}_{\pi_2} \perp \vec{n}_{\pi_1}$$

Докажимо да су вектори $\vec{e}_1$ и $\vec{n}_{\pi_1}$ линеарно независни.

$$\begin{aligned} a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{n}_{\pi_1} &= \vec{0} \Rightarrow a \cdot (1, 0, 0) + b \cdot (0, 1, -1) = (0, 0, 0) \Rightarrow (a, 0, 0) + (0, b, -b) = (0, 0, 0) \Rightarrow (a, b, -b) = (0, 0, 0) \\ &\Rightarrow a=0, b=0, -b=0 \end{aligned}$$

Како су вектори $\vec{e}_1$ и $\vec{n}_{\pi_1}$ линеарно независни, $\vec{n}_{\pi_2} \perp \vec{e}_1$ и $\vec{n}_{\pi_2} \perp \vec{n}_{\pi_1}$, то је $\vec{n}_{\pi_2}$ колинеаран с векторским производом $\vec{e}_1 \times \vec{n}_{\pi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot 1 = -(-\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (0, 1, 1)$.

Можемо узети да је $\vec{n}_{\pi_2}$ било који вектор колинеаран са $(0, 1, 1)$, па специјално и $(0, 1, 1)$.

Раван π_2 садржи тачку $M_0(0, \frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$ и $\vec{n}_{\pi_2} = (0, 1, 1)$, те је њена једначина $0 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-\frac{1}{2}) + 1 \cdot (z-(-\frac{7}{4})) = 0$ тј. $\pi_2: y - \frac{1}{2} + z + \frac{7}{4} = 0$, односно $\pi_2: y + z + \frac{5}{4} = 0$.

$$b) S: z+2=x^2+y^2$$

Уведимо трансформацију координата $x'=x$, $y'=y$, $z'=z+2$, тј. $x=x'$, $y=y'$, $z=z'-2$.

Површ S у новом координатном систему има једначину $z'=x'^2+y'^2$. Из теорије о класификацији површи другог реда следи да је S (елиптички) параболоид.

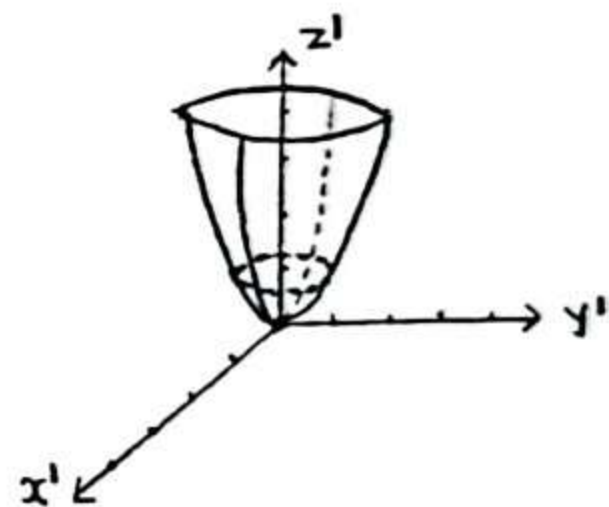
У пресеку површи S и равни $z'=z'_0$, где је $z'_0 < 0$, добија се

$$\underbrace{x'^2+y'^2}_{\geq 0} = \underbrace{z'_0}_{< 0}, \quad z'=z'_0 \quad \text{што је празан скуп.}$$

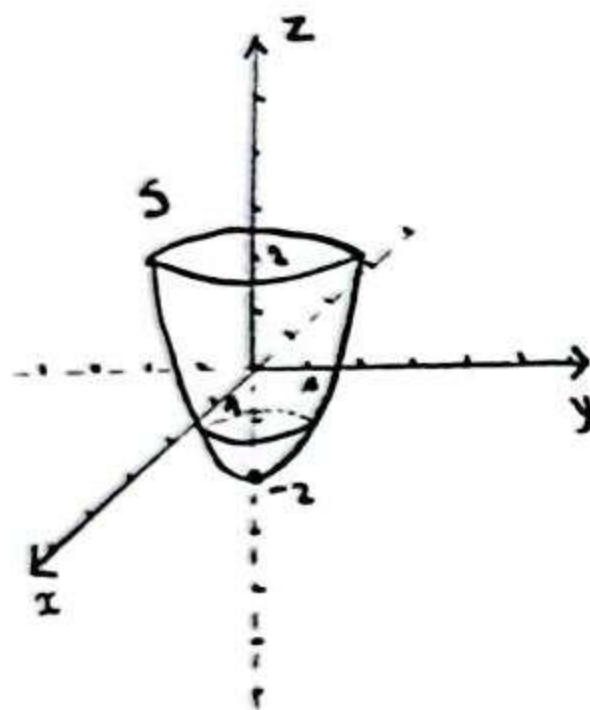
У пресеку површи S и равни $z'=0$ добија се $\underbrace{x'^2+y'^2}_{\geq 0} = 0, z'=0$, те мора бити $x'=0, y'=0, z'=0$, тј. добија се тачка.

У пресеку површи S и равни $z'=z'_0$, где је $z'_0 > 0$, добија се $x'^2+y'^2 = z'_0 > 0, z'=z'_0$, што је круг у равни $z'=z'_0$ с центром $(0,0,z'_0)$ и полупречником $\sqrt{z'_0}$. Дакле, параболоид S је унија тачке $(0,0,0)$ и кругова $x'^2+y'^2 = z'_0$ у равнима $z'=z'_0$, када z'_0 прође по свим реалним бројевима из интервала $(0,+\infty)$.

Када је $x'=0$, добијамо $y'^2=z'$, што је парабола у равни $x'=0$, а када је $y'=0$ добијамо $x'^2=z'$ што је парабола у равни $y'=0$. Ово нам омогућава да скицирамо параболоид S . Због парабела у равнима $x'=0$ и $y'=0$, ова површ има име параболоид, а како је круг специјалан случај елипсе, уз именицу параболоид иде и придев елиптички.



Враћањем у полазни координатни систем $Oxyz$ помоћу трансформације координата $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, тј. транслацијом дуж осе Oz' за -2 , добијамо скицу параболоида S .



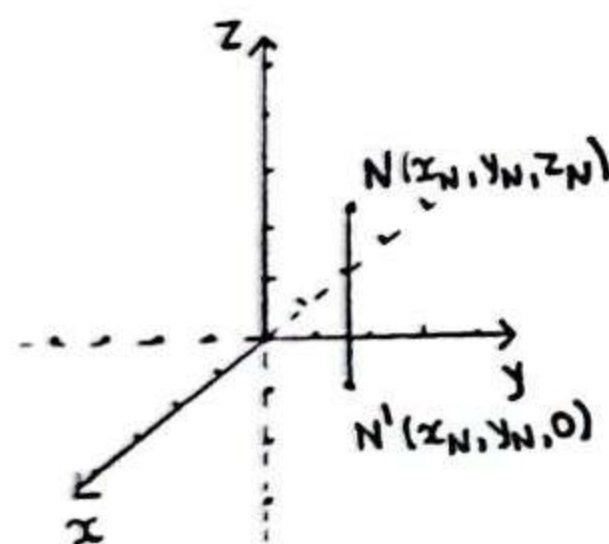
Пресек параболоида $S: z+2=x^2+y^2$ и равни $\pi_2: y+z+\frac{5}{4}=0$ је крива $L: z+2=x^2+y^2, y+z+\frac{5}{4}=0$.

Дакле, $L = \{(x, y, z): z+2=x^2+y^2, y+z+\frac{5}{4}=0\}$.

Одредимо прво пројекцију криве L на координатну равн Oxy .

Лема 1 Нормална пројекција тачке $N(x_N, y_N, z_N)$ на равн Oxy је тачка $N'(x_N, y_N, 0)$.

Доказ Нормална пројекција N' тачке N на равн Oxy је тачка пресека равни Oxy и праве π_1 која садржи тачку N и нормална је на равни Oxy . Равн Oxy има једначину $z=0$, те је њен вектор нормале $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Тај вектор је уједно и вектор правца праве π_1 јер је $\pi_1 \perp Oxy$, а како π_1 садржи тачку $N(x_N, y_N, z_N)$, то је $\pi_1: \frac{x-x_N}{0} = \frac{y-y_N}{0} = \frac{z-z_N}{1} = t_1$, те су параметарске једначине праве $\pi_1: x=0 \cdot t_1 + x_N = x_N$, $y=0 \cdot t_1 + y_N = y_N$, $z=1 \cdot t_1 + z_N = t_1 + z_N$. Тачка $N' \in \pi_1$ и $N' \in Oxy$, те је $N'(x_N, y_N, 0)$. □



Нормална пројекција криве L на равни Oxy је скуп свих нормалних пројекција тачака криве L на равн Oxy .

Свака тачка $(x, y, z) \in L$ пројектује се у тачку $(x, y, 0)$ у Oxy равни на основу Леме 1.

Тачка $(x, y, z) \in L$ задовољава $z+2=x^2+y^2$, $y+z+\frac{5}{4}=0$, те како је њена пројекција тачка $(x, y, 0)$ код које се јављају само x и y , потребно је из једначина $z+2=x^2+y^2$, $y+z+\frac{5}{4}=0$ извести једначину где ће се јавити само x и y .

$$z = -y - \frac{5}{4} \rightsquigarrow z+2 = x^2+y^2 \Rightarrow -y - \frac{5}{4} + 2 = x^2+y^2, \text{ тј. } x^2+y^2+y+\frac{5}{4}-\frac{8}{4}=0 \text{ тј. } x^2+(y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}=0, \text{ тј. } x^2+(y+\frac{1}{2})^2 = \frac{4}{4}=1.$$

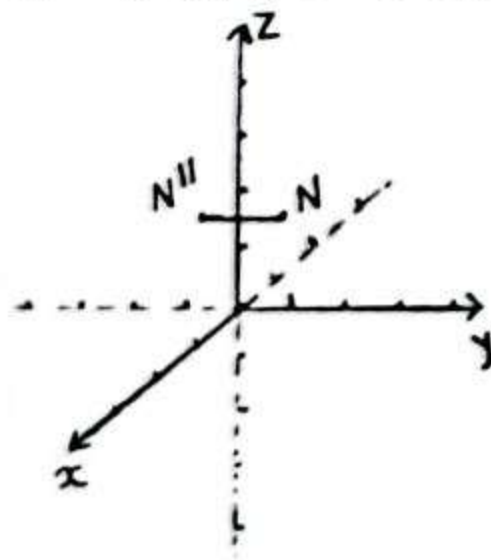
Дакле, свака тачка $(x, y, z) \in L$ задовољава $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1$, што значи да и њена пројекција $(x, y, 0)$ на равни Oxy задовољава $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1$. Дакле, нормална пројекција криве L на равни Oxy је подкуп круга $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1, z = 0$.

Докажимо сада и обрнуто, да произвољна тачка $P(x_p, y_p, 0)$ с круга $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1, z = 0$ представља нормалну пројекцију неке тачке с криве L на равни Oxy . Уочимо тачку $\tilde{P}(x_p, y_p, -y_p - \frac{5}{4})$. Тачка $\tilde{P}$ припада равни $\pi_2: y + z + \frac{5}{4} = 0$ јер је $y_p - y_p - \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = 0$ тј. $0 = 0$, а задовољава и једначину параболоида $S: z + 2 = x^2 + y^2$ јер је $-y_p - \frac{5}{4} + 2 = x_p^2 + y_p^2$ тј. $x_p^2 + y_p^2 + y_p + \frac{5}{4} - \frac{8}{4} = 0$ тј. $x_p^2 + (y_p + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$ тј. $x_p^2 + (y_p + \frac{1}{2})^2 = 1$. Како $\tilde{P} \in S \cap \pi_2$, то $\tilde{P} \in L$, те је P нормална пројекција тачке $\tilde{P} \in L$ на равни Oxy , те тачка P припада нормалној пројекцији криве L на равни Oxy . Следи да је круг $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1, z = 0$ подкуп нормалне пројекције криве L на равни Oxy , а видели смо и да је та нормална пројекција подкуп тог круга, те је нормална пројекција криве L на равни Oxy круг $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1, z = 0$.

Слично тражимо пројекцију криве L на равни Oxz .

Лема 2: Нормална пројекција тачке $N(x_N, y_N, z_N)$ на равни Oxz је тачка $N''(x_N, 0, z_N)$.

Доказ Нормална пројекција N'' тачке N на равни Oxz налази се у пресеку равни Oxz и праве π_2 која садржи тачку N и нормална је на равни Oxz . Раван Oxz има једначину $y = 0$, те је њен вектор нормале $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$. Тај вектор је уједно и вектор правца праве π_2 јер је $\pi_2 \perp Oxz$, а како π_2 садржи тачку $N(x_N, y_N, z_N)$, то је $\pi_2: \frac{x - x_N}{0} = \frac{y - y_N}{1} = \frac{z - z_N}{0} = t_2$, те су параметарске једначине праве $\pi_2: x = 0 \cdot t_2 + x_N = x_N, y = 1 \cdot t_2 + y_N = t_2 + y_N, z = 0 \cdot t_2 + z_N = z_N$. Како $N'' \in \pi_2$ и $N'' \in Oxz$, то је $N''(x_N, 0, z_N)$. $\square$



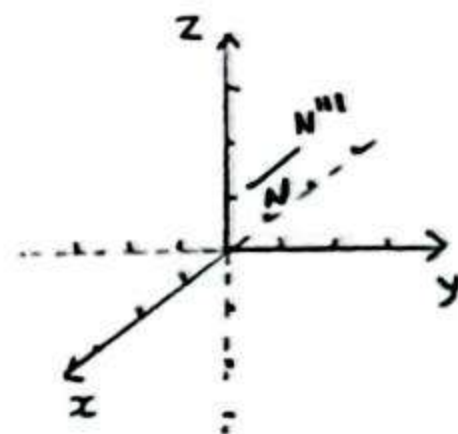
Нормална пројекција криве L на равни Oxz је скуп свих нормалних пројекција тачака криве L на равни Oxz . Свака тачка $(x, y, z) \in L$ пројектује се у тачку $(x, 0, z)$. Тачка $(x, y, z) \in L$ задовољава $z+2=x^2+y^2$, $y+z+\frac{5}{4}=0$, те како је њена пројекција тачка $(x, 0, z)$ код које се јављају само x и z , потребно је из једначина $z+2=x^2+y^2$, $y+z+\frac{5}{4}=0$ извести једначину где ће се јавити само x и z . Из друге једначине следи $y=-z-\frac{5}{4}$, што заменом у прву даје $z+2=x^2+(-z-\frac{5}{4})^2$, односно након сређивања $z+2=x^2+z^2+\frac{5}{2}z+\frac{25}{16}$ тј. $x^2+z^2+\frac{5}{2}z-z+\frac{25}{16}-2=0$, тј. $x^2+z^2+\frac{3}{2}z-\frac{7}{16}=0$, тј. $x^2+(z+\frac{3}{4})^2=1$. Дакле, тачка $(x, y, z) \in L$ задовољава $x^2+(z+\frac{3}{4})^2=1$, те и њена пројекција $(x, 0, z)$ на равни Oxz задовољава $x^2+(z+\frac{3}{4})^2=1$. Следи да је нормална пројекција криве L на равни Oxz подскуп круга $x^2+(z+\frac{3}{4})^2=1$, $y=0$.

Докажимо сада да важи и обрнуто, да произвољна тачка $Q(x_2, 0, z_2)$ с круга $x^2+(z+\frac{3}{4})^2=1$, $y=0$ представља нормалну пројекцију неке тачке с криве L на равни Oxz . Уочимо тачку $\tilde{Q}(x_2, -z_2-\frac{5}{4}, z_2)$. Тачка $\tilde{Q}$ припада равни $\pi_2: y+z+\frac{5}{4}=0$ јер је $-z_2-\frac{5}{4}+z_2+\frac{5}{4}=0$ тј. $0=0$, а задовољава и једначину параболоида $S: z+2=x^2+y^2$ јер је $z_2+2=x_2^2+(-z_2-\frac{5}{4})^2$ тј. $z_2+2=x_2^2+z_2^2+\frac{5}{2}z_2+\frac{25}{16}$ тј. $x_2^2+z_2^2+\frac{5}{2}z_2-z_2-\frac{7}{16}=0$ тј. $x_2^2+z_2^2+\frac{3}{2}z_2-\frac{7}{16}=0$, тј. $x_2^2+(z_2+\frac{3}{4})^2=1$ што је испуњено јер тачка $Q(x_2, 0, z_2)$ припада кругу $x^2+(z+\frac{3}{4})^2=1$, $y=0$. Како $\tilde{Q} \in \pi_2 \cap S$, то $\tilde{Q} \in L$, то је Q нормална пројекција тачке $\tilde{Q}$ на равни Oxz , те Q припада нормалној пројекцији криве L на равни Oxz . Зато је круг $x^2+(z+\frac{3}{4})^2=1$, $y=0$ подскуп нормалне пројекције криве L на равни Oxz , а како смо већ доказали да је та нормална пројекција подскуп тог круга, то је нормална пројекција криве L на равни Oxz круг $x^2+(z+\frac{3}{4})^2=1$, $y=0$.

Одредимо сада пројекцију криве L на координатну равн Oyz .

Лема 3 Нормална пројекција тачке $N(x_N, y_N, z_N)$ на равн Oyz је тачка $N'''(0, y_N, z_N)$.

Доказ Нормална пројекција N''' тачке N на равн Oyz налази се у пресеку равни Oyz и праве Π_3 која садржи тачку N и нормална је на равни Oyz . Равн Oyz има једначину $x=0$, те је њен вектор нормале $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$. Тај вектор је уједно и вектор правца праве Π_3 јер је $\Pi_3 \perp Oyz$, а како Π_3 садржи тачку N , то је $\Pi_3: \frac{x-x_N}{1} = \frac{y-y_N}{0} = \frac{z-z_N}{0} = t_3$, те су параметарске једначине праве $\Pi_3: x=1 \cdot t_3 + x_N$, $y=0 \cdot t_3 + y_N = y_N$, $z=0 \cdot t_3 + z_N = z_N$. Како $N''' \in \Pi_3$ и $N''' \in Oyz$, то је $N'''(0, y_N, z_N)$. □



Нормална пројекција криве L на равн Oyz је скуп нормалних пројекција свих тачака криве L на равн Oyz . Свака тачка $(x, y, z) \in L$ пројектује се у тачку $(0, y, z)$. Тачка $(x, y, z) \in L$ задовољава $z+2 = x^2 + y^2$, $y+z+\frac{5}{4}=0$, те њена пројекција $(0, y, z)$ задовољава $y+z+\frac{5}{4}=0$ и $z+2-y^2 = x^2 \geq 0$. Дакле, $z = -y - \frac{5}{4}$ и $-y - \frac{5}{4} + 2 - y^2 \geq 0$ тј. $y^2 + y + \frac{5}{4} - \frac{8}{4} \leq 0$ тј. $(y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \leq 0$ тј. $(y + \frac{1}{2} - 1)(y + \frac{1}{2} + 1) \leq 0$ тј. $(y - \frac{1}{2})(y + \frac{3}{2}) \leq 0$

$$y \in [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}].$$

У питању је дужи на правој $z = -y - \frac{5}{4}$ у равни $x=0$ чија је почетна тачка $(0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} - \frac{5}{4})$ тј. $(0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$, а крајња тачка је $(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{5}{4})$ тј. $(0, \frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$. Приметимо да је по услову задатка равн $\Pi_2 \perp Oyz$ и крива L припада равни Π_2 , било је очекивано да ће нормална пројекција криве L бити подскуп праве $z = -y - \frac{5}{4}$, $x=0$, која је пресек равни Π_2 и Oyz .

Обрнуто, нека је $R(0, y_R, z_R)$ произволна тачка дужи $z = -y - \frac{5}{4}$, $x=0$, $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. Доказујемо да је тачка R нормална пројекција неке тачке с криве L на равн Oyz . Уочимо тачку $\tilde{R}(\sqrt{z_R+2-y_R^2}, y_R, z_R)$. Тачка $\tilde{R}$ припада равни $\Pi_2: y+z+\frac{5}{4}=0$ јер је $y_R + z_R + \frac{5}{4} = 0$ зато што је $z_R = -y_R - \frac{5}{4}$ јер $R(0, y_R, z_R)$ припада дужи $z = -y - \frac{5}{4}$, $x=0$, $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. Тачка $\tilde{R}$ припада и параболоиду $S: z+2 = x^2 + y^2$ јер је $z_{\tilde{R}} + 2 = x_{\tilde{R}}^2 + y_{\tilde{R}}^2$, тј. $z_R + 2 = (\sqrt{z_R+2-y_R^2})^2 + y_R^2$ тј. $z_R + 2 = z_R + 2 - y_R^2 + y_R^2$, тј. $0=0$.

Како $\tilde{R} \in \pi_2$ и $\tilde{R} \in S$, то $\tilde{R} \in \pi_2 \cap S$, те је $R(0, y_R, z_R)$ нормална пројекција тачке $\tilde{R}(\sqrt{z_R^2 + 2 - y_R^2}, y_R, z_R) \in L$ на раван Oyz , односно тачка R припада нормалној пројекцији криве L на раван Oyz . Следи да је дуж $z = -y - \frac{5}{4}$, $x = 0$, $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ подскуп нормалне пројекције криве L на равни Oyz , а пошто је и та нормална пројекција подскуп те дужи, следи да је нормална пројекција криве L на равни Oyz дуж $z = -y - \frac{5}{4}$, $x = 0$, $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$.

Свођење површи другог реда на канонски облик

Нека је дата површ другог реда $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$, где $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} \in \mathbb{R}$ и бар један од бројева $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ није једнак 0.

Матрица A која одговара овој површи је $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$.

Приметимо да важи $(x \ y \ z \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = (x \ y \ z \ 1) \cdot \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (x \ y \ z \ 1) \cdot \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$

$$= (x \ y \ z \ 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} \\ a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} \end{pmatrix} = x \cdot (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + y \cdot (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) +$$

$$z \cdot (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}) + 1 \cdot (a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44}) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{14}x + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{24}y$$

$$+ a_{13}xz + a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_{34}z + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \text{ те се једначина површи може записати као } (x \ y \ z \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Свођење површи другог реда на канонски облик представља тражење новог Декартовог правоуглог координатног система у коме ће та површ имати канонски облик. Поступак је сличан постулку свођења кривих другог реда на канонски облик, с тим што сад имамо једну димензију више.

Први корак је елиминација коефицијената уз xy, xz и yz , па зато тражимо трансформацију координата $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ такву да у координатном систему $O'x'y'z'$ имамо једначину $(x' \ y' \ z' \ 1) A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$,

где је $A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a'_{44} \end{pmatrix}$. Ако је $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$, онда из $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ тј. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}x' + r_{12}y' + r_{13}z' \\ r_{21}x' + r_{22}y' + r_{23}z' \\ r_{31}x' + r_{32}y' + r_{33}z' \end{pmatrix}$

следи $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}x' + r_{12}y' + r_{13}z' + 0 \cdot 1 \\ r_{21}x' + r_{22}y' + r_{23}z' + 0 \cdot 1 \\ r_{31}x' + r_{32}y' + r_{33}z' + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot x' + 0 \cdot y' + 0 \cdot z' + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$. Обележимо $R_1 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} R & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

Како је $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$, то је $(x \ y \ z \ 1) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T = \left(R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot R_1^T = (x' \ y' \ z' \ 1) \cdot R_1^T$ и за тачке (x, y, z) са површи

важи $0 = (x \ y \ z \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = ((x' \ y' \ z' \ 1) R_1^T) A (R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}) = (x' \ y' \ z' \ 1) (R_1^T A R_1) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$.

Дакле, матрица $R_1^T A R_1$, формата 4×4 , представља матрицу коефицијената површи у новом координатном систему $O'x'y'z'$ и желимо да буде $R_1^T A R_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a'_{44} \end{pmatrix}$. Ако обележимо $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, онда је $A = \left(\begin{array}{ccc|c} B & \begin{smallmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{smallmatrix} \\ \hline a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{array} \right)$ и важи

$$R_1^T A R_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} R^T & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} B & \begin{smallmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{smallmatrix} \\ \hline a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} R & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} R^T B & R^T \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} \\ \hline a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} R & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} R^T B R & \begin{smallmatrix} a'_{14} \\ a'_{24} \\ a'_{34} \end{smallmatrix} \\ \hline a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a'_{44} \end{array} \right) \text{ где је } \begin{pmatrix} a'_{14} \\ a'_{24} \\ a'_{34} \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$$

(а онда је $(a'_{14} \ a'_{24} \ a'_{34}) = \left(\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} \right)^T = \left(R^T \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}^T (R^T)^T = (a_{14} \ a_{24} \ a_{34}) R$).

Дакле, матрица R треба да буде таква да задовољава $R^T B R = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}$, тј. да је матрица $R^T B R$ дијагонална.

при томе, пошто је $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, тј. R је матрица трансформације координата из Декартовог правоуглог координатног система $Oxyz$ у Декартов правоугли координатни систем $O'x'y'z'$, онда је R ортогонална матрица, тј. задовољава $RR^T = R^T R = E$, што значи да је $R^{-1} = R^T$. Дакле, проблем елиминисања коефицијената уз xu, xz и yz своди се на дијагонализацију матрице

$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$. Како је B симетрична матрица, теорема из Линеарне алгебре гарантује да постоји ортогонална матрица R таква да је $R^{-1} B R = R^T B R$ дијагонална матрица, те је могуће извршити елиминацију коефицијената уз xu, xz и yz .

На крају, површ $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0$ сводимо на канонски облик тако што од $a'_{11}x'^2 + 2a'_{14}x'$ правимо потпун квадрат (ако је $a'_{11} \neq 0$), тј. правимо израз $a'_{11}(x'^2 + 2 \cdot x' \cdot \frac{a'_{14}}{a'_{11}} + \frac{a'^2_{14}}{a'^2_{11}}) = a'_{11} \cdot (x' + \frac{a'_{14}}{a'_{11}})^2$ и слично и за $a'_{22}y'^2 + 2a'_{24}y'$ (ако је $a'_{22} \neq 0$) и за $a'_{33}z'^2 + 2a'_{34}z'$ (ако је $a'_{33} \neq 0$).

7.14. Свести једначину површи на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације: 1) $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8x + 8y - z + 10 = 0$; 2) $12x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 12xz - 12yz - 4 = 0$.

Решење: 1) $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8x + 8y - z + 10 = 0 \Rightarrow a_{11} = 3, a_{22} = 3, a_{33} = 0, 2a_{12} = -2$ тј. $a_{12} = -1, a_{13} = 0, a_{23} = 0,$
 $2a_{14} = -8$ тј. $a_{14} = -4, 2a_{24} = 8$ тј. $a_{24} = 4, 2a_{34} = -1$ тј. $a_{34} = -\frac{1}{2},$
 $a_{44} = 10$

Матрица A придружена површи $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8x + 8y - z + 10 = 0$ је $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 4 & -\frac{1}{2} & 10 \end{pmatrix}$.

Наредни корак у свођењу на канонски облик је да уочимо подматрицу $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и да је дијагонализујемо. То чинимо израчунавањем сопствених вредности и сопствених вектора од B .

$$\Psi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-1)^{3+3} \cdot (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (-\lambda) \cdot ((3-\lambda)^2 - (-1)^2) =$$

$$= 1 \cdot (-\lambda) \cdot (3-\lambda - (-1)) \cdot (3-\lambda + 1) = -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda)$$

Сопствене вредности матрице B су решења једначине $-\lambda(2-\lambda)(4-\lambda) = 0$, односно $\lambda = 0, \lambda = 2$ и $\lambda = 4$.

1° $\lambda = 0$

Тражимо сопствене векторе матрице $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ који одговарају сопственој вредности $\lambda = 0$, тј. тражимо $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ такве да је $B \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 3u - v = 0 \\ -u + 3v = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \xrightarrow{1 \cdot 3} \begin{array}{l} 3u - v = 0 \\ -3u + 9v = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \xrightarrow{+} \begin{array}{l} 8v = 0 \Rightarrow v = 0 \\ u = 3v = 3 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

Сопствени вектори су $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$, за све $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Међу њима одаберимо неки који је јединични,

тј. има норму једнаку 1. Како је $\|(0,0,w)\| = \sqrt{0^2+0^2+w^2} = \sqrt{w^2} = |w|$, вектори норме 1 су они за које је $|w|=1$, тј. $w \in \{-1,1\}$. Одаберимо нпр. $w=1$, тј. вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2° $\lambda=2$

Сада тражимо сопствене векторе матрице B који одговарају сопственој вредности $\lambda=2$.

$$B \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 2w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3u-v \\ -u+3v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 2w \end{pmatrix}$$

$$3u-v=2u \Rightarrow 3u-2u=v \Rightarrow u=v$$

$$-u+3v=2v \Rightarrow 3v-2v=u \Rightarrow u=v$$

$$0=2w \Rightarrow w=0$$

Дакле, сопствени вектори су $\begin{pmatrix} u \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$ за све $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Бирамо неки од њих који је норме 1. Како је

$$\|(u,u,0)\| = \sqrt{u^2+u^2+0^2} = \sqrt{2u^2} = |u|\sqrt{2}, \text{ вектори норме 1}$$

су они за које је $|u|\sqrt{2}=1$ тј. $|u|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ тј. $u \in \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

Одаберимо $u=\frac{1}{\sqrt{2}}$ тј. вектор $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

3° $\lambda=4$

$$B \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u \\ 4v \\ 4w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3u-v \\ -u+3v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u \\ 4v \\ 4w \end{pmatrix}$$

$$3u-v=4u \quad -v=4u-3u \quad -v=u$$

$$-u+3v=4v \quad -u=4v-3v \quad -u=v$$

$$0=4w \quad w=0$$

Сопствени вектори су $\begin{pmatrix} u \\ -u \\ 0 \end{pmatrix}$ за све $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Интересује нас неки од њих који је јединични $\|(u,-u,0)\| = \sqrt{u^2+(-u)^2+0^2} = \sqrt{2u^2} = |u|\sqrt{2}$.

Дакле, јединични вектори су они за које је $|u|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ тј. $u \in \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

Одаберимо нпр. $u=\frac{1}{\sqrt{2}}$ тј. вектор $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Одабрани јединични сопствени вектори $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ чине колоне ортогоналне матрице R такве да је $R^T B R$ дијагонална матрица. Зато уводимо нови Декартов правоугли координатни систем $O'x'y'z'$ такав да је $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, где је $R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тада је $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_1 \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, где је $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} R & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

У координатном систему $O'x'y'z'$ матрица коефицијената површи је:

$$A' = R_1^T A R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 4 & -\frac{1}{2} & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -\frac{1}{2} & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 10 \end{pmatrix}$$

Другим речима, у координатном систему $O'x'y'z'$ површ има једначину

$$0 \cdot x'^2 + 2 \cdot y'^2 + 4 \cdot z'^2 + 2 \cdot 0 \cdot x'y' + 2 \cdot 0 \cdot x'z' + 2 \cdot 0 \cdot y'z' + 2 \cdot (-\frac{1}{2})x' + 2 \cdot 0 \cdot y' + 2 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})z' + 10 = 0,$$

$$\text{односно } 2y'^2 + 4z'^2 - x' - \sqrt{2}z' + 10 = 0.$$

$$2y'^2 + 4 \cdot (z'^2 - \sqrt{2}z') - x' + 10 = 0$$

$$2y'^2 + 4 \cdot ((z' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2) - x' + 10 = 0$$

$$2y'^2 + 4(z' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 8 - x' + 10 = 0$$

$$2y'^2 + 4(z' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = x' - 2$$

Сада уводимо нови Декартов правоугли координатни систем $O''x''y''z''$ такав да је $x'' = x' - 2$, $y'' = y'$ и $z'' = z' - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Једначина површи постаје $2y''^2 + 4z''^2 = x''$.

Из теорије о класификацији површи другог реда препознајемо једначину елиптичког параболоида.

Тражене формуле трансформације су

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' + 2 \\ y'' \\ z'' + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'' + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'' - 1 \\ x'' + 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{тј. } \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'' + 1 \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'' - 1 \\ z &= x'' + 2. \end{aligned}$$

$$2) 12x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 12xz - 12yz - 4 = 0 \Rightarrow a_{11}=12, a_{22}=6, a_{33}=9, a_{13}=\frac{-12}{2}=-6, a_{23}=\frac{-12}{2}=-6, a_{12}=0, a_{14}=0, a_{24}=0, a_{34}=0, a_{44}=-4$$

Матрица придружена површи $12x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 12xz - 12yz - 4 = 0$ је $A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Наредни корак у свођењу на канонски облик је да уочимо подматрицу $B = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \\ -6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ и да је дијагонализујемо.

То чинимо израчунавањем сопствених вредности и сопствених вектора од B .

$$\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 12-\lambda & 0 & -6 \\ 0 & 6-\lambda & -6 \\ -6 & -6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (12-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 6-\lambda & -6 \\ -6 & 9-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-6) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6-\lambda \\ -6 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (12-\lambda) \cdot ((6-\lambda)(9-\lambda) - (-6) \cdot (-6))$$

$$+ (-1)^4 \cdot (-6) \cdot (0 \cdot (-6) - (-6) \cdot (6-\lambda)) = 1 \cdot (12-\lambda) (54 - 6\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - 36) + 1 \cdot (-6) \cdot 6(6-\lambda) = (12-\lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 18) - 36(6-\lambda) =$$

$$= \underline{12\lambda^2} - 180\lambda + \underline{216} - \lambda^3 + 15\lambda^2 - 18\lambda - \underline{216} + 36\lambda = -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 180\lambda + 18\lambda = -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 162\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 27\lambda + 162) =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda - 18\lambda + 162) = -\lambda(\lambda(\lambda-9) - 18(\lambda-9)) = -\lambda(\lambda-9)(\lambda-18)$$

Сопствене вредности матрице B су решења једначине $-\lambda(\lambda-9)(\lambda-18)=0$, односно $\lambda=0, \lambda=9$ и $\lambda=18$.

$$\begin{array}{r} 12 \cdot 15 = 60 \\ + 12 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \cdot 18 = 96 \\ + 12 \\ \hline 216 \end{array}$$

1° $\lambda=0$

Тражимо сопствене векторе матрице $B = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \\ -6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ који одговарају сопственој вредности $\lambda=0$, тј.

тражимо $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ такве да је $B \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \\ -6 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$12u - 6w = 0$$

$$6v - 6w = 0$$

$$-6u - 6v + 9w = 0$$

$$\begin{array}{l} \boxed{-6u} - 6v + 9w = 0 \\ 12u - 6w = 0 \end{array} \xrightarrow{+}$$

$$6v - 6w = 0$$

$$\begin{array}{l} \boxed{-6u} - 6v + 9w = 0 \\ -12v + 12w = 0 \end{array} \xrightarrow{/:12}$$

$$6v - 6w = 0 \xrightarrow{/:6}$$

$$\boxed{-6u} - 6v + 9w = 0$$

$$\boxed{-v} + w = 0$$

$$v - w = 0$$

$$\boxed{-6u} - 6v + 9w = 0$$

$$\boxed{-v} + w = 0$$

$$0 = 0$$

$$v = w$$

$$-6u = 6v - 9w = 6w - 9w$$

$$= -3w$$

$$u = \frac{-3w}{-6} = \frac{w}{2}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w}{2} \\ w \\ w \end{pmatrix} = \frac{w}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Сопствени вектори су $\frac{w}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ за све $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Међу њима одaberимо неки који је јединични тј. има норму једнаку 1. Како је $\|(\frac{w}{2}, w, w)\| = \sqrt{(\frac{w}{2})^2 + w^2 + w^2} = \sqrt{\frac{w^2}{4} + 2w^2} = \sqrt{\frac{9w^2}{4}} = \frac{3|w|}{2}$, вектори норме 1 су они за које је $|w| = \frac{2}{3}$, тј. $w \in \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$. Одaberимо нпр. $w = \frac{2}{3}$, тј. вектор $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2° $\lambda = 9$

Сада тражимо сопствене векторе матрице B који одговарају сопственој вредности $\lambda = 9$.

$$B \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \\ -6 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9u \\ 9v \\ 9w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12u - 6w \\ 6v - 6w \\ -6u - 6v + 9w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9u \\ 9v \\ 9w \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 12u - 6w &= 9u \\ 6v - 6w &= 9v \\ -6u - 6v + 9w &= 9w \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 3u - 6w &= 0 & | :3 \\ -3v - 6w &= 0 & | :(-3) \\ -6u - 6v &= 0 & | :(-6) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u - 2w &= 0 \\ v + 2w &= 0 \\ u + v &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= 2w \\ v &= -2w \\ u + v &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} u &= 2w \\ v &= -2w \\ 2w - 2w &= 0 \\ 0 &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w \\ -2w \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Дакле, сопствени вектори су $w \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ за све $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Бирамо неки од њих који је норме 1.

Како је $\|(2w, -2w, w)\| = \sqrt{(2w)^2 + (-2w)^2 + w^2} = \sqrt{4w^2 + 4w^2 + w^2} = \sqrt{9w^2} = \sqrt{(3w)^2} = |3w| = 3|w|$, вектори норме 1 су они за које је $|w| = \frac{1}{3}$, тј. $w \in \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$. Одaberимо нпр. $w = \frac{1}{3}$, тј. вектор $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3° $\lambda = 18$

$$B \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 18 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \\ -6 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18u \\ 18v \\ 18w \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 12u - 6w &= 18u \\ 6v - 6w &= 18v \\ -6u - 6v + 9w &= 18w \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -6u - 6w &= 0 & | :(-6) \\ -12v - 6w &= 0 & | :(-6) \\ -6u - 6v - 9w &= 0 & | :(-3) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u + w &= 0 \\ 2v + w &= 0 \\ 2u + 2v + 3w &= 0 \end{aligned}$$

$$u = -w$$

$$\Rightarrow 2v = -w$$

$$v = -\frac{w}{2}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-w) + 2 \cdot (-\frac{w}{2}) + 3w &= 0 \\ -2w - w + 3w &= 0 \\ 0 &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w \\ -\frac{w}{2} \\ w \end{pmatrix} = \frac{w}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Дакле, сопствени вектори су $\frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ за све $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Бирамо неки од њих који је норме 1.

Како је $\|(-\omega, -\frac{\omega}{2}, \omega)\| = \sqrt{(-\omega)^2 + (-\frac{\omega}{2})^2 + \omega^2} = \sqrt{\omega^2 + \frac{\omega^2}{4} + \omega^2} = \sqrt{2\omega^2 + \frac{\omega^2}{4}} = \sqrt{\frac{9\omega^2}{4}} = \frac{3|\omega|}{2}$, вектори норме 1 су они за које је $\frac{3|\omega|}{2} = 1$, тј. $|\omega| = \frac{2}{3}$, тј. $\omega \in \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$. Одаберимо $\omega = -\frac{2}{3}$ тј. вектор $-\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Одабрани јединични сопствени вектори $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ чине колоне ортогоналне матрице R такве да је $R^T B R$ дијагонална матрица. Зато уводимо нови Декартов правоугли координатни систем $O'x'y'z'$ такав да је

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ где је } R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Тада је } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ где је } R_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(R \mid \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right).$$

У координатном систему $O'x'y'z'$ матрица коефицијената површи је:

$$A' = R_1^T A R_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Другим речима, у координатном систему $O'x'y'z'$ површ има једначину $9y'^2 + 18z'^2 - 4 = 0$.

$$9y'^2 + 18z'^2 = 4 \text{ тј. } \frac{y'^2}{\frac{4}{9}} + \frac{z'^2}{\frac{4}{18}} = 1$$

Из теорије о класификацији површи другог реда препознајемо једначину елиптичког цилиндра.