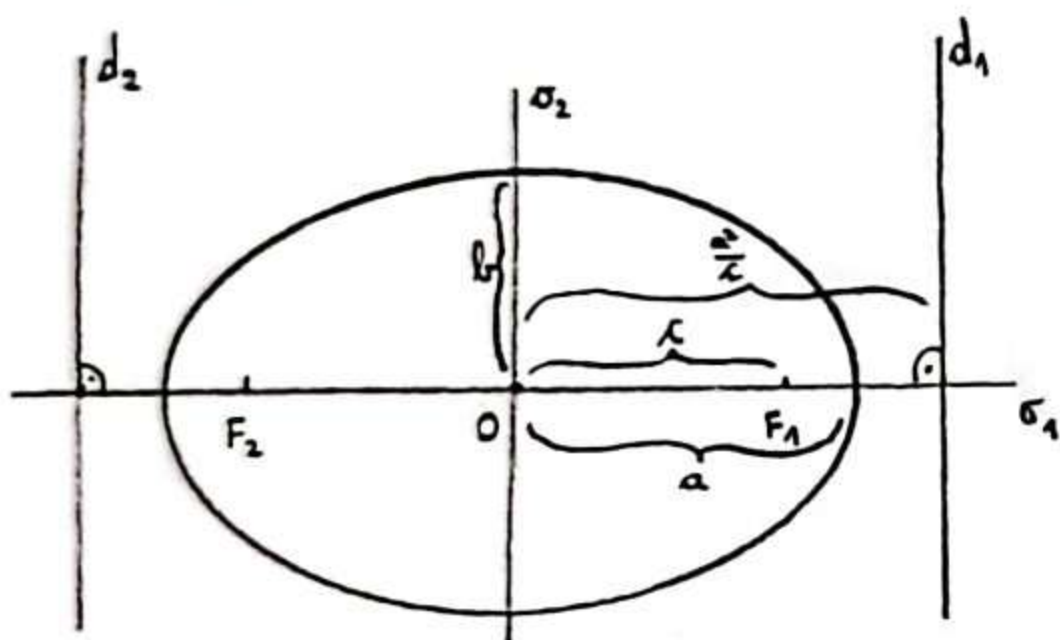


Криве другог реда

- Крива другог реда је скуп тачака (x, y) у равни Oxy такав да је $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, за неке $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$, при чему је бар један од бројева a_{11}, a_{12}, a_{22} различит од нуле.
- Постоје три врсте недегенерисаних кривих другог реда и то су елипса (специјалан случај је круг), хипербола и парабол.

Елипса



Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$.

Тада је $O(0,0)$ центар и $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ су жиже, при чему је $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ако тачка $T(x_T, y_T)$ припада елипси, једначина тангенте те елипсе у тачки T је $t: \frac{xx_T}{a^2} + \frac{yy_T}{b^2} = 1$. Једначине директриса су $d_1: x = \frac{a^2}{c}$ и $d_2: x = -\frac{a^2}{c}$. Једначине оса су $\sigma_1: y = 0$, $\sigma_2: x = 0$. За сваку тачку елипсе важи да је збир растојања од ње до једне и друге жиже елипсе једнак дужини велике осе, тј. $TF_1 + TF_2 = 2a$, за све тачке T са елипсе.

O - центар (то је центар симетрије)

F_1, F_2 - жиже (фокуси) d_1, d_2 - директрисе

a - велика полуоса b - мала полуоса $a > b$

Елипса има две осе симетрије (једна садржи велику, а друга малу полуосу)

$$c^2 = a^2 - b^2$$

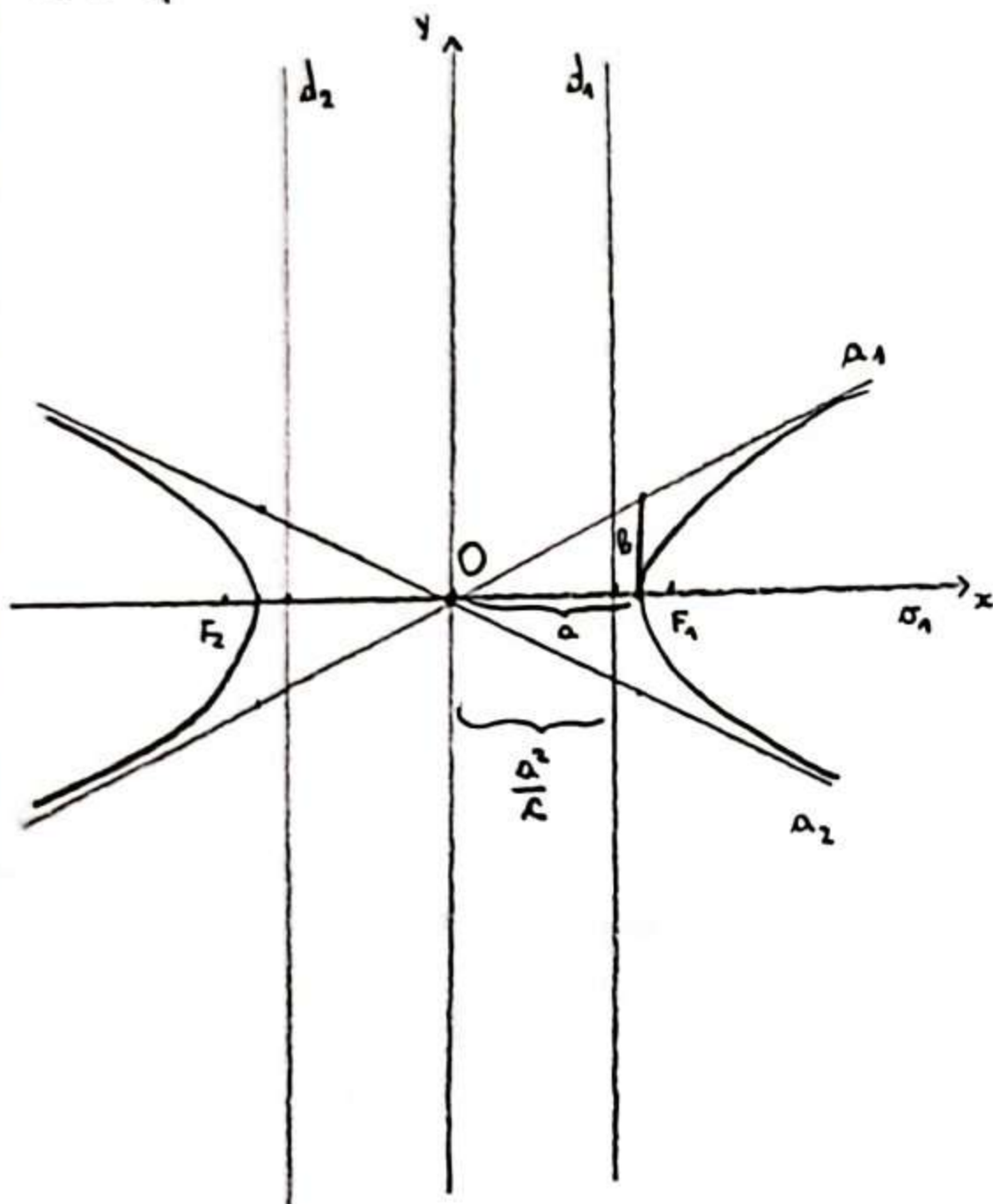
$e = \frac{c}{a}$ ексцентрицитет (важи $0 < e < 1$)

O је средиште F_1F_2 и важи $OF_1 = OF_2 = c$

$$d(O, d_1) = d(O, d_2) = \frac{a^2}{c}$$

F_1, F_2 припадају оси која садржи велику полуосу елипсе, а d_1, d_2 су нормалне на њој

Хипербола



O - центар (то је центар симетрије)

F_1, F_2 - жижне (фокуси) d_1, d_2 - директрисе

a - растојање од центра до темена

b - висина од темена до правах a_1, a_2

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$e = \frac{c}{a}$ ексцентрицитет ($e > 1$)

Хипербола има две осе симетрије (једна садржи темена хиперболе, а друга је нормална на њој у центру хиперболе)

O је средиште $F_1 F_2$

$$OF_1 = OF_2 = c, \quad d(O, d_1) = d(O, d_2) = \frac{a^2}{c}$$

F_1, F_2 припадају оси која садржи темена, а d_1, d_2 су нормалне на њој

a_1, a_2 су асимптоте (косе)

Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме хипербола има једначину $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тада је $O(0,0)$ центар и $F_1(c,0), F_2(-c,0)$

су жижне, при чему је $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ако тачка $T(x_T, y_T)$ припада хиперболи, једначина тангенте хиперболе у тачки T је $\frac{xx_T}{a^2} - \frac{yy_T}{b^2} = 1$.

Једначине директриса су: $d_1: x = \frac{a^2}{c}, \quad d_2: x = -\frac{a^2}{c}$.

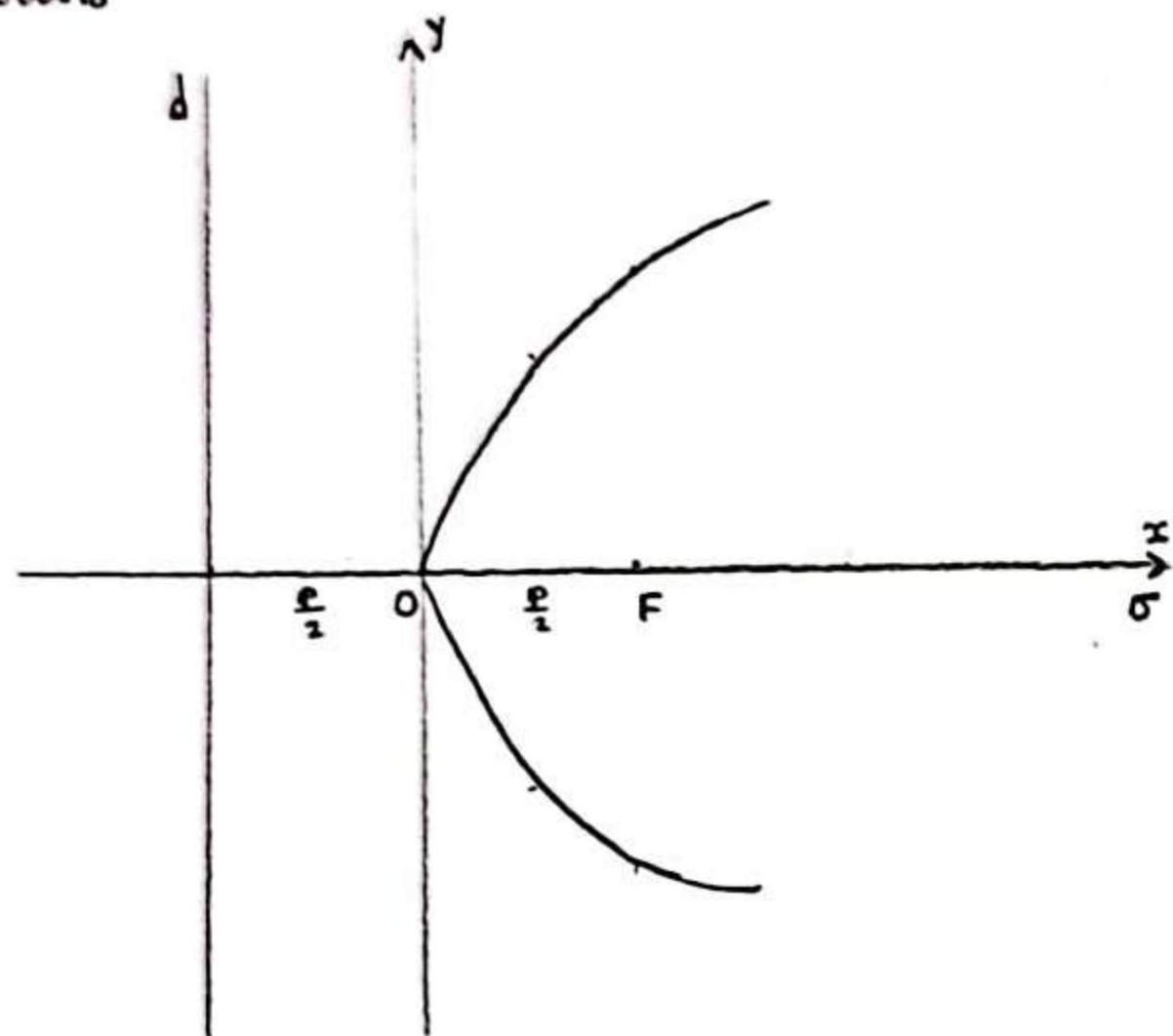
Једначине оса су: $\sigma_1: y = 0, \quad \sigma_2: x = 0$.

Једначине асимптота су: $a_1: \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad a_2: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, тј. $a_1: y = \frac{b}{a}x$,

$$a_2: y = -\frac{b}{a}x.$$

За сваку тачку хиперболе важи да је разлика растојања од ње до једне и друге жиже хиперболе једнака $2a$, тј. $|TF_1 - TF_2| = 2a$, за све тачке T са хиперболе.

Парабола



Нема центар.

F - жижа (фокус)

d - директриса

O - теме параболе

$$d(O, F) = d(O, d) = \frac{p}{2}$$

$$e = 1$$

Парабола има једну осу симетрије која садржи теме и жижу, а директриса је нормална на оси.

Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме парабола има једначину $y^2 = 2px$, $p > 0$.

Тада је $O(0,0)$ теме, $F(\frac{p}{2}, 0)$ је жижа, $d: x = -\frac{p}{2}$ је једначина директрисе, $\sigma: y = 0$ је једначина осе.

Ако је $T(x_T, y_T)$ тачка са параболе, онда је једначина тангенте на параболу у тачки T дата са $\epsilon: yy_T = p(x + x_T)$.

За сваку тачку параболе важи да је растојање од ње до жиже исто као растојање од ње до директрисе.

Теорема: За сваку тачку T са недегенерисане криве другог реда важи $\frac{d(T, F)}{d(T, d)} = e$ (за елипсу и хиперболу се F и d узимају са истим индексом).

5 Криве другог реда

5.1. а) Доказати да средишта тетива паралелних дијаметру p елипсе (хиперболе) припадају некој правој q која пролази кроз центар елипсе (хиперболе).

Решење: Дијаметар елипсе, односно хиперболе, јесте њена тетива (дуж чији су крајеви тачке са елипсе, односно хиперболе) која садржи њен центар.

Постоји Декартов правоугли координатни систем такав да је једначина дате криве $\frac{x^2}{a^2} + \beta \frac{y^2}{b^2} = 1$, где је $\beta = 1$ ако је посматрана крива елипса, односно $\beta = -1$ ако је посматрана крива хипербола.

Тада је $O(0,0)$ центар криве, а једначина праве на којој је посматрани дијаметар p је $p: \frac{x-\vartheta}{\mu} = \frac{y-\varphi}{\psi}$, где је $(\mu, \vartheta) \neq (0,0)$ ненула вектор који представља вектор правца праве p .

Нека је KL произвољна тетива посматране криве, при чему су $K(x_K, y_K)$ и $L(x_L, y_L)$ координате тачака K и L .

$$\Rightarrow \frac{x_K^2}{a^2} + \beta \frac{y_K^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_L^2}{a^2} + \beta \frac{y_L^2}{b^2} = 1 \quad \text{јер тачке } K \text{ и } L \text{ припадају посматраној криви.}$$

Да би KL била тетива паралелна дијаметру p , мора бити $q: \frac{x-x_K}{\mu} = \frac{y-y_K}{\psi}$ једначина праве којој припада та тетива.

$$L \in KL \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}) \quad \frac{x_L - x_K}{\mu} = \frac{y_L - y_K}{\psi} = \lambda \Rightarrow x_L = \mu\lambda + x_K, \quad y_L = \psi\lambda + y_K \quad \text{и ово заменимо у } \frac{x_L^2}{a^2} + \beta \frac{y_L^2}{b^2} = 1.$$

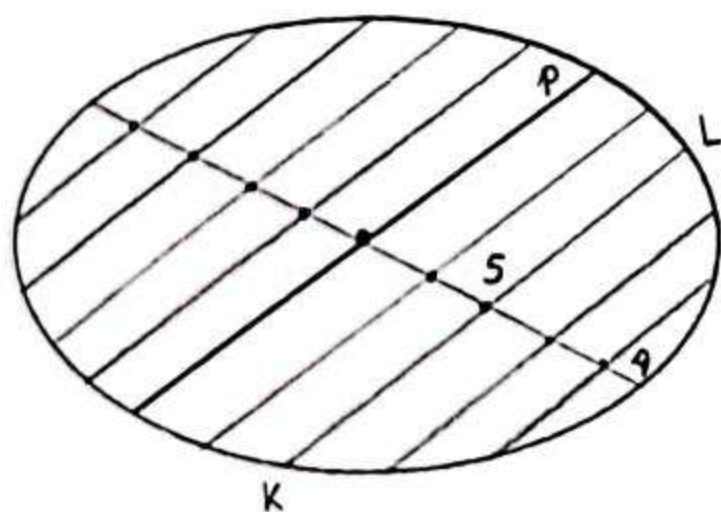
$$\begin{aligned} \frac{(\mu\lambda + x_K)^2}{a^2} + \beta \frac{(\psi\lambda + y_K)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{\mu^2\lambda^2 + 2\lambda x_K\mu + x_K^2}{a^2} + \beta \frac{\psi^2\lambda^2 + 2\lambda y_K\psi + y_K^2}{b^2} &= \frac{x_K^2}{a^2} + \beta \frac{y_K^2}{b^2} \\ \frac{\mu^2\lambda^2}{a^2} + \frac{2\lambda x_K\mu}{a^2} + \frac{x_K^2}{a^2} + \beta \frac{\psi^2\lambda^2}{b^2} + 2\beta\lambda \frac{y_K\psi}{b^2} + \beta \frac{y_K^2}{b^2} &= \frac{x_K^2}{a^2} + \beta \frac{y_K^2}{b^2} \end{aligned}$$

$$\lambda \cdot \left(\frac{\mu^2\lambda}{a^2} + \frac{2x_K\mu}{a^2} + \beta \frac{\psi^2\lambda}{b^2} + 2\beta \frac{y_K\psi}{b^2} \right) = 0$$

$$\lambda \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{x_K\mu}{a^2} + \beta \frac{y_K\psi}{b^2} \right) + \lambda \left(\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\psi^2}{b^2} \right) \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \quad \text{или} \quad 2 \cdot \left(\frac{x_K\mu}{a^2} + \beta \frac{y_K\psi}{b^2} \right) + \lambda \left(\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\psi^2}{b^2} \right) &= 0 \\ \lambda = - \frac{2 \left(\frac{x_K\mu}{a^2} + \beta \frac{y_K\psi}{b^2} \right)}{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\psi^2}{b^2}} \end{aligned}$$

мора бити $\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\psi^2}{b^2} \neq 0$ јер тражимо пресек праве q и посматране криве, а знамо да у пресеку постоје две различите тачке K и L



Средиште S дужи KL има координате $S\left(\frac{x_K+x_L}{2}, \frac{y_K+y_L}{2}\right)$.

$$\frac{x_K+x_L}{2} = \frac{x_K+x_{K+u\lambda}}{2} = \frac{2x_K+u\lambda}{2} = \frac{2x_K}{2} + \frac{u\lambda}{2} = x_K + \frac{u}{2} \cdot \left(- \frac{2\left(\frac{x_K u}{a^2} + \beta \frac{y_K u}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}} \right) = x_K - \frac{\frac{x_K u^2}{a^2} + \frac{y_K u^2}{b^2} \beta}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}} = \frac{\frac{x_K u^2}{a^2} + \beta \frac{y_K u^2}{b^2} - \frac{x_K u^2}{a^2} - \frac{\beta y_K u^2}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{\beta \frac{u}{b^2} \cdot (x_K u - y_K u)}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}}$$

$$\frac{y_K+y_L}{2} = \frac{y_K+y_{K+u\lambda}}{2} = \frac{2y_K+u\lambda}{2} = \frac{2y_K}{2} + \frac{u\lambda}{2} = y_K + \frac{u}{2} \cdot \left(- \frac{2\left(\frac{x_K u}{a^2} + \beta \frac{y_K u}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}} \right) = y_K - \frac{\frac{x_K u u}{a^2} + \frac{\beta y_K u^2}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}} = \frac{\frac{y_K u^2}{a^2} + \beta \frac{y_K u^2}{b^2} - \frac{x_K u u}{a^2} - \frac{\beta y_K u^2}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{-\frac{u}{a^2} (x_K u - y_K u)}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}}. \text{ Означимо } x_S = \frac{x_K+x_L}{2} \text{ и } y_S = \frac{y_K+y_L}{2}. \text{ Ако је } y_S = \frac{y_K+y_L}{2} \neq 0, \text{ онда је}$$

$$\frac{x_S}{y_S} = \frac{\frac{x_K+x_L}{2}}{\frac{y_K+y_L}{2}} = \frac{\frac{\beta \frac{u}{b^2} (x_K u - y_K u)}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}}}{\frac{-\frac{u}{a^2} (x_K u - y_K u)}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}}} = \frac{\beta \frac{u}{b^2}}{-\frac{u}{a^2}} \Rightarrow \text{Таква средишта тетива паралелних дијаметру } p \text{ посматране}$$

криве припадају правој $q: \frac{x}{\beta \frac{u}{b^2}} = \frac{y}{-\frac{u}{a^2}}$ и важи да

та права садржи центар $(0,0)$ криве (јер је $\frac{0}{\beta \frac{u}{b^2}} = \frac{0}{-\frac{u}{a^2}} = 0$).

Ако је $y_S = \frac{y_K+y_L}{2} = \frac{-\frac{u}{a^2} (x_K u - y_K u)}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}} = 0$, то значи да је $u=0$ или $x_K u - y_K u = 0$. Ако је $u=0$, онда је $u \neq 0$

јер је $(u, u) \neq (0,0)$ и права p на којој је дијаметар има једначину $\frac{x}{0} = \frac{y}{u}$ тј. $x=0$, а то је y оса.

Тада за сваку тачку K добијамо да средиште S тетиве KL која је паралелна дијаметру p , односно y оси, због симетрије посматране криве, припада x оси тј. правој $y=0$. Овај резултат се уклапа у малопре добијени јер је $q: \frac{x}{\beta \frac{u}{b^2}} = \frac{y}{-\frac{u}{a^2}}$ за $u=0$ заправо $q: \frac{x}{\beta \frac{u}{b^2}} = \frac{y}{0}$ тј. x оса. Ако је $x_K u - y_K u = 0$, онда је и

$$x_S = \frac{x_K+x_L}{2} = \frac{\beta \frac{u}{b^2} (x_K u - y_K u)}{\frac{u^2}{a^2} + \beta \frac{u^2}{b^2}} = 0. \text{ То значи да смо тачку } K \text{ одабрали тако да је средиште тетиве } KL \text{ тачка } (0,0),$$

а та тачка је и на дијаметру са којим је тетива KL паралелна, те је KL у овом случају посматрани дијаметар.

Тачка $S(0,0)$ задовољава једначину $q: \frac{x}{\beta \frac{u}{b^2}} = \frac{y}{-\frac{u}{a^2}}$, те у сваком од могућих случајева средишта тетива паралелних

посматраном дијаметру припадају правој $q: \frac{x}{\beta \frac{u}{b^2}} = \frac{y}{-\frac{u}{a^2}}$.

б) Доказати да су тангенте у крајевима дијаметра p паралелне правој q .

Решење: Нека је $A(x_A, y_A)$ једна од крајњих тачака дијаметра p .

$$A(x_A, y_A) \in p: \frac{x}{\mu} = \frac{y}{\nu} \Rightarrow \frac{x_A}{\mu} = \frac{y_A}{\nu} = t \Rightarrow x_A = \mu t, y_A = \nu t$$

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \beta \frac{y_A^2}{b^2} = 1 \quad * \quad \text{јер је тачка } A(x_A, y_A) \text{ на посматраној кривој}$$

$$\Rightarrow \frac{(\mu t)^2}{a^2} + \beta \frac{(\nu t)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\mu^2 t^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2 t^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2} \right) t^2 = 1$$

$$t^2 = \frac{1}{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2}}$$

$\left| : \frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2} \neq 0 \right.$ јер би у супротном било $0=1$

Мора бити $\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2} > 0$ да бисмо имали два реална решења за t јер дијаметар p сече посматрану криву у две тачке.

$$t = - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2}}} \quad \text{или} \quad t = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2}}}$$

Једно од ових решења одговара тачки A , а друго тачки $B(x_B, y_B)$ која је друга крајња тачка дијаметра p .

$$\text{Нека је, без умањења општости, } x_A = \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2}}} = \frac{\mu}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2}}} \quad \text{и} \quad y_A = \nu \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2}}} = \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2}}}$$

Тангента t_A у тачки A има једначину $t_A: \frac{xx_A}{a^2} + \beta \frac{yy_A}{b^2} = 1$.

$$\frac{xx_A}{a^2} + \beta \frac{yy_A}{b^2} = \frac{x_A^2}{a^2} + \beta \frac{y_A^2}{b^2}$$

$$\frac{xx_A}{a^2} - \frac{x_A^2}{a^2} = \beta \frac{y_A^2}{b^2} - \beta \frac{yy_A}{b^2}$$

$$\frac{x_A}{a^2} \cdot (x - x_A) = -\beta \frac{y_A}{b^2} (y - y_A)$$

$$\frac{x - x_A}{-\beta \frac{y_A}{b^2}} = \frac{y - y_A}{\frac{x_A}{a^2}}$$

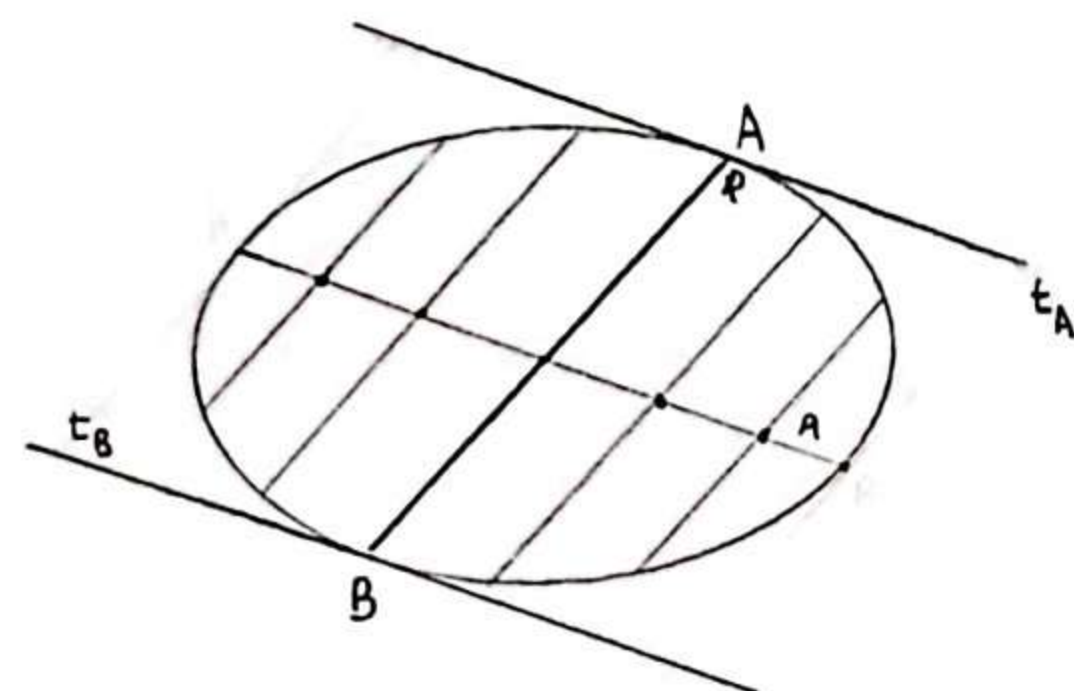
$$\frac{x - x_A}{-\beta \frac{\nu}{b^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2}}}} = \frac{y - y_A}{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2}}}}$$

$$\Rightarrow t_A: \frac{x - x_A}{-\beta \frac{\nu}{b^2}} = \frac{y - y_A}{\frac{\mu}{a^2}} \Rightarrow \text{Пошто права } t_A \text{ има исти вектор правца као и права } q: \frac{x}{\beta \frac{\nu}{b^2}} = \frac{y}{-\frac{\mu}{a^2}}, \text{ тј. } q: \frac{x}{-\frac{\nu}{b^2}} = \frac{y}{\frac{\mu}{a^2}}, \text{ то је } t_A \parallel q.$$

ово јесте једначина праве јер $(-\beta \frac{y_A}{b^2}, \frac{x_A}{a^2}) \neq (0,0)$ зато што ако би $-\beta \frac{y_A}{b^2} = 0$ и $\frac{x_A}{a^2} = 0$, онда би било $y_A = 0$ и $x_A = 0$, тј. $\frac{\nu}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2}}} = 0$ и

$$\frac{\mu}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{\nu^2}{b^2}}} = 0, \text{ односно } \nu = 0 \text{ и } \mu = 0, \text{ а то}$$

није могуће јер за вектор правца (μ, ν) праве p на којој је дијаметар важи да је различит од $(0,0)$.



$$x_B = \mu \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{v^2}{b^2}}} \right) = \frac{-\mu}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{v^2}{b^2}}} \quad y_B = v \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{v^2}{b^2}}} \right) = \frac{-v}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{v^2}{b^2}}}$$

Тангента t_B у тачки B има једначину $t_B: \frac{xx_B}{a^2} + \beta \frac{yy_B}{b^2} = 1$ важи $\frac{x_B^2}{a^2} + \beta \frac{y_B^2}{b^2} = 1$ јер тачка B припада посматраној кривој

$$\frac{xx_B}{a^2} + \beta \frac{yy_B}{b^2} = \frac{x_B^2}{a^2} + \beta \frac{y_B^2}{b^2}$$

$$\frac{xx_B}{a^2} - \frac{x_B^2}{a^2} = \beta \frac{y_B^2}{b^2} - \beta \frac{yy_B}{b^2}$$

$$\frac{x_B}{a^2} \cdot (x - x_B) = -\frac{\beta y_B}{b^2} (y - y_B)$$

$$\frac{x - x_B}{-\frac{\beta y_B}{b^2}} = \frac{y - y_B}{\frac{x_B}{a^2}}$$

$$\frac{x - x_B}{-\frac{\beta}{b^2} \cdot \frac{-v}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{v^2}{b^2}}}} = \frac{y - y_B}{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{-\mu}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{v^2}{b^2}}}}$$

$$\Rightarrow t_B: \frac{x - x_B}{\frac{\beta v}{b^2}} = \frac{y - y_B}{-\frac{\mu}{a^2}} \Rightarrow \text{Пошто права } t_B \text{ има исти вектор правца као и права } q: \frac{x}{\beta \frac{v}{b^2}} = \frac{y}{-\frac{\mu}{a^2}}, \text{ то је } t_B \parallel q.$$

ово јесте једначина праве јер $(-\beta \frac{y_B}{b^2}, \frac{x_B}{a^2}) \neq (0,0)$ зато што ако би $-\beta \frac{y_B}{b^2} = 0$ и $\frac{x_B}{a^2} = 0$, онда би било $y_B = 0$ и $x_B = 0$, тј. $\frac{-v}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{v^2}{b^2}}} = 0$ и $\frac{-\mu}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \beta \frac{v^2}{b^2}}} = 0$, односно $v = 0$ и $\mu = 0$,

а то није могуће јер за вектор правца (μ, v) праве p на којој је дијаметар важи да је различит од $(0,0)$.

$\Rightarrow$ Тангенте у крајевима дијаметра p паралелне су правој q .

В) Доказати да су (у случају елипсе) тангенте у крајевима дијаметра q паралелне дијаметру p .

Решење: Како је сада посматрана крива елипса, то је $b=1$, односно једначина те криве је $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Како је $b=1$, то права $q: \frac{x}{\frac{b}{a}} = \frac{y}{-\frac{a}{b}}$ постаје $q: \frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{-\frac{a}{1}}$. Означимо са $C(x_c, y_c)$ и $D(x_d, y_d)$ тачке пресека праве q и елипсе $\xi: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$C \in q \Rightarrow \frac{x_c}{\frac{1}{a}} = \frac{y_c}{-\frac{a}{1}} = t \Rightarrow x_c = \frac{1}{a^2} t, y_c = -\frac{a}{a^2} t$$

$$C \in \xi \Rightarrow \frac{x_c^2}{a^2} + \frac{y_c^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} t\right)^2 + \frac{1}{b^2} \cdot \left(-\frac{a}{a^2} t\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{a^2 b^4} t^2 + \frac{a^2}{b^2 a^4} t^2 = 1 \quad / \cdot a^2 b^4 \neq 0$$

$$\frac{1}{b^2} t^2 + \frac{a^2}{a^2} t^2 = a^2 b^2$$

$$\left(\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}\right) t^2 = a^2 b^2 \quad / : \left(\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}\right) \neq 0 \text{ јер је } (a, b) \neq (0, 0)$$

$$t^2 = \frac{a^2 b^2}{\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}} > 0$$

$$t_1 = -\frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}}}$$

$$t_2 = \frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}}}$$

← једно од ових t -ова одговара тачки C , а друго тачки D

Нека, без умањења општости $t = -\frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}}}$ одговара тачки C , тј. $x_c = \frac{1}{a^2} \cdot \left(-\frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}}}\right) = \frac{1}{a} \cdot \left(-\frac{b}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}}}\right)$ и

$y_c = \frac{-a}{a^2} \cdot \left(-\frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}}}\right) = \frac{b}{a \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}}}$. Тангента на елипсу у тачки C има једначину $t_c: \frac{xx_c}{a^2} + \frac{yy_c}{b^2} = 1$ јер $C \in \xi$

ово јесте једначина праве јер не може бити

$\left(-\frac{y_c}{b^2}, \frac{x_c}{a^2}\right) = (0, 0)$ јер би тада било $y_c = 0$ и $x_c = 0$,

тј. $\frac{ab}{a \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}}} = 0$ и $\frac{-ba}{b \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{a^2}}} = 0$ тј. $a=0$ и $b=0$

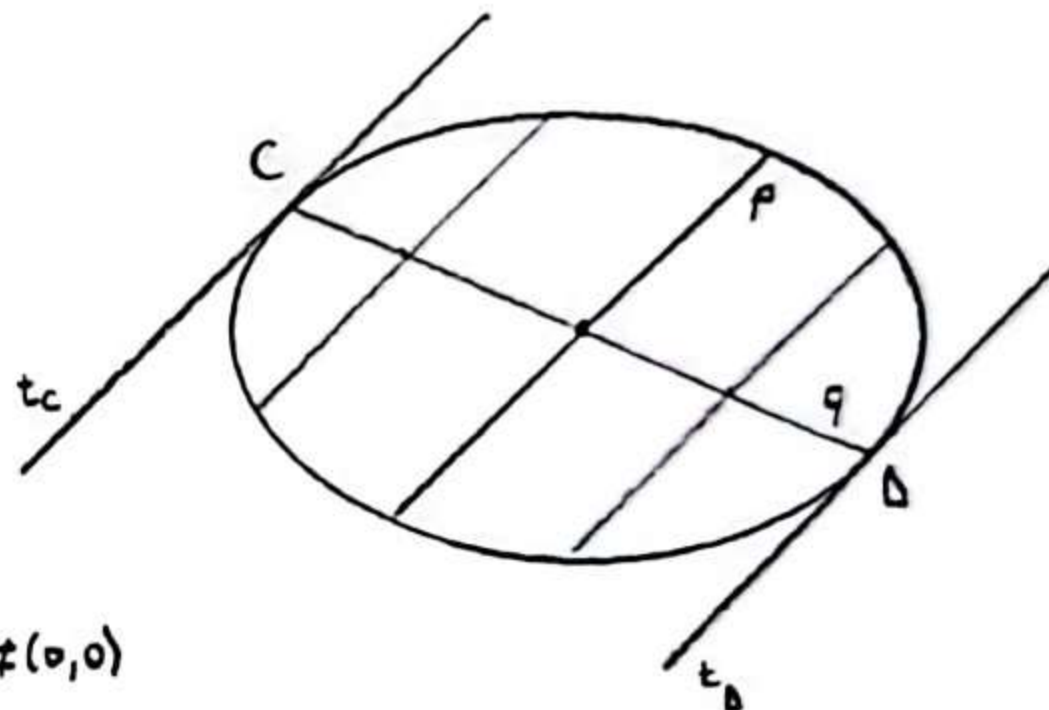
али $(a, b) \neq (0, 0)$

$$\frac{xx_c}{a^2} + \frac{yy_c}{b^2} = \frac{x_c^2}{a^2} + \frac{y_c^2}{b^2}$$

$$\frac{xx_c}{a^2} - \frac{x_c^2}{a^2} = -\frac{yy_c}{b^2} + \frac{y_c^2}{b^2}$$

$$\frac{x_c}{a^2} (x - x_c) = -\frac{y_c}{b^2} (y - y_c)$$

$$\frac{x - x_c}{-\frac{y_c}{b^2}} = \frac{y - y_c}{\frac{x_c}{a^2}}$$



$$\frac{x-x_c}{-\frac{y_c}{b^2}} = \frac{y-y_c}{\frac{x_c}{a^2}} \Rightarrow \frac{x-x_c}{-\frac{1}{b^2} \cdot \frac{ub}{a\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}}} = \frac{y-y_c}{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{v}{b} \cdot (-\frac{a}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}})} \Rightarrow \frac{x-x_c}{-\frac{u}{ab}} = \frac{y-y_c}{-\frac{v}{ab}} \Rightarrow \frac{x-x_c}{u} = \frac{y-y_c}{v}$$

Дакле, тангента $t_c: \frac{x-x_c}{u} = \frac{y-y_c}{v}$ има исти вектор правца као права $p: \frac{x}{u} = \frac{y}{v}$ на којој је дијаметар p , те је $t_c \parallel p$.

За $t = \frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}}$ добијемо $x_0 = \frac{v}{b^2} t = \frac{v}{b^2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}} = \frac{va}{b\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}}$ и $y_0 = -\frac{u}{a^2} t = -\frac{u}{a^2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}} = -\frac{ub}{a\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}}$, те је

тангента на елипсу у тачки 0 , тј. $t_0: \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

јер $0 \in E$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{yy_0}{b^2}$$

$$\frac{x_0}{a^2} (x - x_0) = -\frac{y_0}{b^2} (y - y_0)$$

$$\frac{x-x_0}{-\frac{y_0}{b^2}} = \frac{y-y_0}{\frac{x_0}{a^2}}$$

$$\frac{x-x_0}{-\frac{1}{b^2} \cdot (-\frac{ub}{a\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}})} = \frac{y-y_0}{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{va}{b\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}}}$$

$$\frac{x-x_0}{\frac{u}{ab}} = \frac{y-y_0}{\frac{v}{ab}}$$

$$\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v}$$

ово јесте једначина праве јер не може бити $(-\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}) = (0,0)$ јер би тада $y_0 = 0$ и $x_0 = 0$, тј. $-\frac{ub}{a\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}} = 0$ и

$$\frac{va}{b\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}} = 0, \text{ те би } u=0 \text{ и } v=0,$$

али $(u,v) \neq (0,0)$

Дакле, тангента $t_0: \frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v}$ има исти вектор правца као права $p: \frac{x}{u} = \frac{y}{v}$ на којој је дијаметар p , те је $t_0 \parallel p$.

Дефиниција: За правце одређене дијаметром p и правом q кажемо да су међусобно конјуговани.

Дакле, правци (u,v) и $(\frac{v}{b^2}, -\frac{u}{a^2})$ су међусобно конјуговани правци.

5.2. Доказати да средишта паралелних тетива параболе припадају правој која је паралелна оси параболе.

Решење: Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме посматрана параболоа има једначину $y^2 = 2px$, $p > 0$. Нека је (μ, ϑ) произвољан ненула вектор такав да посматране паралелне тетиве леже на правој која имају вектор правца $(\mu, \vartheta) \neq (0, 0)$.

Ако би $\vartheta = 0$, онда би једначина праве која садржи произвољну тачку $T(x_T, y_T)$ параболе и има вектор правца $(\mu, \vartheta) = (\mu, 0)$ била $\frac{x-x_T}{\mu} = \frac{y-y_T}{0} = t$, тј. $x = \mu t + x_T$, $y = y_T$. Нађимо пресечне тачке те праве и параболе $y^2 = 2px$. Заменом $x = \mu t + x_T$ и $y = y_T$ у $y^2 = 2px$ добијамо $y_T^2 = 2p(\mu t + x_T)$, тј. $y_T^2 = 2p\mu t + 2px_T$, тј. $2p\mu t = y_T^2 - 2px_T$, а како је $p > 0$ и $\mu \neq 0$ (јер је $\vartheta = 0$ и $(\mu, \vartheta) \neq (0, 0)$), то је $t = \frac{y_T^2 - 2px_T}{2p\mu}$, односно постоји јединствена тачка у пресеку те праве и параболе (то је баш тачка T јер је $x = \mu t + x_T = \mu \cdot \frac{y_T^2 - 2px_T}{2p\mu} + x_T = \frac{y_T^2 - 2px_T}{2p} + \frac{2px_T}{2p} = \frac{y_T^2 - 2px_T + 2px_T}{2p} = \frac{y_T^2}{2p} = x_T$ и $y = y_T$), те не бисмо имали тетиве.

$y_T^2 = 2px_T$ јер је T на параболу



У наставку сматрамо да је $\vartheta \neq 0$. Једначина праве која садржи произвољну тачку $T(x_T, y_T)$ параболе и има вектор правца $(\mu, \vartheta) \neq (0, 0)$ и $\vartheta \neq 0$ је $\frac{x-x_T}{\mu} = \frac{y-y_T}{\vartheta}$. Постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да за другу пресечну тачку $P(x_P, y_P)$ те праве и параболе важи $\frac{x_P - x_T}{\mu} = \frac{y_P - y_T}{\vartheta} = \lambda$, одакле је $x_P = \mu\lambda + x_T$, $y_P = \vartheta\lambda + y_T$, а када то убацимо у једначину параболе $y^2 = 2px$, добијамо $(\vartheta\lambda + y_T)^2 = 2p(\mu\lambda + x_T)$

$$\vartheta^2 \lambda^2 + 2\vartheta y_T \lambda + y_T^2 = 2p\mu\lambda + 2px_T$$

$$\vartheta^2 \lambda^2 + 2\vartheta y_T \lambda - 2p\mu\lambda = 2px_T - y_T^2$$

$$\lambda(\lambda\vartheta^2 + 2\vartheta y_T - 2p\mu) = 0$$

$$\lambda = 0$$

$$x_P = \mu \cdot 0 + x_T = x_T$$

$$y_P = \vartheta \cdot 0 + y_T = y_T$$

јер $P \neq T$

$$\lambda\vartheta^2 + 2\vartheta y_T - 2p\mu = 0$$

$$\lambda\vartheta^2 = 2p\mu - 2\vartheta y_T \quad / : \vartheta^2 \neq 0$$

$$\lambda = \frac{2(p\mu - \vartheta y_T)}{\vartheta^2}$$

$y_T^2 = 2px_T$ јер $T(x_T, y_T)$ припада параболу $y^2 = 2px$

Средиште S тетиве TP има координате $x_S = \frac{x_T + x_P}{2} = \frac{x_T + \mu\lambda + x_T}{2} = \frac{2x_T + \mu\lambda}{2} = x_T + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{2(p\mu - \vartheta y_T)}{\vartheta^2} = x_T + \frac{\mu(p\mu - \vartheta y_T)}{\vartheta^2}$ и

$y_S = \frac{y_T + y_P}{2} = \frac{y_T + \vartheta\lambda + y_T}{2} = \frac{2y_T + \vartheta\lambda}{2} = y_T + \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{2(p\mu - \vartheta y_T)}{\vartheta^2} = y_T + \frac{p\mu - \vartheta y_T}{\vartheta} = \frac{\vartheta y_T + p\mu - \vartheta y_T}{\vartheta} = \frac{p\mu}{\vartheta} = \text{const}$, те сва средишта посматраних паралелних тетива леже на правој $y = \frac{p\mu}{\vartheta} = \text{const}$ која је паралелна оси $y = 0$ параболе $y^2 = 2px$.

5.3. Тангенте у тачкама M_1 и M_2 елипсе секу се у тачки P . Доказати да тачка P припада дијаметру који полови тетиву M_1M_2 .

Решение:



Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме дата елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Нека су $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ координате тачака M_1 и M_2 . Како тачке M_1 и M_2 припадају елипси, то су једначине тангенти t_1 и t_2 у тачкама M_1 и M_2 , редом:

$$t_1: \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad t_2: \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1$$

$\{P\} = t_1 \cap t_2$. Нека је $P(x_p, y_p)$.

$$P \in t_1 \Rightarrow \frac{x_p x_1}{a^2} + \frac{y_p y_1}{b^2} = 1 \quad P \in t_2 \Rightarrow \frac{x_p x_2}{a^2} + \frac{y_p y_2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_p}{a^2} \cdot (x_1 - x_2) + \frac{y_p}{b^2} (y_1 - y_2) = \underbrace{1 - 1}_0 \Rightarrow \frac{x_p}{a^2} (x_1 - x_2) = -\frac{y_p}{b^2} (y_1 - y_2)$$

Како $\frac{0 \cdot x_1}{a^2} + \frac{0 \cdot y_1}{b^2} = 0 + 0 = 0 \neq 1$, то тачка $O(0,0) \notin t_1$, а како $P \in t_1$, то је $P \neq O$, те је $(x_p, y_p) \neq (0,0)$.

Разликујемо три случаја:

1° $x_1 - x_2 \neq 0$ и $y_1 - y_2 \neq 0$

$$\frac{x_p}{a^2} (x_1 - x_2) = -\frac{y_p}{b^2} (y_1 - y_2) = t \neq 0 \Rightarrow x_p = \frac{a^2 t}{x_1 - x_2}, \quad y_p = \frac{-b^2 t}{y_1 - y_2}$$

Посматрајмо једначину праве p која садржи тачке $O(0,0)$ (центар елипсе) и $P(x_p, y_p)$.

$$p: \frac{x-0}{x_p-0} = \frac{y-0}{y_p-0} \quad \text{тј.} \quad p: \frac{x}{x_p} = \frac{y}{y_p} \quad \text{тј.} \quad p: \frac{x}{\frac{a^2 t}{x_1 - x_2}} = \frac{y}{\frac{-b^2 t}{y_1 - y_2}} \quad \text{тј.} \quad p: \frac{x}{\frac{a^2}{x_1 - x_2}} = \frac{y}{\frac{-b^2}{y_1 - y_2}}$$

Проверимо да ли средиште S тетиве M_1M_2 припада правој p . Координате средишта S су $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и

$$y_s = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\frac{x_s}{\frac{a^2}{x_1 - x_2}} = \frac{y_s}{\frac{-b^2}{y_1 - y_2}} \Leftrightarrow \frac{\frac{x_1 + x_2}{2}}{\frac{a^2}{x_1 - x_2}} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2}}{\frac{-b^2}{y_1 - y_2}} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{-b^2} \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2} = -\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}_1 = \underbrace{\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}}_1 \Leftrightarrow T$$

јер тачке M_1 и M_2 припадају елипси

Како права p садржи центар елипсе, средиште S тетиве M_1M_2 и тачку P , то тачка P припада правој OS тј. правој која садржи дијаметар елипсе који полови тетиву M_1M_2 .

$$2^\circ \quad x_1 = x_2, \quad y_1 \neq y_2$$

$$\frac{x_p}{a^2} (x_1 - x_2) = -\frac{y_p}{b^2} (y_1 - y_2)$$

$$\frac{x_p}{a^2} (x_1 - x_1) = -\frac{y_p}{b^2} (y_1 - y_2)$$

$$\frac{x_p}{a^2} \cdot 0 = -\frac{y_p}{b^2} (y_1 - y_2)$$

$$0 = -\frac{y_p}{b^2} \underbrace{(y_1 - y_2)}_{\neq 0} \Rightarrow y_p = 0 \Rightarrow P \text{ припада } x\text{-оси}$$

Како је $y_p = 0$ и $P = (x_p, y_p) \neq (0, 0) = O$, то мора бити $x_p \neq 0$. Једначина праве p која садржи центар елипсе O и тачку P је $\frac{x-0}{x_p-0} = \frac{y-0}{y_p-0}$ тј. $\frac{x}{x_p} = \frac{y}{0-0}$ тј. $\frac{x}{x_p} = \frac{y}{0}$ што је једначина x осе тј. $y=0$. Довољно је још доказати да средиште $S(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ припада тој правој $y=0$, тј. да је $\frac{y_1+y_2}{2} = 0$.

$$\xi: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad M_1 \in \xi \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad M_2 \in \xi \Rightarrow \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y_1^2}{b^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 - 1 \Rightarrow \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{y_2^2}{b^2} \Rightarrow y_1^2 = y_2^2 \Rightarrow y_1 = -y_2 \Rightarrow y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = 0$$

Како S припада правој OP , то тачка P припада правој која садржи дијаметар елипсе и полови тетиву M_1M_2 .

$$3^\circ \quad x_1 \neq x_2, \quad y_1 = y_2$$

$$\frac{x_p}{a^2} (x_1 - x_2) = -\frac{y_p}{b^2} (y_1 - y_2) \Rightarrow \frac{x_p}{a^2} (x_1 - x_2) = -\frac{y_p}{b^2} (y_1 - y_1) \Rightarrow \frac{x_p}{a^2} (x_1 - x_2) = -\frac{y_p}{b^2} \cdot 0 \Rightarrow \frac{x_p}{a^2} \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow x_p = 0 \Rightarrow P \text{ припада } y\text{-оси}$$

Како је $x_p = 0$ и $P(x_p, y_p) \neq O(0, 0)$, то мора бити $y_p \neq 0$. Једначина праве p која садржи центар елипсе O и тачку P је $\frac{x-0}{x_p-0} = \frac{y-0}{y_p-0}$ тј. $\frac{x}{0-0} = \frac{y}{y_p}$ тј. $\frac{x}{0} = \frac{y}{y_p}$ што је једначина y осе тј. $x=0$. Довољно је још доказати да средиште

$S(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ припада тој правој $x=0$, тј. да је $\frac{x_1+x_2}{2} = 0$.

$$\xi: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad M_1 \in \xi \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad M_2 \in \xi \Rightarrow \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2} = 1 - 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} = \frac{x_2^2}{a^2} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = 0$$

Како S припада правој OP , то тачка P припада правој која садржи дијаметар елипсе и полови тетиву M_1M_2 .

5.4. Доказати да је геометријско место тачака из којих се елипса види под правим углом круг (еквивалентно: кад елипса клизи додирујући координатне осе њен центар се креће по кругу).

Решење: Тачка $T(x_T, y_T)$ задовољава својство да се елипса из ње види под правим углом ако две тангенте из тачке T на дату елипсу граде прав угао. Постоји Декартов правоугли координатни систем такав да у њему посматрана елипса има једначину $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Доказујемо да је скуп свих тачака из којих се елипса $\mathcal{E}$ види под правим углом један круг, тј. да су то једнаки скупови.

□ Нека је $T(x_T, y_T)$ тачка из које се елипса $\mathcal{E}$ види под правим углом. Нека је $t_1: \frac{x-x_T}{u} = \frac{y-y_T}{v}$ права која садржи тачку $T(x_T, y_T)$. Права t_1 је тангента елипсе $\mathcal{E}$ ако и само ако има само једну заједничку тачку са елипсом $\mathcal{E}$.

$$t_1: \frac{x-x_T}{u} = \frac{y-y_T}{v} = t \Rightarrow x = ut + x_T, y = vt + y_T \text{ и то заменимо у } \mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(ut + x_T)^2}{a^2} + \frac{(vt + y_T)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{u^2 t^2 + 2x_T u t + x_T^2}{a^2} + \frac{v^2 t^2 + 2y_T v t + y_T^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{u^2 t^2}{a^2} + \frac{2x_T u}{a^2} t + \frac{x_T^2}{a^2} + \frac{v^2 t^2}{b^2} + \frac{2y_T v}{b^2} t + \frac{y_T^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) t^2 + 2 \left(\frac{x_T u}{a^2} + \frac{y_T v}{b^2} \right) t + \frac{x_T^2}{a^2} + \frac{y_T^2}{b^2} - 1 = 0$$

$\neq 0$ јер $(u, v) \neq (0, 0)$ као вектор правца праве t_1

Да би права t_1 била тангента, ова квадратна једначина по t мора имати дискриминанту једнаку 0.

$$\Rightarrow 0 = \Delta = \left(2 \left(\frac{x_T u}{a^2} + \frac{y_T v}{b^2} \right) \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) \cdot \left(\frac{x_T^2}{a^2} + \frac{y_T^2}{b^2} - 1 \right) = 4 \cdot \left(\left(\frac{x_T u}{a^2} + \frac{y_T v}{b^2} \right)^2 - \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) \cdot \left(\frac{x_T^2}{a^2} + \frac{y_T^2}{b^2} - 1 \right) \right) \quad / : 4 \neq 0$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{x_T^2 u^2}{a^4} + 2 \frac{x_T y_T u v}{a^2 b^2} + \frac{y_T^2 v^2}{b^4} - \left(\frac{x_T^2 u^2}{a^4} + \frac{y_T^2 v^2}{a^2 b^2} - \frac{u^2}{a^2} + \frac{x_T^2 v^2}{a^2 b^2} + \frac{y_T^2 v^2}{b^4} - \frac{v^2}{b^2} \right)$$

$$\Rightarrow 0 = 2 \frac{x_T y_T u v}{a^2 b^2} - \frac{x_T^2 v^2}{a^2 b^2} - \frac{y_T^2 u^2}{a^2 b^2} + \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 0 \quad (*)$$

Нека је $t_2: \frac{x-x_T}{-v} = \frac{y-y_T}{u}$ права која садржи тачку $T(x_T, y_T)$ и нормална је на праву t_1 (вектор правца $(-v, u)$ праве t_2 нормалан је на вектору правца (u, v) праве t_1 јер је $(-v, u) \cdot (u, v) = -vu + uv = 0$).

Како се елипса $\mathcal{E}$ из тачке T види под правим углом и t_1 је тангента на $\mathcal{E}$, то и права t_2 мора бити тангента на $\mathcal{E}$.

$$t_2: \frac{x-x_T}{-v} = \frac{y-y_T}{\mu} = \lambda \Rightarrow x = -\lambda v + x_T, y = \lambda \mu + y_T \text{ и то заменимо у једначину елипсе } \mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(-\lambda v + x_T)^2}{a^2} + \frac{(\lambda \mu + y_T)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\lambda^2 v^2 - 2x_T v \lambda + x_T^2}{a^2} + \frac{\lambda^2 \mu^2 + 2y_T \mu \lambda + y_T^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\lambda^2 v^2}{a^2} - 2 \frac{x_T v}{a^2} \lambda + \frac{x_T^2}{a^2} + \frac{\lambda^2 \mu^2}{b^2} + 2 \frac{y_T \mu}{b^2} \lambda + \frac{y_T^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{v^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} \right) \lambda^2 + 2 \left(-\frac{x_T v}{a^2} + \frac{y_T \mu}{b^2} \right) \lambda + \frac{x_T^2}{a^2} + \frac{y_T^2}{b^2} - 1 = 0$$

≠ 0 јер је $(\mu, v) \neq (0, 0)$

Да би права t_2 била тангента на $\mathcal{E}$, ова квадратна једначина по λ мора имати дискриминанту једнаку 0.

$$\Rightarrow 0 = \Delta = \left(2 \left(-\frac{x_T v}{a^2} + \frac{y_T \mu}{b^2} \right) \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{v^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} \right) \cdot \left(\frac{x_T^2}{a^2} + \frac{y_T^2}{b^2} - 1 \right) = 4 \cdot \left(\frac{x_T^2 v^2}{a^4} - 2 \frac{x_T y_T \mu v}{a^2 b^2} + \frac{y_T^2 \mu^2}{b^4} - \left(\frac{x_T^2 v^2}{a^4} + \frac{y_T^2 v^2}{a^2 b^2} - \frac{v^2}{a^2} + \frac{\mu^2 x_T^2}{a^2 b^2} + \frac{\mu^2 y_T^2}{b^4} - \frac{\mu^2}{b^2} \right) \right)$$

$$\Rightarrow 0 = -2 \frac{x_T y_T \mu v}{a^2 b^2} - \frac{x_T^2 \mu^2}{a^2 b^2} - \frac{y_T^2 v^2}{a^2 b^2} + \frac{v^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} \quad (**)$$

Сабирањем једнакости $(*)$ и $(**)$ добијамо $0 = -\frac{x_T^2}{a^2 b^2} \cdot (v^2 + \mu^2) - \frac{y_T^2}{a^2 b^2} (v^2 + \mu^2) + \frac{\mu^2 + v^2}{a^2} + \frac{\mu^2 + v^2}{b^2} \quad / : \frac{\mu^2 + v^2}{a^2 b^2} \neq 0 \text{ јер је } (\mu, v) \neq (0, 0)$

$$0 = -x_T^2 - y_T^2 + b^2 + a^2$$

$$x_T^2 + y_T^2 = a^2 + b^2$$

$\Rightarrow$ Тачка $T(x_T, y_T)$ припада кругу са центром $(0, 0)$ (што је и центар елипсе) и полупречником $\sqrt{a^2 + b^2}$.

② Нека је $K(x_k, y_k)$ произвољна тачка круга $k: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ и нека је $\frac{x-x_k}{A} = \frac{y-y_k}{B}$, $(A, B) \neq (0, 0)$ тангента елипсе $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\frac{x-x_k}{A} = \frac{y-y_k}{B} = \lambda \Rightarrow x = A\lambda + x_k, y = B\lambda + y_k \text{ и заменимо ово у } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(A\lambda + x_k)^2}{a^2} + \frac{(B\lambda + y_k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{A^2\lambda^2 + 2Ax_k\lambda + x_k^2}{a^2} + \frac{B^2\lambda^2 + 2By_k\lambda + y_k^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{A^2\lambda^2}{a^2} + \frac{2Ax_k\lambda}{a^2} + \frac{x_k^2}{a^2} + \frac{B^2\lambda^2}{b^2} + \frac{2By_k\lambda}{b^2} + \frac{y_k^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2}\right)\lambda^2 + \left(\frac{2Ax_k}{a^2} + \frac{2By_k}{b^2}\right)\lambda + \frac{x_k^2}{a^2} + \frac{y_k^2}{b^2} - 1 = 0$$

$\neq 0$ јер је $(A, B) \neq (0, 0)$

Да би права $\frac{x-x_k}{A} = \frac{y-y_k}{B}$ била тангента елипсе E , добијена квадратна једначина мора имати дискриминанту једнаку 0.

$$\Rightarrow 0 = D = \left(\frac{2Ax_k}{a^2} + \frac{2By_k}{b^2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{x_k^2}{a^2} + \frac{y_k^2}{b^2} - 1\right) = 4 \cdot \left(\left(\frac{Ax_k}{a^2} + \frac{By_k}{b^2}\right)^2 - \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{x_k^2}{a^2} + \frac{y_k^2}{b^2} - 1\right)\right) =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{A^2x_k^2}{a^4} + 2\frac{x_ky_kAB}{a^2b^2} + \frac{B^2y_k^2}{b^4} - \left(\frac{A^2x_k^2}{a^4} + \frac{A^2y_k^2}{a^2b^2} - \frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2x_k^2}{a^2b^2} + \frac{B^2y_k^2}{b^4} - \frac{B^2}{b^2}\right)\right) =$$

$$= 4 \cdot \left(2\frac{x_ky_kAB}{a^2b^2} - \frac{A^2y_k^2}{a^2b^2} + \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2x_k^2}{a^2b^2} + \frac{B^2}{b^2}\right) \quad | : 4 \neq 0$$

$$\Rightarrow 0 = 2\frac{x_ky_kAB}{a^2b^2} - \frac{A^2y_k^2}{a^2b^2} + \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2x_k^2}{a^2b^2} + \frac{B^2}{b^2}. \text{ Да бисмо могли ово поделити са } A^2 \text{ размотримо прво када је}$$

$A=0$. То је за $(A, B) = (0, B)$ при чему $B \neq 0$ јер је $(A, B) \neq (0, 0)$.

$$\text{Када заменимо } A=0 \text{ у } 0 = 2\frac{x_ky_kAB}{a^2b^2} - \frac{A^2y_k^2}{a^2b^2} + \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2x_k^2}{a^2b^2} + \frac{B^2}{b^2} \text{ добијамо } 0 = -\frac{B^2x_k^2}{a^2b^2} + \frac{B^2}{b^2} = \frac{B^2}{b^2} \left(1 - \frac{x_k^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow 0 = 1 - \frac{x_k^2}{a^2}$$

$\neq 0$ јер је $B \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x_k^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x_k^2 = a^2.$$

Разликујемо два случаја:

1) случај $x_k^2 = a^2$ и то заменимо у $x_k^2 + y_k^2 = a^2 + b^2$

$$a^2 + y_k^2 = a^2 + b^2$$

$$y_k^2 = b^2$$

у $0 = \frac{2ABx_k y_k}{a^2 b^2} - \frac{A^2 y_k^2}{a^2 b^2} + \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2 x_k^2}{a^2 b^2} + \frac{B^2}{b^2}$ убацимо $x_k^2 = a^2$ и $y_k^2 = b^2$ и добијамо:

$$0 = \frac{2ABx_k y_k}{a^2 b^2} - \frac{A^2 b^2}{a^2 b^2} + \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2 a^2}{a^2 b^2} + \frac{B^2}{b^2} \quad \text{тј.} \quad 0 = \frac{2ABx_k y_k}{a^2 b^2} - \frac{A^2}{a^2} + \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2} + \frac{B^2}{b^2} = \frac{2ABx_k y_k}{a^2 b^2}$$

Како је $x_k^2 = a^2$, то $x_k \in \{-a, a\}$, а како је $y_k^2 = b^2$, то $y_k \in \{-b, b\}$, те $x_k y_k \in \{-ab, ab\}$,

односно $x_k y_k \neq 0$, те из $\frac{2ABx_k y_k}{a^2 b^2} = 0$ следи $AB = 0$, те је $A = 0$ или $B = 0$.

Следи да постоје два решења, тј. две тангенте и то су $\frac{x - x_k}{0} = \frac{y - y_k}{B_1}$ и $\frac{x - x_k}{A_2} = \frac{y - y_k}{0}$

за неке $B_1, A_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Оне су међусобно нормалне јер за њихове векторе правца важи $(0, B_1) \cdot (A_2, 0) = 0 \cdot A_2 + B_1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$. Дакле, тангенте елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ из тачке

$K(x_k, y_k)$ за коју важи $x_k^2 = a^2$ и $y_k^2 = b^2$ су међусобно нормалне, односно елипса E се из те тачке K види под правим углом, те тачка $K(x_k, y_k)$ припада скупу свих тачака из којих се елипса E види под правим углом.

2) случај $x_k^2 \neq a^2$ тј. $x_k \notin \{-a, a\}$. Тада не може бити $A = 0$ (јер из $A = 0$ следи $x_k^2 = a^2$), те једначину

$$0 = \frac{2ABx_k y_k}{a^2 b^2} - \frac{A^2 y_k^2}{a^2 b^2} + \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2 x_k^2}{a^2 b^2} + \frac{B^2}{b^2} \quad \text{можемо поделити са } A^2 \neq 0.$$

$$0 = \frac{2x_k y_k}{a^2 b^2} \cdot \frac{AB}{A^2} - \frac{y_k^2}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{x_k^2}{a^2 b^2} \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{B}{A}\right)^2 \Rightarrow 0 = \frac{2x_k y_k}{a^2 b^2} \cdot \frac{B}{A} - \frac{y_k^2}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{x_k^2}{a^2 b^2} \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{B}{A}\right)^2$$

Обележимо $\frac{B}{A}$ са S .

$$0 = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{x_k^2}{a^2 b^2}\right) S^2 + \frac{2x_k y_k}{a^2 b^2} \cdot S + \frac{1}{a^2} - \frac{y_k^2}{a^2 b^2}$$

$$0 = \frac{a^2 - x_k^2}{a^2 b^2} S^2 + \frac{2x_k y_k}{a^2 b^2} S + \frac{b^2 - y_k^2}{a^2 b^2}$$

$$0 = (a^2 - x_k^2) S^2 + 2x_k y_k S + b^2 - y_k^2$$

/ $\cdot a^2 b^2 \neq 0$

$$(a^2 - x_k^2)s^2 + 2x_k y_k s + b^2 - y_k^2 = 0$$

$\neq 0$ јер $x_k^2 \neq a^2$ $x_k^2 - a^2$ јер тачка K припада кругу $k: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, те је $x_k^2 + y_k^2 = a^2 + b^2$
 $x_k^2 - a^2 = b^2 - y_k^2$

$$(a^2 - x_k^2)s^2 + 2x_k y_k s + x_k^2 - a^2 = 0$$

$\neq 0$
 $D = (2x_k y_k)^2 - 4 \cdot (a^2 - x_k^2) \cdot (x_k^2 - a^2) = 4x_k^2 y_k^2 + 4(a^2 - x_k^2)^2 > 0 \Rightarrow$ ова квадратна једначина по s има два
 реална решења
 s_1 и s_2 .

На основу Виетових формула је $s_1 s_2 = \frac{x_k^2 - a^2}{a^2 - x_k^2} = \frac{-(a^2 - x_k^2)}{a^2 - x_k^2} \stackrel{*}{=} -1$.
 $\neq 0$ јер је $x_k^2 \neq a^2$

Једначина тангенте елипсе E је $\frac{x - x_k}{A} = \frac{y - y_k}{B}$ тј. $\frac{x - x_k}{1} = \frac{y - y_k}{\frac{B}{A}}$ тј. $\frac{x - x_k}{1} = \frac{y - y_k}{S}$.

Како имамо два реална решења за s , то имамо две тангенте елипсе E које садрже тачку $K(x_k, y_k)$ и њихови вектори праваца су $(1, s_1)$ и $(1, s_2)$, а како је $(1, s_1) \cdot (1, s_2) = 1 \cdot 1 + s_1 s_2 \stackrel{*}{=} 1 - 1 = 0$, то су тангенте елипсе E из тачке K међусобно нормалне, тј. елипса E се из тачке K види под правим углом, те тачка $K(x_k, y_k)$ са круга k таква да је $x_k^2 \neq a^2$ припада скупу свих тачака из којих се елипса E види под правим углом.

Дакле, круг $k: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ је подскуп скупа свих тачака из којих се елипса E види под правим углом, а како смо већ доказали и да је скуп свих тачака из којих се елипса E види под правим углом подскуп круга $k: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, то следи да је тражено геометријско место тачака из којих се елипса E види под правим углом круг $k: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

5.5. Шта је геометријско место тачака из којих се парабола види под правим углом?

Решење: Нека је $T(x_T, y_T)$ тачка из које се парабола $y^2 = 2px$ види под правим углом. То значи да угао између тангенци из тачке T на параболу мора бити 90° , те ако је $(\mu, \vartheta) \neq (0, 0)$ вектор правца једне тангенте из тачке T на параболу, онда је $(-\vartheta, \mu)$ вектор правца друге тангенте из тачке T на параболу (јер је $(\mu, \vartheta) \cdot (-\vartheta, \mu) = \mu \cdot (-\vartheta) + \vartheta \cdot \mu = -\mu\vartheta + \mu\vartheta = 0$).

$$t_1: \frac{x-x_T}{\mu} = \frac{y-y_T}{\vartheta} = t \Rightarrow x = \mu t + x_T, y = \vartheta t + y_T$$

Приметимо да не може бити $\vartheta = 0$, иначе би права t_1 имала вектор правца $(\mu, 0)$ и била би паралелна са Ox осом, те изко сече параболу у једној тачки, она не би била тангента.



Дакле, $\vartheta \neq 0$. Да би права t_1 била тангента параболе мора постојати јединствена тачка пресека праве t_1 и параболе, назовимо је $P(x_P, y_P)$. $P \in t_1 \Rightarrow (\exists t_P \in \mathbb{R}) x_P = \mu t_P + x_T, y_P = \vartheta t_P + y_T$ и то заменимо у

$$y_P^2 = 2px_P \Rightarrow (\vartheta t_P + y_T)^2 = 2p(\mu t_P + x_T)$$

$$\vartheta^2 t_P^2 + 2\vartheta y_T t_P + y_T^2 = 2p\mu t_P + 2px_T$$

$$\vartheta^2 t_P^2 + 2(\vartheta y_T - p\mu) t_P + y_T^2 - 2px_T = 0$$

Како је $\vartheta \neq 0$ ово је квадратна једначина по t_P која има јединствено решење само ако је $\Delta = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (2(\vartheta y_T - p\mu))^2 - 4\vartheta^2 \cdot (y_T^2 - 2px_T) = 4(\vartheta^2 y_T^2 - 2\vartheta y_T p\mu + p^2 \mu^2) - 4\vartheta^2 y_T^2 + 8\vartheta^2 px_T = 4\cancel{\vartheta^2 y_T^2} - 8\vartheta y_T p\mu + 4p^2 \mu^2 - 4\cancel{\vartheta^2 y_T^2} + 8\vartheta^2 px_T \\ &= 4 \cdot (p^2 \mu^2 - 2\vartheta y_T p\mu + 2\vartheta^2 px_T) = 0 \Rightarrow p^2 \mu^2 - 2\vartheta y_T p\mu + 2\vartheta^2 px_T = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$t_2: \frac{x-x_T}{-\vartheta} = \frac{y-y_T}{\mu} = \lambda \Rightarrow x = -\vartheta \lambda + x_T, y = \mu \lambda + y_T$$

Приметимо да не може бити $\mu = 0$, иначе би права t_2 имала вектор правца $(-\vartheta, 0)$ и била би паралелна са Ox осом, те изко сече параболу у једној тачки, она не би била тангента.

Дакле, $\mu \neq 0$. Да би права t_2 била тангента параболе мора постојати јединствена тачка пресека праве t_2 и параболе, назовимо је $S(x_S, y_S)$. $S \in t_2 \Rightarrow (\exists \lambda_S \in \mathbb{R}) x_S = -\vartheta \lambda_S + x_T, y_S = \mu \lambda_S + y_T$ и то заменимо у

$$y_S^2 = 2px_S \Rightarrow (\mu \lambda_S + y_T)^2 = 2p(-\vartheta \lambda_S + x_T)$$

$$\mu^2 \lambda_s^2 + 2\mu y_T \lambda_s + y_T^2 = -2p\vartheta \lambda_s + 2px_T$$

$$\mu^2 \lambda_s^2 + 2(\mu y_T + p\vartheta) \lambda_s + y_T^2 - 2px_T = 0$$

Како је $\mu \neq 0$ ово је квадратна једначина по λ_s која има јединствено решење само ако је $\Delta = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (2(\mu y_T + p\vartheta))^2 - 4\mu^2(y_T^2 - 2px_T) = 4 \cdot (\mu^2 y_T^2 + 2\mu y_T p\vartheta + p^2 \vartheta^2) - 4\mu^2 y_T^2 + 8\mu^2 px_T = \cancel{4\mu^2 y_T^2} + 8\mu y_T p\vartheta + 4p^2 \vartheta^2 - \cancel{4\mu^2 y_T^2} + 8\mu^2 px_T \\ &= 4 \cdot (p^2 \vartheta^2 + 2\mu y_T p\vartheta + 2\mu^2 px_T) = 0 \Rightarrow p^2 \vartheta^2 + 2\mu y_T p\vartheta + 2\mu^2 px_T = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Сабирањем једначина (1) и (2) добијамо $\underbrace{p^2 \mu^2 - 2\vartheta y_T p \mu + 2\vartheta^2 px_T} + \underbrace{p^2 \vartheta^2 + 2\mu y_T p\vartheta + 2\mu^2 px_T} = 0$

$$p^2(\mu^2 + \vartheta^2) + 2px_T(\mu^2 + \vartheta^2) = 0$$

$$2px_T(\mu^2 + \vartheta^2) = -p^2(\mu^2 + \vartheta^2)$$

$$2x_T = -p$$

$$x_T = -\frac{p}{2}$$

$/ : p(\mu^2 + \vartheta^2) \neq 0$
јер је $(\mu, \vartheta) \neq (0, 0)$
и $p \neq 0$

Дакле, све тачке T из којих се парабола $y^2 = 2px$ види под правим углом припадају директриси $x = -\frac{p}{2}$ те параболе.

Докажимо сада да свака тачка директрисе $x = -\frac{p}{2}$ припада геометријском месту тачака из којих се парабола $y^2 = 2px$ види под правим углом.

Нека је $N(x_N, y_N)$ произвољна тачка с директрисе $x = -\frac{p}{2}$. Тада је $x_N = -\frac{p}{2}$.

Нека је $\frac{x - (-\frac{p}{2})}{A} = \frac{y - y_N}{B}$, $(A, B) \neq (0, 0)$ тангента параболе $y^2 = 2px$ која садржи тачку N .

$$\frac{x + \frac{p}{2}}{A} = \frac{y - y_N}{B} = \mu \Rightarrow x = A\mu - \frac{p}{2}, y = B\mu + y_N$$

Приметимо да не може бити $B = 0$, иначе би ова права имала вектор правца $(A, 0)$ и била би паралелна са Ox осом, те иако сече параболу у једној тачки, она не би била тангента. Дакле, $B \neq 0$.

Да би права $q: x = A\psi - \frac{p}{2}$, $y = B\psi + y_N$ била тангента параболе $y^2 = 2px$ мора постојати јединствена тачка пресека те праве и параболе, назовимо је $M(x_M, y_M)$. $M \in q \Rightarrow (\exists \psi_M \in \mathbb{R}) x_M = A\psi_M - \frac{p}{2}, y_M = B\psi_M + y_N$ и то заменимо у $y_M^2 = 2px_M \Rightarrow (B\psi_M + y_N)^2 = 2p \cdot (A\psi_M - \frac{p}{2})$

$$B^2\psi_M^2 + 2By_N\psi_M + y_N^2 = 2pA\psi_M - p^2$$

$$B^2\psi_M^2 + 2(By_N - Ap)\psi_M + y_N^2 + p^2 = 0$$

Како је $B \neq 0$ ово је квадратна једначина по ψ_M која има јединствено решење само ако је $\Delta = 0$.

$$\Delta = (2(By_N - Ap))^2 - 4B^2 \cdot (y_N^2 + p^2) = 4 \cdot (B^2y_N^2 - 2By_NAp + A^2p^2) - 4B^2y_N^2 - 4B^2p^2 = \cancel{4B^2y_N^2} - 8By_NAp + 4A^2p^2 - \cancel{4B^2y_N^2} - 4B^2p^2 =$$

$$= 4 \cdot (A^2p^2 - 2y_NpAB - B^2p^2) = 0 \Rightarrow A^2p^2 - 2y_NpAB - B^2p^2 = 0 \quad | : p \neq 0$$

$$A^2p - 2y_NAB - B^2p = 0 \quad | : B^2 \neq 0$$

$$p \frac{A^2}{B^2} - 2y_N \cdot \frac{AB}{B^2} - p \frac{B^2}{B^2} = 0$$

$$p \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^2 - 2y_N \frac{A}{B} - p = 0$$

$$\text{Уведимо смену } k = \frac{A}{B}.$$

$$pk^2 - 2y_Nk - p = 0$$

Како је $p \neq 0$, то је ово квадратна једначина по k .

$$\Delta = (-2y_N)^2 - 4 \cdot p \cdot (-p) = 4y_N^2 + 4p^2 = 4(y_N^2 + p^2) > 0 \quad \text{јер је } p \neq 0 \Rightarrow \text{Ова квадратна једначина по } k$$

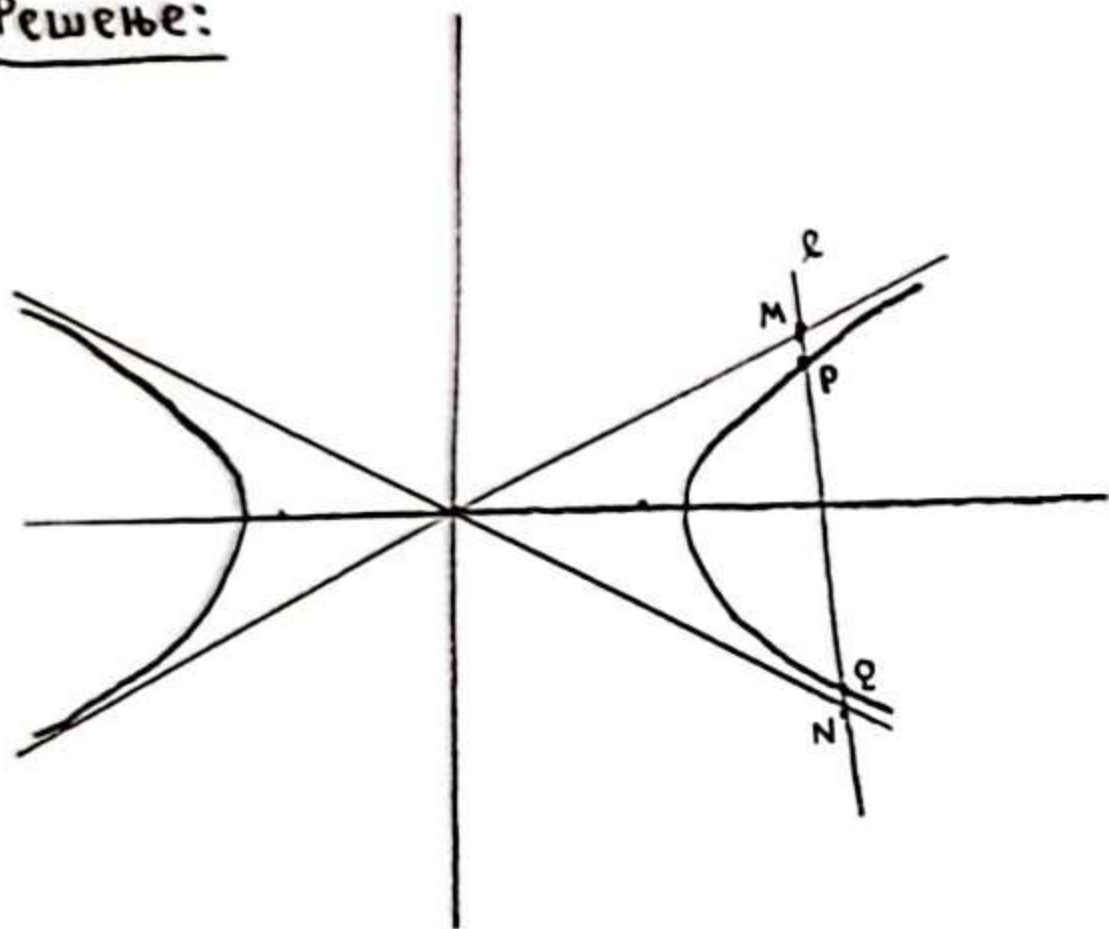
има два реална решења k_1 и k_2 , а на основу Виетове формуле је $k_1 \cdot k_2 = \frac{-p}{p} = -1$.

$$\frac{x + \frac{p}{2}}{A} = \frac{y - y_N}{B} \Rightarrow \frac{x + \frac{p}{2}}{\frac{A}{B}} = \frac{y - y_N}{1} \quad \text{тј.} \quad \frac{x + \frac{p}{2}}{k_1} = \frac{y - y_N}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x + \frac{p}{2}}{k_2} = \frac{y - y_N}{1} \quad \text{су једначине тангенти из тачке } N(x_N, y_N)$$

на параболу $y^2 = 2px$, а како су им вектори правца $(k_1, 1)$ и $(k_2, 1)$ и важи $(k_1, 1) \cdot (k_2, 1) = k_1 \cdot k_2 + 1 \cdot 1 = -1 + 1 = 0$, те су те дијагоналне нормалне и зато тачка N припада геометријском месту тачака из којих се парабола $y^2 = 2px$ види под правим углом. Дакле, тражено геометријско место тачака је директриса $x = -\frac{p}{2}$ те параболе.

- 5.6. Произвольна права ℓ сече хиперболу у тачкама P и Q , а асимптоте хиперболе у тачкама M и N .
Доказати да је $MP = NQ$.

Решење:



Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме је једначина посматране хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Нека је $P(x_p, y_p)$ произвольна тачка хиперболе и нека је права ℓ дата са $\ell: \frac{x-x_p}{\mu} = \frac{y-y_p}{\nu}$, при чему је $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$.

$$\ell: \frac{x-x_p}{\mu} = \frac{y-y_p}{\nu} = t \Rightarrow x = \mu t + x_p, y = \nu t + y_p$$

Означимо са $Q(x_q, y_q)$, $M(x_m, y_m)$ и $N(x_n, y_n)$ редом другу пресечну тачку праве ℓ и хиперболе и две пресечне тачке праве ℓ и асимптота хиперболе.

$$Q \in \ell \Rightarrow (\exists t_1 \in \mathbb{R}) \quad x_q = \mu t_1 + x_p, y_q = \nu t_1 + y_p$$

$$M \in \ell \Rightarrow (\exists t_2 \in \mathbb{R}) \quad x_m = \mu t_2 + x_p, y_m = \nu t_2 + y_p$$

$$N \in \ell \Rightarrow (\exists t_3 \in \mathbb{R}) \quad x_n = \mu t_3 + x_p, y_n = \nu t_3 + y_p$$

Тачка Q припада хиперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, те је $\frac{x_q^2}{a^2} - \frac{y_q^2}{b^2} = 1$.

$$\frac{(\mu t_1 + x_p)^2}{a^2} - \frac{(\nu t_1 + y_p)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\mu^2 t_1^2 + 2\mu x_p t_1 + x_p^2}{a^2} - \frac{\nu^2 t_1^2 + 2\nu y_p t_1 + y_p^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\mu^2}{a^2} t_1^2 + \frac{2\mu x_p}{a^2} t_1 + \frac{x_p^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{b^2} t_1^2 - \frac{2\nu y_p}{b^2} t_1 - \frac{y_p^2}{b^2} = \frac{x_p^2}{a^2} - \frac{y_p^2}{b^2}$$

$$t_1 \cdot \left(\left(\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{b^2} \right) t_1 + 2 \left(\frac{\mu x_p}{a^2} - \frac{\nu y_p}{b^2} \right) \right) = 0$$

$$t_1 = 0$$

$$x_q = \mu t_1 + x_p = \mu \cdot 0 + x_p = x_p$$

$$y_q = \nu t_1 + y_p = \nu \cdot 0 + y_p = y_p$$

$$P = Q$$

$$\left(\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{b^2} \right) t_1 = -2 \left(\frac{\mu x_p}{a^2} - \frac{\nu y_p}{b^2} \right)$$

$$t_1 = \frac{-2 \left(\frac{\mu x_p}{a^2} - \frac{\nu y_p}{b^2} \right)}{\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{b^2}}$$

Тачка P је на хиперболи те је

$$\frac{x_p^2}{a^2} - \frac{y_p^2}{b^2} = 1$$

$\therefore \left(\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{b^2} \right) \neq 0$ ово мора важити да би права ℓ секла хиперболу у две тачке

Једначине асимптота хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ су $a_1: y = \frac{b}{a}x$ и $a_2: y = -\frac{b}{a}x$.

Нека без умањена општости тачка $M(x_M, y_M)$ припада асимптоти $a_1: y = \frac{b}{a}x$. $\Rightarrow y_M = \frac{b}{a}x_M$

$$y_P + y_M = \frac{b}{a}(x_P + x_M) \quad | : b \neq 0$$

$$\frac{y}{b} t_2 + \frac{y_P}{b} = \frac{x}{a} t_2 + \frac{x_P}{a}$$

$$\frac{y_P}{b} - \frac{x_P}{a} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) t_2 \quad | : \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \neq 0$$

$$t_2 = \frac{\frac{y_P}{b} - \frac{x_P}{a}}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}$$

$$t_2 = -\frac{\left(\frac{x_P}{a} - \frac{y_P}{b}\right)}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}$$

ово мора
важити
јер по
услову
задатка
права ℓ
сече
асимптоту
 a_1

Тачка $N(x_N, y_N)$ припада асимптоти $a_2: y = -\frac{b}{a}x \Rightarrow y_N = -\frac{b}{a}x_N$

$$y_P + y_N = -\frac{b}{a}(x_P + x_N) \quad | : b \neq 0$$

$$\frac{y}{b} t_3 + \frac{y_P}{b} = -\frac{x}{a} t_3 - \frac{x_P}{a}$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) t_3 = -\frac{x_P}{a} - \frac{y_P}{b}$$

$$t_3 = -\frac{\frac{x_P}{a} + \frac{y_P}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}$$

ово мора
важити
јер по
услову
задатка
права ℓ
сече асимптоту
 a_2

$$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(x_P - (x_P + \mu t_2))^2 + (y_P - (y_P + \nu t_2))^2} = \sqrt{\mu^2 t_2^2 + \nu^2 t_2^2} = \sqrt{(\mu^2 + \nu^2) t_2^2}$$

$$NQ = \sqrt{(x_Q - x_N)^2 + (y_Q - y_N)^2} = \sqrt{(x_P + \mu t_1 - (x_P + \mu t_3))^2 + (y_P + \nu t_1 - (y_P + \nu t_3))^2} = \sqrt{\mu^2 (t_1 - t_3)^2 + \nu^2 (t_1 - t_3)^2} = \sqrt{(\mu^2 + \nu^2) (t_1 - t_3)^2}$$

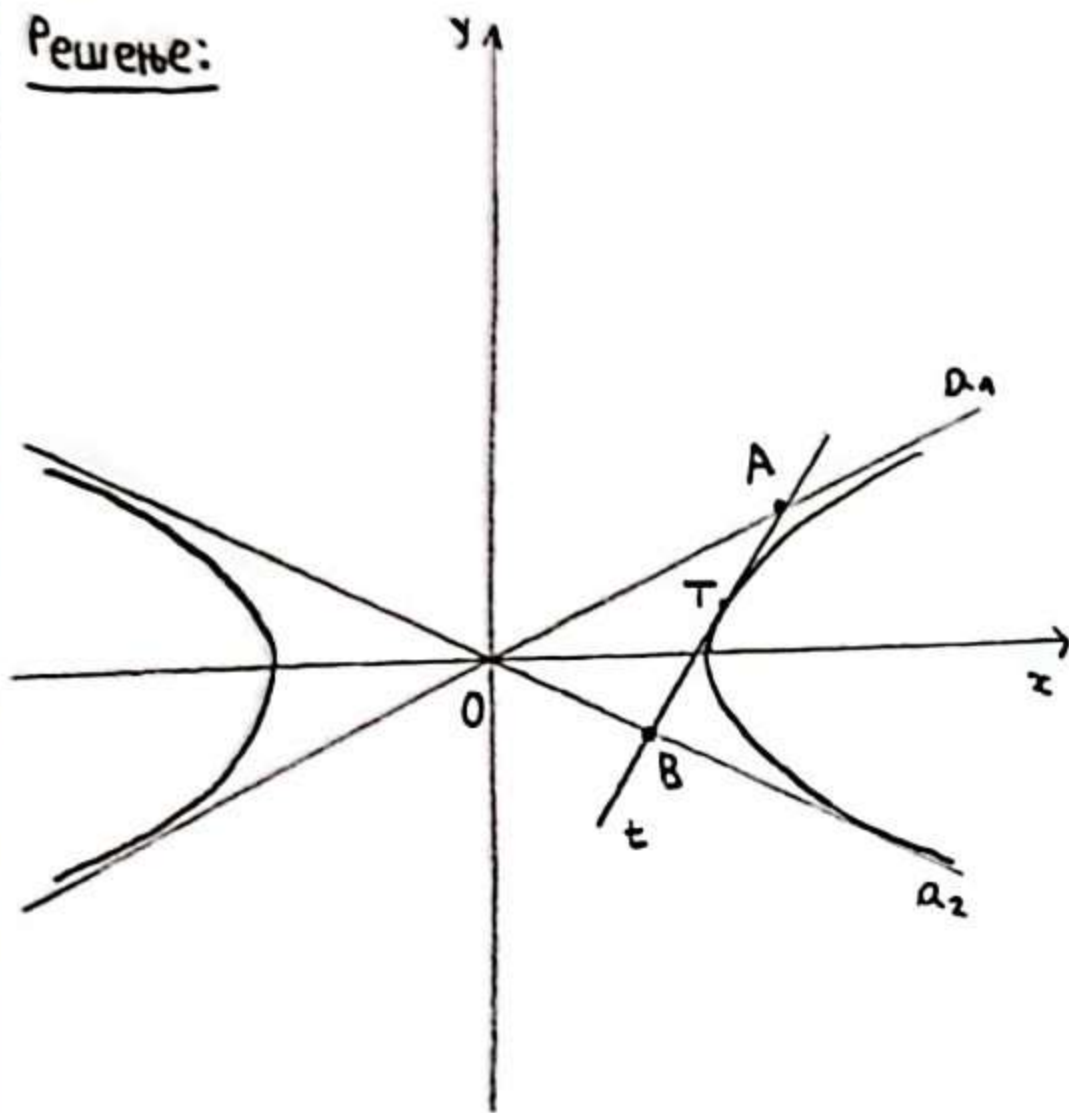
$$t_1 - t_3 = -\frac{2\left(\frac{x_P \mu}{a^2} - \frac{y_P \nu}{b^2}\right)}{\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{b^2}} + \frac{\frac{x_P}{a} + \frac{y_P}{b}}{\frac{\mu}{a} + \frac{\nu}{b}} = \frac{-2\frac{x_P \mu}{a^2} + 2\frac{y_P \nu}{b^2} + \left(\frac{x_P}{a} + \frac{y_P}{b}\right) \cdot \left(\frac{\mu}{a} - \frac{\nu}{b}\right)}{\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{-\frac{x_P \mu}{a^2} - \frac{x_P \nu}{ab} + \frac{y_P \mu}{ab} + \frac{y_P \nu}{b^2}}{\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{b^2}} = \frac{\left(-\frac{x_P}{a} + \frac{y_P}{b}\right) \cdot \left(\frac{\mu}{a} - \frac{\nu}{b}\right)}{\left(\frac{\mu}{a} - \frac{\nu}{b}\right) \cdot \left(\frac{\mu}{a} + \frac{\nu}{b}\right)} = \frac{-\left(\frac{x_P}{a} - \frac{y_P}{b}\right)}{\frac{\mu}{a} - \frac{\nu}{b}} = t_2 \Rightarrow NQ = \sqrt{(\mu^2 + \nu^2) (t_1 - t_3)^2} = \sqrt{(\mu^2 + \nu^2) \cdot t_2^2} = MP \text{ што}$$

се и тражило.

5.7. Доказати да је површина троугла чије су странице асимптоте хиперболе и тангента на хиперболу, константна.

Решење:



Нека је $T(x_T, y_T)$ произволна тачка хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Како је T тачка са те хиперболе, то је $\frac{x_T x_T}{a^2} - \frac{y_T y_T}{b^2} = 1$ једначина тангенте t хиперболе у тачки T .

Једначине асимптота хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ су $a_1: y = \frac{b}{a}x$ и $a_2: y = -\frac{b}{a}x$.

Претпостављамо да тангента t сече асимптоту a_1 у тачки $A(x_A, y_A)$, а асимптоту a_2 у тачки $B(x_B, y_B)$.

$A \in a_1 \Rightarrow y_A = \frac{b}{a}x_A$ и то убацимо у $\frac{x_A x_T}{a^2} - \frac{y_A y_T}{b^2} = 1$ (важи јер $A \in t$)

$$\frac{x_A x_T}{a^2} - \frac{\frac{b}{a} x_A y_T}{b^2} = 1$$

$$x_A \cdot \left(\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab} \right) = 1 \quad / : \left(\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab} \right) \neq 0$$

$$x_A = \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}}$$

јер би у супротном било $0=1$, те не би постојало x_A

$$y_A = \frac{b}{a} \cdot x_A = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}}$$

$B \in a_2 \Rightarrow y_B = -\frac{b}{a}x_B$ и то убацимо у $\frac{x_B x_T}{a^2} - \frac{y_B y_T}{b^2} = 1$ (важи јер $B \in t$)

$$\frac{x_B x_T}{a^2} - \frac{-\frac{b}{a} x_B y_T}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_B x_T}{a^2} + \frac{x_B y_T}{ab} = 1$$

$$x_B \cdot \left(\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab} \right) = 1 \quad / : \left(\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab} \right) \neq 0 \text{ јер би у супротном било } x_B \cdot 0 = 1, \text{ те не би постојало } x_B$$

$$x_B = \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}}$$

$$y_B = -\frac{b}{a} \cdot x_B = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}}$$

$$\vec{OA} = [A] - [O] = \left(\frac{1}{\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}}, \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}} \right) - (0,0) = \left(\frac{1}{\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}}, \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}} \right) = (x_A, y_A)$$

$$\vec{OB} = [B] - [O] = \left(\frac{1}{\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}}, -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}} \right) - (0,0) = \left(\frac{1}{\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}}, -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}} \right) = (x_B, y_B)$$

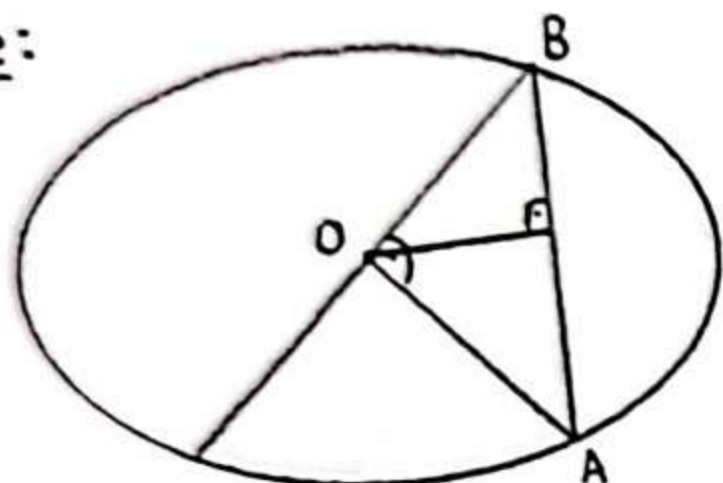
$$\begin{aligned} P_{OAB} &= \frac{1}{2} \|\vec{OA} \times \vec{OB}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & 0 \\ x_B & y_B & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} y_A & 0 \\ y_B & 0 \end{vmatrix} \vec{i} + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & 0 \\ x_B & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} \vec{k} \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \left\| (-1)^2 \cdot (y_A \cdot 0 - y_B \cdot 0) \vec{i} + (-1)^3 \cdot (x_A \cdot 0 - x_B \cdot 0) \vec{j} + (-1)^4 \cdot (x_A y_B - x_B y_A) \vec{k} \right\| = \frac{1}{2} \left\| 1 \cdot 0 \vec{i} - 0 \cdot \vec{j} + (x_A y_B - x_B y_A) \vec{k} \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \left\| (x_A y_B - x_B y_A) \vec{k} \right\| = \frac{1}{2} |x_A y_B - x_B y_A| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}} - \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(-\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{x_T}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{y_T}{ab}\right)^2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x_T}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{y_T}{ab}\right)^2} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{b}{a} \right| \cdot \left| \frac{1}{\left(\frac{x_T}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{y_T}{ab}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x_T}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{y_T}{ab}\right)^2} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot \left| \frac{2}{\frac{x_T^2}{a^4} - \frac{y_T^2}{a^2 b^2}} \right| = \frac{b}{2a} \cdot \frac{2}{\left| \frac{x_T^2}{a^4} - \frac{y_T^2}{a^2 b^2} \right|} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a^2} \left| \frac{x_T^2}{a^2} - \frac{y_T^2}{b^2} \right|} \uparrow = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a^2} \cdot |1|} = \frac{b}{a} \cdot a^2 = ab \end{aligned}$$

$$\frac{x_T^2}{a^2} - \frac{y_T^2}{b^2} = 1 \text{ јер тачка } T(x_T, y_T) \text{ припада хиперболи}$$

Дакле, површина троугла OAB не зависи од избора тачке T, односно од избора тангенте на хиперболу, те је површина троугла ограниченог асимптотима хиперболе и тангентом на хиперболу константна.

5.8. Нека су дужи OA и OB два узајамно нормална полудијаметра елипсе. Доказати да је растојање центра O елипсе од тетиве AB константа која не зависи од избора полудијаметара.

Решење:



Постоји Декартов правоугли координатни систем у којем дата елипса има једначину $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тачка O је центар те елипсе, те има координате $(0,0)$ тј. $O(0,0)$ је центар те елипсе. Нека је $A(x_A, y_A)$ произвољна тачка са елипсе. $A \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1$ те важи $(x_A, y_A) \neq (0,0)$ јер би у супротном $1 = \frac{0^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 0$ $\nmid$
 $\Rightarrow \vec{OA} = [A] - [O] = (x_A, y_A) - (0,0) = (x_A, y_A) \neq (0,0)$ и важи $OA \perp OB$ по услову задатка те је $\vec{OA}$ вектор нормале праве OB . Зато је једначина праве $OB: \frac{x-0}{-y_A} = \frac{y-0}{x_A}$ јер права OB садржи тачку $(0,0)$ и вектор правца јој је $(-y_A, x_A)$ јер је $(-y_A, x_A) \cdot (x_A, y_A) = -y_A \cdot x_A + x_A \cdot y_A = 0$.

Како је тачка B на тој правој, то $(\exists t \in \mathbb{R}) \frac{x_B}{-y_A} = \frac{y_B}{x_A} = t$ тј. $x_B = -y_A t, y_B = x_A t$.

$$B \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_B^2}{a^2} + \frac{y_B^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(-y_A t)^2}{a^2} + \frac{(x_A t)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y_A^2 t^2}{a^2} + \frac{x_A^2 t^2}{b^2} = 1$$

$$t^2 \left(\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2} \right) = 1$$

$$t^2 = \frac{1}{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}$$

$$/ : \left(\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2} \right) \neq 0 \text{ јер је } \frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2} \geq 0 \text{ и } (x_A, y_A) \neq (0,0)$$

и како је $\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2} > 0$ то постоје две могућности за t , односно за тачку B

1^о случај $t = - \frac{1}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}}$

$$x_B = -y_A t = \frac{y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}}$$

$$y_B = x_A t = \frac{-x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}}$$

$$\vec{AB} = [B] - [A] = (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A) \neq (0,0) \text{ јер ако би } x_B = x_A \text{ и } y_B = y_A, \text{ онда би } B = A \neq O \text{ али тада не би било } OA \perp OB$$

Једначина праве АВ је $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$, односно $(y_B-y_A)(x-x_A) = (x_B-x_A)(y-y_A)$

$$(y_B-y_A)x - x_A(y_B-y_A) = (x_B-x_A)y - y_A(x_B-x_A)$$

$$(y_B-y_A)x - (x_B-x_A)y - (y_B-y_A)x_A + (x_B-x_A)y_A = 0$$

$$(y_B-y_A)x - (x_B-x_A)y - y_Bx_A + \cancel{x_Ay_A} + x_By_A - \cancel{x_Ay_A} = 0$$

$$(y_B-y_A)x - (x_B-x_A)y - y_Bx_A + x_By_A = 0$$

Растојање тачке $O(0,0)$ од праве АВ је $d(O,AB) = \frac{|(y_B-y_A) \cdot 0 - (x_B-x_A) \cdot 0 - y_Bx_A + x_By_A|}{\sqrt{(y_B-y_A)^2 + (x_B-x_A)^2}} = \frac{|-y_Bx_A + x_By_A|}{\sqrt{y_B^2 - 2y_By_A + y_A^2 + x_B^2 - 2x_Bx_A + x_A^2}}$

$$= \frac{\left| -\frac{-x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}} \cdot x_A + \frac{y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}} \cdot y_A \right|}{\sqrt{(y_B-y_A)^2 + (x_B-x_A)^2}} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{-x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}} \right)^2 - 2 \cdot \frac{-x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}} \cdot y_A + y_A^2 + \left(\frac{y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}} \right)^2 - 2 \cdot \frac{y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}} \cdot x_A + x_A^2}$$

$$= \frac{\left| \frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}} \right|}{\sqrt{\frac{x_A^2 + y_A^2}{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}} + x_A^2 + y_A^2}}$$

$$= \frac{\frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}}}{\sqrt{(x_A^2 + y_A^2) \cdot \left(\frac{1}{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}} + 1 \right)}}$$

$$= \frac{\frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}}}{\sqrt{(x_A^2 + y_A^2) \cdot \frac{1 + \frac{x_A^2}{b^2} + \frac{y_A^2}{a^2}}{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}}}$$

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1 \text{ јер } A \in E$$

$$\downarrow = \frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{(x_A^2 + y_A^2) \cdot \left(\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} + \frac{x_A^2}{b^2} + \frac{y_A^2}{a^2} \right)}}$$

$$= \frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{(x_A^2 + y_A^2) \left(x_A^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + y_A^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right)}} = \frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{(x_A^2 + y_A^2)^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}} = \frac{x_A^2 + y_A^2}{(x_A^2 + y_A^2) \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \text{ што не зависи}$$

од избора полудијаметара ОА и ОВ, већ само од велике и мале полусе елипсе.

$$2^\circ \text{ случај} \quad t = \frac{1}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}} \Rightarrow x_B = -y_A t = \frac{-y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}}, \quad y_B = x_A t = \frac{x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}}$$

$$\vec{AB} = [B] - [A] = (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A) \neq (0, 0) \text{ јер ако би } x_B = x_A \text{ и } y_B = y_A, \text{ онда би } B = A \neq O \text{ али тада не би било } OA \perp OB$$

$$\text{Једначина праве } AB \text{ је } \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, \text{ односно } (y_B - y_A)(x - x_A) = (x_B - x_A)(y - y_A) \Rightarrow (y_B - y_A)x - (y_B - y_A)x_A = (x_B - x_A)y - (x_B - x_A)y_A$$

$$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y - y_B x_A + y_A x_A + x_B y_A - x_A y_A = 0$$

$$\text{Растојање тачке } O(0,0) \text{ од праве } AB \text{ је } d(O, AB) = \frac{|(y_B - y_A) \cdot 0 - (x_B - x_A) \cdot 0 - y_B x_A + x_B y_A|}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}} = \frac{|-y_B x_A + x_B y_A|}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}}$$

$$= \frac{\left| -\frac{x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}} \cdot x_A + \frac{-y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}} \cdot y_A \right|}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}} = \frac{\left| -\frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}} \right|}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}}}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{y_A^2}{a^2} + \frac{x_A^2}{b^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x_A^2}{b^2} + \frac{y_A^2}{a^2}\right)}} = \frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{(x_A^2 + y_A^2) \cdot \left(\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} + \frac{x_A^2}{b^2} + \frac{y_A^2}{a^2}\right)}}$$

$$= \frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{(x_A^2 + y_A^2) \cdot \left(\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} + \frac{x_A^2}{b^2} + \frac{y_A^2}{a^2}\right)}} = \frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{(x_A^2 + y_A^2) \cdot \left(\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} + \frac{x_A^2}{b^2} + \frac{y_A^2}{a^2}\right)}}$$

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1 \text{ јер } A \in E$$

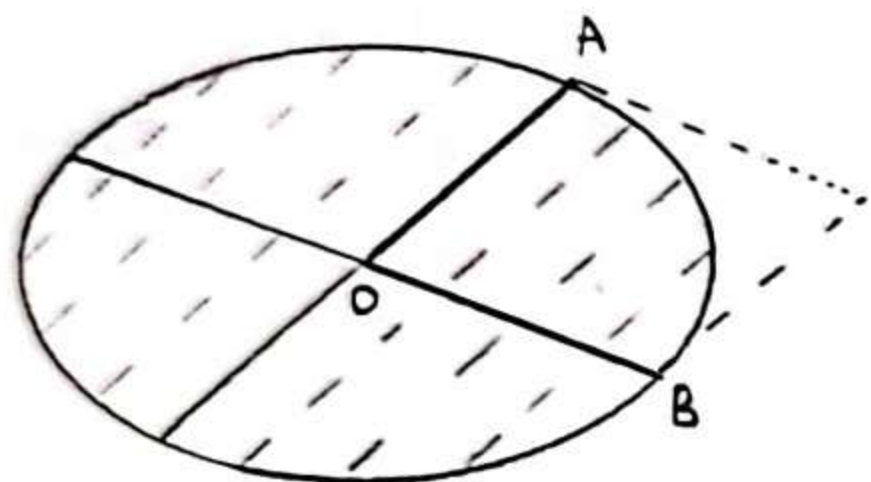
$$= \frac{x_A^2 + y_A^2}{\sqrt{(x_A^2 + y_A^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \text{ што не зависи од избора полудијаметара } OA \text{ и } OB, \text{ већ само од велике}$$

и мале полуосе елипсе.

Дакле, растојање центра O елипсе од тетиве AB је константа која не зависи од избора полудијаметара.

5.9. Доказати да површина паралелограма који је разпет конјугованим полудијаметрима елипсе не зависи од избора полудијаметара.

Решење:



Нека је $A(x_A, y_A)$ произвољна тачка елипсе $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Тада је $\vec{OA} = [A] - [O] = (x_A, y_A) - (0, 0) = (x_A, y_A) \neq (0, 0)$ (јер би у супротном $1 = \frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = \frac{0^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 0 + 0 = 0 \neq 1$) вектор правца полудијаметра OA , те на основу задатка 5.1. следи да је вектор правца конјугованог дијаметра $(\frac{y_A}{b^2}, -\frac{x_A}{a^2})$. Зато је једначина праве q којој је тај конјуговани дијаметар $q: \frac{x-0}{\frac{y_A}{b^2}} = \frac{y-0}{-\frac{x_A}{a^2}}$.

$$B \in q \Rightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) \quad \frac{x_B}{\frac{y_A}{b^2}} = \frac{y_B}{-\frac{x_A}{a^2}} = t \Rightarrow x_B = \frac{y_A}{b^2} t, \quad y_B = -\frac{x_A}{a^2} t \quad \text{где је } B(x_B, y_B)$$

$$B \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_B^2}{a^2} + \frac{y_B^2}{b^2} = 1 \quad \text{и у ово убацимо } x_B = \frac{y_A}{b^2} t \quad \text{и} \quad y_B = -\frac{x_A}{a^2} t$$

$$\frac{\left(\frac{y_A t}{b^2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(-\frac{x_A}{a^2} t\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y_A^2 t^2}{a^2 b^4} + \frac{x_A^2 t^2}{a^4 b^2} = 1$$

$$\frac{t^2}{a^2 b^2} \cdot \left(\frac{y_A^2}{b^2} + \frac{x_A^2}{a^2} \right) = 1$$

1 јер тачка A припада елипси $\mathcal{E}$

$$t^2 = a^2 b^2$$

Како је $a > 0$ и $b > 0$, то је $a^2 b^2 > 0$, те постоје две могућности за t , односно две могућности за тачку B .

$$1^\circ \text{ случај } t = -ab \Rightarrow x_B = \frac{y_A}{b^2} t = \frac{y_A}{b^2} \cdot (-ab) = -\frac{a}{b} y_A, \quad y_B = -\frac{x_A}{a^2} t = -\frac{x_A}{a^2} \cdot (-ab) = \frac{b}{a} x_A \Rightarrow B\left(-\frac{a}{b} y_A, \frac{b}{a} x_A\right)$$

Површина паралелограма разпетог конјугованим полудијаметрима $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ је

$$P = \|\vec{OA} \times \vec{OB}\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & 0 \\ x_B & y_B & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left\| (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} y_A & 0 \\ y_B & 0 \end{vmatrix} \vec{i} + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & 0 \\ x_B & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} \vec{k} \right\| = \left\| 0 \cdot \vec{i} - 0 \cdot \vec{j} + (x_A y_B - x_B y_A) \vec{k} \right\| =$$

$$= \| (x_A \cdot \frac{b}{a} x_A - (-\frac{a}{b}) y_A \cdot y_A) \vec{k} \| = \frac{b}{a} x_A^2 + \frac{a}{b} y_A^2 = ab \cdot \left(\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} \right) = ab \cdot 1 = ab \quad \text{што не зависи од избора полудијаметара}$$

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1 \quad \text{јер } A \in E$$

$$2^\circ \text{ случај} \quad t = ab \Rightarrow x_B = \frac{y_A}{b^2} t = \frac{y_A}{b^2} \cdot ab = \frac{a}{b} y_A, \quad y_B = -\frac{x_A}{a^2} t = -\frac{x_A}{a^2} \cdot ab = -\frac{b}{a} x_A \Rightarrow B\left(\frac{a}{b} y_A, -\frac{b}{a} x_A\right)$$

Површина паралелограма разпетог конјугованим полудијаметрима $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ је

$$P = \|\vec{OA} \times \vec{OB}\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & 0 \\ x_B & y_B & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left\| (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} y_A & 0 \\ y_B & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & 0 \\ x_B & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \right\| = \| 1 \cdot 0 \cdot \vec{i} - 0 \cdot \vec{j} + (x_A y_B - x_B y_A) \vec{k} \| =$$

$$= \| (x_A y_B - x_B y_A) \vec{k} \| = \left\| \left(x_A \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) x_A - \frac{a}{b} y_A \cdot y_A \right) \vec{k} \right\| = \left\| \left(-\frac{b}{a} x_A^2 - \frac{a}{b} y_A^2 \right) \vec{k} \right\| = \left| -\frac{b}{a} x_A^2 - \frac{a}{b} y_A^2 \right| = \left| \frac{b}{a} x_A^2 + \frac{a}{b} y_A^2 \right| =$$

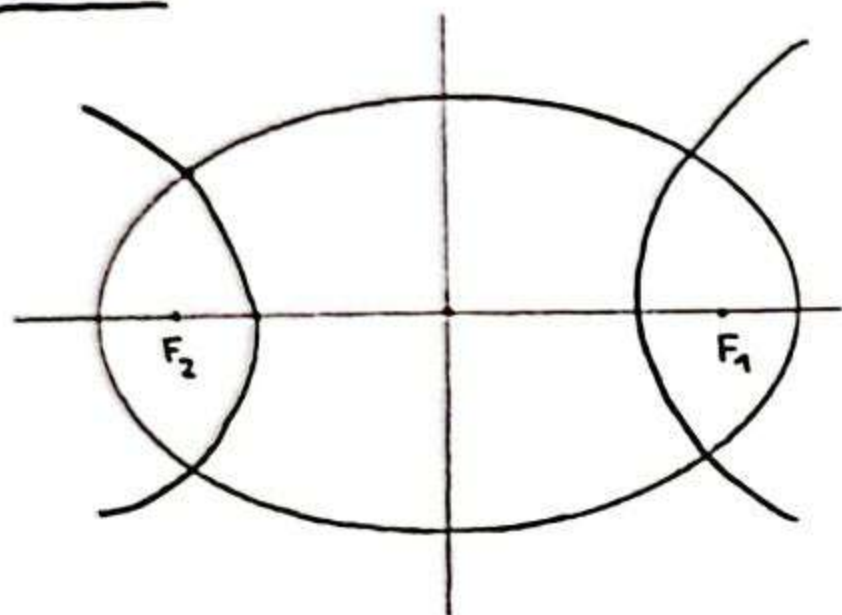
$$= ab \cdot \left(\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} \right) = ab \cdot 1 = ab \quad \text{што не зависи од избора полудијаметара.}$$

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1 \quad \text{јер } A \in E$$

Дакле, површина паралелограма који је разпет конјугованим полудијаметрима елипсе не зависи од избора полудијаметара.

5.10. Доказати да се елипса и хипербола које имају заједничке жиже (конфокалне криве) секу под правим углом.

Решење:



Ако елипса и хипербола имају заједничке жиже F_1 и F_2 , онда имају и заједнички центар O , јер је центар O средиште дужи F_1F_2 . Одаберимо Декартов правоугли координатни систем тако да је његов координатни почетак тачка O , да је x -оса права F_1F_2 , при чему тачка F_1 има позитивну x -координату и да је y -оса нормална на x -оси у тачки O , као и да је координатни систем оријентисан позитивно. Нека је $OF_1 = c$. Тада тачке F_1 и F_2 имају редом координате $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$. Како је Декартов правоугли координатни систем Oxy одабран тако да је центар елипсе (који је и центар хиперболе) координатни почетак, да жиже елипсе и хиперболе (које се поклапају јер су по услову задатка елипса и хипербола конфокалне) припадају x -оси, те да су x -оса и y -оса осе симетрије елипсе и хиперболе, то следи да ове две криве имају канонске једначине у координатном систему Oxy , односно да постоје реалне константе a_1, b_1, a_2, b_2 које су позитивне и $a_1 > b_1$ такве да је $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ једначина елипсе и $\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1$ једначина хиперболе. При томе је $c^2 = a_1^2 - b_1^2$ и $c^2 = a_2^2 + b_2^2$ јер је $c = OF_1$ исто и за елипсу и за хипербалу.

Угао између две криве се дефинише као угао између њихових тангенти у њиховој пресечној тачки.

Нека је $T(x_T, y_T)$ пресечна тачка елипсе и хиперболе. Тада је $\frac{x_T^2}{a_1^2} + \frac{y_T^2}{b_1^2} = 1$ и $\frac{x_T^2}{a_2^2} - \frac{y_T^2}{b_2^2} = 1$.

$$c^2 = a_1^2 - b_1^2 \Rightarrow b_1^2 = a_1^2 - c^2 \quad \text{и} \quad c^2 = a_2^2 + b_2^2 \Rightarrow b_2^2 = c^2 - a_2^2.$$

$$\Rightarrow \frac{x_T^2}{a_1^2} + \frac{y_T^2}{b_1^2} = \frac{x_T^2}{a_1^2} + \frac{y_T^2}{a_1^2 - c^2} = 1 = \frac{x_T^2}{a_2^2} - \frac{y_T^2}{b_2^2} = \frac{x_T^2}{a_2^2} - \frac{y_T^2}{c^2 - a_2^2} \Rightarrow \frac{y_T^2}{a_1^2 - c^2} + \frac{y_T^2}{c^2 - a_2^2} = \frac{x_T^2}{a_1^2} - \frac{x_T^2}{a_2^2}$$

$$y_T^2 \cdot \left(\frac{1}{a_1^2 - c^2} + \frac{1}{c^2 - a_2^2} \right) = x_T^2 \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right)$$

$$y_T^2 \cdot \frac{c^2 - a_2^2 + a_1^2 - c^2}{(a_1^2 - c^2)(c^2 - a_2^2)} = x_T^2 \cdot \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 a_2^2}$$

$$y_T^2 \cdot \frac{a_1^2 - a_2^2}{(a_1^2 - c^2) \cdot (c^2 - a_2^2)} = x_T^2 \cdot \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 a_2^2}$$

сетимо се да је $a_1^2 - c^2 = \underbrace{b_1^2}_{>0}$ и $c^2 - a_2^2 = \underbrace{b_2^2}_{>0}$, те је $a_1^2 > c^2$ и $a_2^2 < c^2$, одакле је $a_2^2 < a_1^2$ тј. $a_1^2 - a_2^2 \neq 0$

те смо скраћивати са $a_1^2 - a_2^2$.

$$\frac{y_T^2}{b_1^2 b_2^2} = \frac{x_T^2}{a_1^2 a_2^2}$$

Ако би било $x_T = 0$, онда би било $\frac{y_T^2}{b_1^2 b_2^2} = \frac{0^2}{a_1^2 a_2^2} = 0 \Rightarrow y_T = 0$ али онда би $1 = \frac{x_T^2}{a_1^2} + \frac{y_T^2}{b_1^2} = \frac{0^2}{a_1^2} + \frac{0^2}{b_1^2} = 0$. $\downarrow$

Дакле, $x_T \neq 0$, те је $\frac{y_T^2}{x_T^2} = \frac{b_1^2 b_2^2}{a_1^2 a_2^2} \Rightarrow \frac{y_T}{x_T} = -\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}$ или $\frac{y_T}{x_T} = \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}$.

1^о случај $\frac{y_T}{x_T} = -\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} \Rightarrow y_T = -b_1 b_2 t, x_T = a_1 a_2 t$ за неко $t \in \mathbb{R}$

$T(x_T, y_T)$ припада елипси $E: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_T^2}{a_1^2} + \frac{y_T^2}{b_1^2} = 1$

$$\frac{(a_1 a_2 t)^2}{a_1^2} + \frac{(-b_1 b_2 t)^2}{b_1^2} = 1$$

$$\frac{a_1^2 a_2^2 t^2}{a_1^2} + \frac{b_1^2 b_2^2 t^2}{b_1^2} = 1$$

$$a_2^2 t^2 + b_2^2 t^2 = 1$$

$$(a_2^2 + b_2^2) t^2 = 1$$

$$c^2 t^2 = 1 \quad / : c^2 \neq 0$$

$$t^2 = \frac{1}{c^2} \quad \text{и } c^2 > 0$$

$$t = -\frac{1}{c}$$

$$t = \frac{1}{c}$$

$$x_T = a_1 a_2 t = -\frac{a_1 a_2}{c} \quad x_T = a_1 a_2 t = \frac{a_1 a_2}{c}$$

$$y_T = -b_1 b_2 t = \frac{b_1 b_2}{c} \quad y_T = -b_1 b_2 t = -\frac{b_1 b_2}{c}$$

$$T_1\left(-\frac{a_1 a_2}{c}, \frac{b_1 b_2}{c}\right) \quad T_2\left(\frac{a_1 a_2}{c}, -\frac{b_1 b_2}{c}\right)$$

1.1° $T_1(-\frac{a_1 a_2}{c}, \frac{b_1 b_2}{c})$ је прва пресечна тачка елипсе и хиперболе

$$T_1 \in \mathcal{E} \Rightarrow \text{Једначина тангенте } t_1^{\mathcal{E}} \text{ елипсе } \mathcal{E} \text{ у тачки } T_1 \text{ је } t_1^{\mathcal{E}}: \frac{x \cdot (-\frac{a_1 a_2}{c})}{a_1^2} + \frac{y \cdot \frac{b_1 b_2}{c}}{b_1^2} = 1$$

$$-\frac{\frac{a_1 a_2}{c}}{\frac{a_1^2}{1}} x + \frac{\frac{b_1 b_2}{c}}{\frac{b_1^2}{1}} y = 1$$

$$-\frac{a_2}{a_1 c} x + \frac{b_2}{b_1 c} y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_1^{\mathcal{E}}} = \left(-\frac{a_2}{a_1 c}, \frac{b_2}{b_1 c}\right) \neq (0,0)$$

$$T_1 \in \mathcal{H} \Rightarrow \text{Једначина тангенте } t_1^{\mathcal{H}} \text{ хиперболе } \mathcal{H} \text{ у тачки } T_1 \text{ је } t_1^{\mathcal{H}}: \frac{x \cdot (-\frac{a_1 a_2}{c})}{a_2^2} - \frac{y \cdot \frac{b_1 b_2}{c}}{b_2^2} = 1$$

$$-\frac{\frac{a_1 a_2}{c}}{\frac{a_2^2}{1}} x - \frac{\frac{b_1 b_2}{c}}{\frac{b_2^2}{1}} y = 1$$

$$-\frac{a_1}{a_2 c} x - \frac{b_1}{b_2 c} y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_1^{\mathcal{H}}} = \left(-\frac{a_1}{a_2 c}, -\frac{b_1}{b_2 c}\right) \neq (0,0)$$

$$\text{Како је } \vec{n}_{t_1^{\mathcal{E}}} \cdot \vec{n}_{t_1^{\mathcal{H}}} = \left(-\frac{a_2}{a_1 c}, \frac{b_2}{b_1 c}\right) \cdot \left(-\frac{a_1}{a_2 c}, -\frac{b_1}{b_2 c}\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 c^2} - \frac{b_1 b_2}{b_1 b_2 c^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \text{ и } \vec{n}_{t_1^{\mathcal{E}}} \neq \vec{0}, \vec{n}_{t_1^{\mathcal{H}}} \neq \vec{0}$$

то су вектори нормала правих $t_1^{\mathcal{E}}$ и $t_1^{\mathcal{H}}$ међусобно нормални, те је $t_1^{\mathcal{E}} \perp t_1^{\mathcal{H}}$.

1.2° $T_2(\frac{a_1 a_2}{c}, -\frac{b_1 b_2}{c})$ је друга пресечна тачка елипсе и хиперболе

$$T_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow \text{Једначина тангенте } t_2^{\mathcal{E}} \text{ елипсе } \mathcal{E} \text{ у тачки } T_2 \text{ је } t_2^{\mathcal{E}}: \frac{x \cdot \frac{a_1 a_2}{c}}{a_1^2} + \frac{y \cdot (-\frac{b_1 b_2}{c})}{b_1^2} = 1$$

$$\frac{a_2}{a_1 c} x - \frac{b_2}{b_1 c} y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_2^{\mathcal{E}}} = \left(\frac{a_2}{a_1 c}, -\frac{b_2}{b_1 c}\right) \neq (0,0)$$

$$T_2 \in \mathcal{H} \Rightarrow \text{Једначина тангенте } t_2^{\mathcal{H}} \text{ хиперболе } \mathcal{H} \text{ у тачки } T_2 \text{ је } t_2^{\mathcal{H}}: \frac{x \cdot \frac{a_1 a_2}{c}}{a_1^2} - \frac{y \cdot (-\frac{b_1 b_2}{c})}{b_1^2} = 1$$

$$\frac{a_1}{a_2 c} x + \frac{b_1}{b_2 c} y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_2^{\mathcal{H}}} = \left(\frac{a_1}{a_2 c}, \frac{b_1}{b_2 c} \right) \neq (0, 0)$$

$$\text{Како је } \vec{n}_{t_2^{\mathcal{E}}} \cdot \vec{n}_{t_2^{\mathcal{H}}} = \left(\frac{a_2}{a_1 c}, -\frac{b_2}{b_1 c} \right) \cdot \left(\frac{a_1}{a_2 c}, \frac{b_1}{b_2 c} \right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 c^2} - \frac{b_1 b_2}{b_1 b_2 c^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} = 0, \vec{n}_{t_2^{\mathcal{E}}} \neq \vec{0} \text{ и } \vec{n}_{t_2^{\mathcal{H}}} \neq \vec{0}$$

то су вектори нормала правих $t_2^{\mathcal{E}}$ и $t_2^{\mathcal{H}}$ међусобно нормални, те је $t_2^{\mathcal{E}} \perp t_2^{\mathcal{H}}$.

$$2^{\circ} \text{ случај } \frac{y_T}{x_T} = \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} \Rightarrow y_T = b_1 b_2 \lambda, x_T = a_1 a_2 \lambda \text{ за неко } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$T(x_T, y_T) \text{ припада елипсу } \mathcal{E}: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_T^2}{a_1^2} + \frac{y_T^2}{b_1^2} = 1$$

$$\frac{(a_1 a_2 \lambda)^2}{a_1^2} + \frac{(b_1 b_2 \lambda)^2}{b_1^2} = 1$$

$$\frac{a_1^2 a_2^2 \lambda^2}{a_1^2} + \frac{b_1^2 b_2^2 \lambda^2}{b_1^2} = 1$$

$$a_2^2 \lambda^2 + b_2^2 \lambda^2 = 1$$

$$(a_2^2 + b_2^2) \lambda^2 = 1$$

$$c^2 \lambda^2 = 1 \quad | : c^2 \neq 0$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{c^2} \quad \text{и } c^2 > 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{c} \quad \swarrow \quad \searrow \quad \lambda = \frac{1}{c}$$

$$x_T = a_1 a_2 \lambda = -\frac{a_1 a_2}{c} \quad x_T = a_1 a_2 \lambda = \frac{a_1 a_2}{c}$$

$$y_T = b_1 b_2 \lambda = -\frac{b_1 b_2}{c} \quad y_T = b_1 b_2 \lambda = \frac{b_1 b_2}{c}$$

$$T_3 \left(-\frac{a_1 a_2}{c}, -\frac{b_1 b_2}{c} \right) \quad T_4 \left(\frac{a_1 a_2}{c}, \frac{b_1 b_2}{c} \right)$$

2.1° $T_3(-\frac{a_1 a_2}{c}, -\frac{b_1 b_2}{c})$ је трећа пресечна тачка елипсе и хиперболе

$$T_3 \in \mathcal{E} \Rightarrow \text{Једначина тангенте } t_3^{\mathcal{E}} \text{ елипсе } \mathcal{E} \text{ у тачки } T_3 \text{ је } t_3^{\mathcal{E}}: \frac{x \cdot (-\frac{a_1 a_2}{c})}{a_1^2} + \frac{y \cdot (-\frac{b_1 b_2}{c})}{b_1^2} = 1$$

$$-\frac{a_2}{a_1 c} x - \frac{b_2}{b_1 c} y = 1$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_3^{\mathcal{E}}} = (-\frac{a_2}{a_1 c}, -\frac{b_2}{b_1 c}) \neq (0,0)$$

$$T_3 \in \mathcal{H} \Rightarrow \text{Једначина тангенте } t_3^{\mathcal{H}} \text{ хиперболе } \mathcal{H} \text{ у тачки } T_3 \text{ је } t_3^{\mathcal{H}}: \frac{x \cdot (-\frac{a_1 a_2}{c})}{a_2^2} - \frac{y \cdot (-\frac{b_1 b_2}{c})}{b_2^2} = 1$$

$$-\frac{a_1}{a_2 c} x + \frac{b_1}{b_2 c} y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_3^{\mathcal{H}}} = (-\frac{a_1}{a_2 c}, \frac{b_1}{b_2 c}) \neq (0,0)$$

$$\text{Како је } \vec{n}_{t_3^{\mathcal{E}}} \cdot \vec{n}_{t_3^{\mathcal{H}}} = (-\frac{a_2}{a_1 c}, -\frac{b_2}{b_1 c}) \cdot (-\frac{a_1}{a_2 c}, \frac{b_1}{b_2 c}) = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 c^2} - \frac{b_1 b_2}{b_1 b_2 c^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} = 0, \vec{n}_{t_3^{\mathcal{E}}} \neq \vec{0} \text{ и } \vec{n}_{t_3^{\mathcal{H}}} \neq \vec{0},$$

то су вектори нормала правих $t_3^{\mathcal{E}}$ и $t_3^{\mathcal{H}}$ међусобно нормални, те је $t_3^{\mathcal{E}} \perp t_3^{\mathcal{H}}$.

2.2° $T_4(\frac{a_1 a_2}{c}, \frac{b_1 b_2}{c})$ је четврта пресечна тачка елипсе и хиперболе

$$T_4 \in \mathcal{E} \Rightarrow \text{Једначина тангенте } t_4^{\mathcal{E}} \text{ елипсе } \mathcal{E} \text{ у тачки } T_4 \text{ је } t_4^{\mathcal{E}}: \frac{x \cdot \frac{a_1 a_2}{c}}{a_1^2} + \frac{y \cdot \frac{b_1 b_2}{c}}{b_1^2} = 1$$

$$\frac{a_2}{a_1 c} x + \frac{b_2}{b_1 c} y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_4^{\mathcal{E}}} = (\frac{a_2}{a_1 c}, \frac{b_2}{b_1 c}) \neq (0,0)$$

$$T_4 \in \mathcal{H} \Rightarrow \text{Једначина тангенте } t_4^{\mathcal{H}} \text{ хиперболе } \mathcal{H} \text{ у тачки } T_4 \text{ је } t_4^{\mathcal{H}}: \frac{x \cdot \frac{a_1 a_2}{c}}{a_2^2} - \frac{y \cdot \frac{b_1 b_2}{c}}{b_2^2} = 1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2 c} x - \frac{b_1}{b_2 c} y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_4^{\mathcal{H}}} = (\frac{a_1}{a_2 c}, -\frac{b_1}{b_2 c}) \neq (0,0)$$

$$\text{Како је } \vec{n}_{t_4^{\mathcal{E}}} \cdot \vec{n}_{t_4^{\mathcal{H}}} = (\frac{a_2}{a_1 c}, \frac{b_2}{b_1 c}) \cdot (\frac{a_1}{a_2 c}, -\frac{b_1}{b_2 c}) = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 c^2} - \frac{b_1 b_2}{b_1 b_2 c^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} = 0, \vec{n}_{t_4^{\mathcal{E}}} \neq \vec{0} \text{ и } \vec{n}_{t_4^{\mathcal{H}}} \neq \vec{0}, \text{ то су вектори нормала}$$

правих $t_4^{\mathcal{E}}$ и $t_4^{\mathcal{H}}$ међусобно нормални, те је $t_4^{\mathcal{E}} \perp t_4^{\mathcal{H}}$. Дакле, за све 4 тачке пресека T_1, T_2, T_3 и T_4 су

тангента елипсе и тангента хиперболе међусобно нормалне, тј. елипса и хипербола се секу под правим углом.

5.11. Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке $A(-2, -1)$ и $B(0, -2)$ и којој су праве $x+y+1=0$ и $x-y+1=0$ осе симетрије.

Решење: Нека је $O'x'y'$ други координатни систем коме је права $x-y+1=0$ x' -оса и права $x+y+1=0$ y' -оса.

$$x-y+1=0$$

$$x+1=y$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1}$$

$$x+y+1=0$$

$$x+1=-y$$

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1}$$

Вектор x' -осе треба да буде јединични вектор истог смера као вектор правца $(1, 1)$ праве $x-y+1=0$, а то је вектор

$$\vec{e}_1 = \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Вектор y' -осе треба да буде јединични вектор истог смера

као вектор правца $(-1, 1)$ праве $x+y+1=0$, а то је вектор

$$\vec{e}_2 = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{1+1}} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Означимо са $O'(x_0, y_0)$ пресечну тачку правих $x-y+1=0$ и $x+y+1=0$,

$$x_0 - y_0 + 1 = 0$$

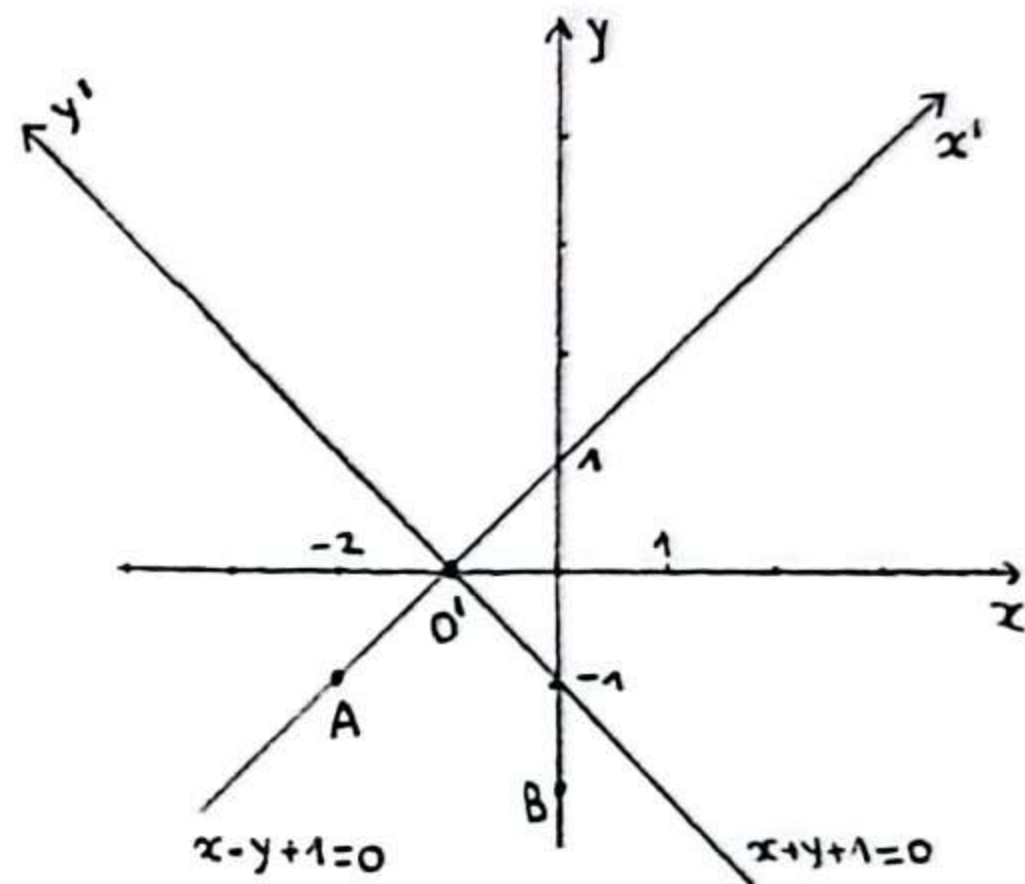
$$x_0 + y_0 + 1 = 0$$

$$\begin{matrix} x_0 - y_0 + 1 = 0 \\ x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \ominus \quad 2y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \text{ и то убацимо у } x_0 - y_0 + 1 = 0$$

$$x_0 - 0 + 1 = 0$$

$$x_0 = -1$$

Дакле, тачка $O'(-1, 0)$ је координатни почетак новог координатног система $O'x'y'$.



Из области Трансформације координата знамо да је веза између старих и нових координата:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑
координате
првог новог
базног вектора
 $\vec{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ у
старој бази

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ где је
 $\vec{e}_1 = (1, 0)$ и $\vec{e}_2 = (0, 1)$

координате
другог новог
базног вектора
 $\vec{e}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ у
старој бази

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

координате новог
координатног
почетка O' у
старој бази

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = (1, 0) \cdot (0, 1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Како је $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ матрица преласка из ортонормираног афиног репера у ортонормирани афини

репер $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, то је $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и ово помножимо слева са} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Тадз тачка $A(-2, -1)$ из Oxy координатног система постаје тачка чије су координате

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ у } O'x'y' \text{ координатном}$$

систему, а тачка $B(0, -2)$ из Oxy координатног система постаје тачка чије су координате

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ у } O'x'y' \text{ координатном}$$

систему.

Крива коју тражимо има две осе симетрије (то су x' и y' осе), те мора бити елипса или хипербола. Трансформацијом координата постигли смо да у $O'x'y'$ координатном систему крива има једначину у канонском облику, односно да је једначина криве $\frac{x'^2}{a^2} + \beta \frac{y'^2}{b^2} = 1$, где је $\beta \in \{-1, 1\}$.

Како тачке $A(-\sqrt{2}, 0)$ и $B(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ у новом координатном систему припадају $\frac{x'^2}{a^2} + \beta \frac{y'^2}{b^2} = 1$, то важи

$$\begin{aligned} \frac{(-\sqrt{2})^2}{a^2} + \beta \cdot \frac{0^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{2}{a^2} &= 1 \\ a^2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{a^2} + \beta \frac{(-\frac{3}{\sqrt{2}})^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{\frac{1}{2}}{2} + \beta \cdot \frac{\frac{9}{2}}{b^2} &= 1 \\ \frac{1}{4} + \beta \cdot \frac{9}{2b^2} &= 1 \end{aligned}$$

$$\beta \frac{9}{2b^2} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\beta \cdot \frac{9}{2b^2} = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \beta > 0 \text{ те мора бити } \beta = 1 \text{ одакле је } 1 \cdot \frac{9}{2b^2} = \frac{3}{4}$$

$$6b^2 = 36$$

$$b^2 = 6$$

Дакле, једначина криве (у питању је елипса) је $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$. У задатку се тражи

једначина криве у почетном координатном систему Oxy . Како је $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}$ и

$y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}$, то заменом у добијену једначину у $O'x'y'$ координатном систему добијамо да је тражена једначина криве (елипсе) у Oxy координатном систему $\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{2} + \frac{(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{6} = 1$ тј. $\frac{(x+y+1)^2}{4} + \frac{(x-y+1)^2}{12} = 1$.

5.12. Одредити једначину параболе која садржи тачку $A(2,1)$, ако су дате њена директриса $x-2y-5=0$ и оса симетрије $2x+y-1=0$.

Решење: Жижна $F(x_F, y_F)$ припада оси параболе $2x+y-1=0$. $\Rightarrow 2x_F + y_F - 1 = 0 \Rightarrow y_F = 1 - 2x_F \Rightarrow y_F - 1 = -2x_F$

Тачка $A(2,1)$ припада параболу. $\Rightarrow \frac{d(A,F)}{d(A,d)} = 1$ јер је ексцентрицитет параболе једнак 1.

$$\left. \begin{aligned} d(A,F) &= AF = \sqrt{(x_F - 2)^2 + (y_F - 1)^2} \\ d(A,d) &= \frac{|2 - 2 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{(x_F - 2)^2 + (y_F - 1)^2} = \sqrt{5} \quad |^2$$

$$(x_F - 2)^2 + (y_F - 1)^2 = 5$$

$$x_F^2 - 4x_F + 4 + (-2x_F)^2 = 5$$

$$x_F^2 - 4x_F + 4 + 4x_F^2 = 5$$

$$5x_F^2 - 4x_F - 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 16 + 20 = 36 = 6^2$$

$$x_{F,1,2} = \frac{4 \pm 6}{10}$$

$$x_F = \frac{4-6}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5} \quad x_F = \frac{4+6}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$1^\circ x_F = -\frac{1}{5} \quad y_F = 1 - 2x_F = 1 - 2 \cdot (-\frac{1}{5}) = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow F(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$$

$$\mathcal{P}_1: \frac{d(T,F)}{d(T,d)} = 1 \quad \text{где је } T(x,y) \text{ произвољна тачка са параболу}$$

$$d(T,F) = TF = \sqrt{(x - (-\frac{1}{5}))^2 + (y - \frac{7}{5})^2} = \sqrt{(x + \frac{1}{5})^2 + (y - \frac{7}{5})^2}$$

$$d(T,d) = \frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{(x + \frac{1}{5})^2 + (y - \frac{7}{5})^2}}{\frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{5}}} = 1 \quad |^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_1: (x + \frac{1}{5})^2 + (y - \frac{7}{5})^2 = \frac{(x - 2y - 5)^2}{5}}$$

$$2^\circ x_F = 1 \quad y_F = 1 - 2x_F = 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow F(1, -1)$$

$$\mathcal{P}_2: \frac{d(T,F)}{d(T,d)} = 1 \quad \text{где је } T(x,y) \text{ произвољна тачка са параболу}$$

$$d(T,F) = TF = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - (-1))^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}$$

$$d(T,d) = \frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}}{\frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{5}}} = 1 \quad |^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_2: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{(x - 2y - 5)^2}{5}}$$

5.13. Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $\ell: x+y-1=0$, а жиже су јој тачке $F_1(1,1)$ и $F_2(-2,-2)$.

Решење: Тражена крива има две жиже, те је у питању елипса или хипербола. Центар криве је средиште дужи F_1F_2 , те су координате центра O редом $\frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2}$ и $\frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2}$ јер су координате жижа $F_1(1,1)$ и $F_2(-2,-2)$. Растојање од центра до жиже (било које) је $c = OF_1 = \sqrt{(1 - (-\frac{1}{2}))^2 + (1 - (-\frac{1}{2}))^2} = \sqrt{(1 + \frac{1}{2})^2 + (1 + \frac{1}{2})^2} = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{2 \cdot (\frac{3}{2})^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, а растојање од центра до директрисе је $\frac{a^2}{c} = d(O, \ell) = \frac{|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-1-1|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Следи да је $a^2 = c\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$, те је $a = \sqrt{3}$. Како је $e = \frac{c}{a}$, следи да је $e = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Да бисмо искористили особину да је количник растојања произвољне тачке криве другог реда од жиже и од директрисе једнак ексцентрицитету, морамо утврдити која од ових жижа је у пару с директрисом. У пару с њом биће она жижа чије је растојање од ње мање. Како је $d(F_1, \ell) = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $d(F_2, \ell) = \frac{|-2-2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$, следи да

су жижа F_1 и директриса ℓ у пару. Дакле, једначина тражене криве (која је хипербола јер је $e = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$) је дата са $\frac{d(T, F_1)}{d(T, \ell)} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ где је $T(x, y)$ произвољна тачка криве.

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}{|x+y-1|} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}_{\geq 0} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} |x+y-1|}_{\geq 0} \quad |^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{3}{4} (x+y-1)^2$$

је тражена једначина криве

5.14. Одредити једначину праве која садржи тачку $A(3,4)$ и додирује криву $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$

Решење: Прва t која садржи тачку $A(3,4)$ има једначину $t: \frac{x-3}{\mu} = \frac{y-4}{\vartheta}$ где је $(\mu, \vartheta) \neq (0,0)$ вектор правца праве t . Да би права t додиривала криву потребно је да постоји јединствена тачка $T(x_T, y_T)$ у пресеку праве t и криве. $T(x_T, y_T) \in t$ те постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је

$$\frac{x-3}{\mu} = \frac{y-4}{\vartheta} = \lambda \Rightarrow x_T = \mu\lambda + 3, y_T = \vartheta\lambda + 4 \text{ и ово убацујемо у } 2x_T^2 - 4x_T y_T + y_T^2 - 2x_T + 6y_T - 3 = 0$$

(што важи јер тачка $T(x_T, y_T)$ припада кривој $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$).

$$2 \cdot (\mu\lambda + 3)^2 - 4 \cdot (\mu\lambda + 3) \cdot (\vartheta\lambda + 4) + (\vartheta\lambda + 4)^2 - 2(\mu\lambda + 3) + 6(\vartheta\lambda + 4) - 3 = 0$$

$$2(\mu^2\lambda^2 + 6\mu\lambda + 9) - 4(\mu\vartheta\lambda^2 + 4\mu\lambda + 3\vartheta\lambda + 12) + \vartheta^2\lambda^2 + 8\vartheta\lambda + 16 - 2\mu\lambda - 6 + 6\vartheta\lambda + 24 - 3 = 0$$

$$\underline{2\mu^2\lambda^2} + \underline{12\mu\lambda} + 18 - \underline{4\mu\vartheta\lambda^2} - \underline{16\mu\lambda} - \underline{12\vartheta\lambda} - 48 + \underline{\vartheta^2\lambda^2} + \underline{14\vartheta\lambda} + 10 - \underline{2\mu\lambda} + 21 = 0$$

$$(2\mu^2 - 4\mu\vartheta + \vartheta^2)\lambda^2 + (-6\mu + 2\vartheta)\lambda + 1 = 0$$

Постоје две могућности да се добије само једно λ , односно јединствена тачка пресека праве t и криве.

Из теорије је познато да би се у првој могућности, када је $2\mu^2 - 4\mu\vartheta + \vartheta^2 = 0$, тј.

имамо линеарну једначину добиле праве које имају јединствену тачку пресека са кривом, али које нису тангенте (нпр. ако је крива парабола онда права паралелна са осом има једну заједничку тачку са параболом, али није тангента).

Познато је и да ако $2\mu^2 - 4\mu\vartheta + \vartheta^2 \neq 0$ и добијена квадратна једначина има дискриминанту једнаку 0, да ће права бити тангента, те нам та друга могућност одговара.

$$\Delta = (-6\mu + 2\vartheta)^2 - 4 \cdot (2\mu^2 - 4\mu\vartheta + \vartheta^2) \cdot 1 = 36\mu^2 - 24\mu\vartheta + 4\vartheta^2 - 8\mu^2 + 16\mu\vartheta - 4\vartheta^2 = 28\mu^2 - 8\mu\vartheta = 4\mu(7\mu - 2\vartheta) = 0$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $\mu = 0 \quad 7\mu - 2\vartheta = 0$

$$\mu = 0$$

$$t_1: \frac{x-3}{\mu} = \frac{y-4}{\nu}$$

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-4}{\nu} \quad / \text{ скратимо } \nu$$

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-4}{1}$$

$$2\mu^2 - 4\mu\nu + \nu^2 = 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 \cdot 1 + 1^2 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow t_1$ је тангента

$$7\mu - 2\nu = 0$$

$$7\mu = 2\nu$$

$$\mu : \nu = 2 : 7 \Rightarrow \mu = 2k, \nu = 7k$$

$$t_2: \frac{x-3}{\mu} = \frac{y-4}{\nu}$$

$$\frac{x-3}{2k} = \frac{y-4}{7k} \quad / \text{ скратимо } k$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{7}$$

$$2\mu^2 - 4\mu\nu + \nu^2 = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 + 7^2 = 2 \cdot 4 - 8 \cdot 7 + 49 =$$

$$= 8 - 56 + 49 = 8 - 7 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow t_2$ је тангента

Постоје две тражене праве и оне су $t_1: \frac{x-3}{0} = \frac{y-4}{1}$ и $t_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{7}$.

Свођење криве другог реда на канонски облик

Нека је дата крива другог реда $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

Нека је $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Важи $(x \ y \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \quad a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \quad a_{13}x + a_{23}y + a_{33}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) \cdot x + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) \cdot y + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = a_{11}x^2 + \underline{a_{12}xy} + \underline{a_{13}x} + \underline{a_{12}xy} + a_{22}y^2 + \underline{a_{23}y} +$

$\underline{a_{13}x} + \underline{a_{23}y} + a_{33} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$. Зато се једначина криве може

написати као $(x \ y \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Свођење криве на канонски облик представља тражење новог Декартовог правоуглог координатног система у којем ће та крива имати једначину облика $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако је крива елипса,

облика $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако је крива хипербола, односно облика $y^2 = 2px$ ако је крива парабала.

Приметимо да ниједна крива у канонском облику нема члан xy .

Дакле, из подматрице $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ треба прећи у матрицу $B' = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix}$.

Ако претпоставимо да је трансформација координата $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ онда је

$(x \ y) B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix})^T B (R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T R_1^T B R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x' \ y') R_1^T B R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$

те је циљ да матрица R_1 буде таква да је $R_1^T B R_1 = B' = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix}$ тј. да $R_1^T B R_1$ буде дијагонална матрица.

Такође, како се свођењем криве другог реда на канонски облик прелази из полазног Декартовог правоуглог координатног система у нови Декартов правоугли координатни систем, а R_1 је матрица трансформације координата из полазног система у нови систем, то је матрица R_1 ортогонална, односно $R_1^T = R_1^{-1}$.

Дакле, тражимо матрицу R_1 са својством $R_1^T = R_1^{-1}$ такву да је $R_1^{-1}BR_1 = R_1^TBR_1$ дијагонална матрица, а из Линеарне алгебре нам је познато да до те матрице дођемо поступком дијагонализације.

5.15. Свести криву другог реда $xu+x+u=0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле трансформације. Одредити основне елементе криве (центар, осе симетрије, жниже, ексцентрицитет, асимптоте - ако постоје). Скицирати криву.

Решење:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{јер из једначине криве } xu+x+u=0 \text{ закључујемо да је } a_{11}=0, 2a_{12}=1 \text{ тј. } a_{12}=\frac{1}{2}, a_{13}=0, \\ 2a_{13}=1 \text{ тј. } a_{13}=\frac{1}{2}, 2a_{23}=1 \text{ тј. } a_{23}=\frac{1}{2}, a_{33}=0$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Потражимо сопствене вредности матрице B .

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \text{ или } \lambda = \frac{1}{2}$$

Дакле, сопствене вредности су $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $\lambda = \frac{1}{2}$. Потражимо сопствене векторе.

$$1^\circ \quad B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$(B - \frac{1}{2}E) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}u \Rightarrow u = v$$

$$\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}u \Rightarrow u = v$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Јединични сопствени вектор је $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

$$2^\circ \quad B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$(B + \frac{1}{2}E) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}u = -\frac{1}{2}v \Rightarrow u = -v$$

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}u = -\frac{1}{2}v \Rightarrow u = -v$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ v \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Јединични сопствени вектор је $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Дакле, трансформација је $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, односно $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нова матрица коефицијената је $A' = R^T A R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow$ Нова једначина криве је $\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' = 0$ (јер је $a'_{11} = \frac{1}{2}$, $a'_{12} = 0$, $a'_{22} = -\frac{1}{2}$, $a'_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a'_{23} = 0$, $a'_{33} = 0$).

$$x'^2 - y'^2 + 2\sqrt{2}x' = 0$$

$$x'^2 + 2\sqrt{2}x' - y'^2 = 0$$

$$(x' + \sqrt{2})^2 - 2 - y'^2 = 0$$

$$(x' + \sqrt{2})^2 - y'^2 = 2 \quad / : 2 \neq 0$$

$$\frac{(x' + \sqrt{2})^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

Уочимо трансформацију $x'' = x' + \sqrt{2}$, $y'' = y'$ и нова једначина је $\frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{2} = 1$, те је у питању хипербола.

$$a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow c = 2$$

Формуле трансформације су $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' - \sqrt{2} \\ y'' \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - \sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$
 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$

Центар криве у (x'', y'') је $(0, 0)$, те је центар у (x, y) одређен са $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 - \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Жиже хиперболе у (x'', y'') су $(-2, 0)$ и $(2, 0)$ јер је $c = 2$, те су жиже хиперболе у (x, y) дате са

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-2-\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-2-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(2-\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(2-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}.$$

Осе симетрије хиперболе у (x'', y'') су $y''=0$ и $x''=0$.

Убацивањем $y''=0$ у $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$ и $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$ добијамо $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - 1$ тј. $y=x$.

Убацивањем $x''=0$ у $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$ и $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$ добијамо $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$ тј. $y=-x-2$.

Осе симетрије у (x, y) су $y=x$ и $y=-x-2$.

Асимптоте у (x'', y'') су $y'' = -\frac{b}{a}x'' = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x'' = -x''$ и $y'' = \frac{b}{a}x'' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x'' = x''$.

Убацујемо $y'' = -x''$ у $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}}x'' - 1 = \sqrt{2}x'' - 1$

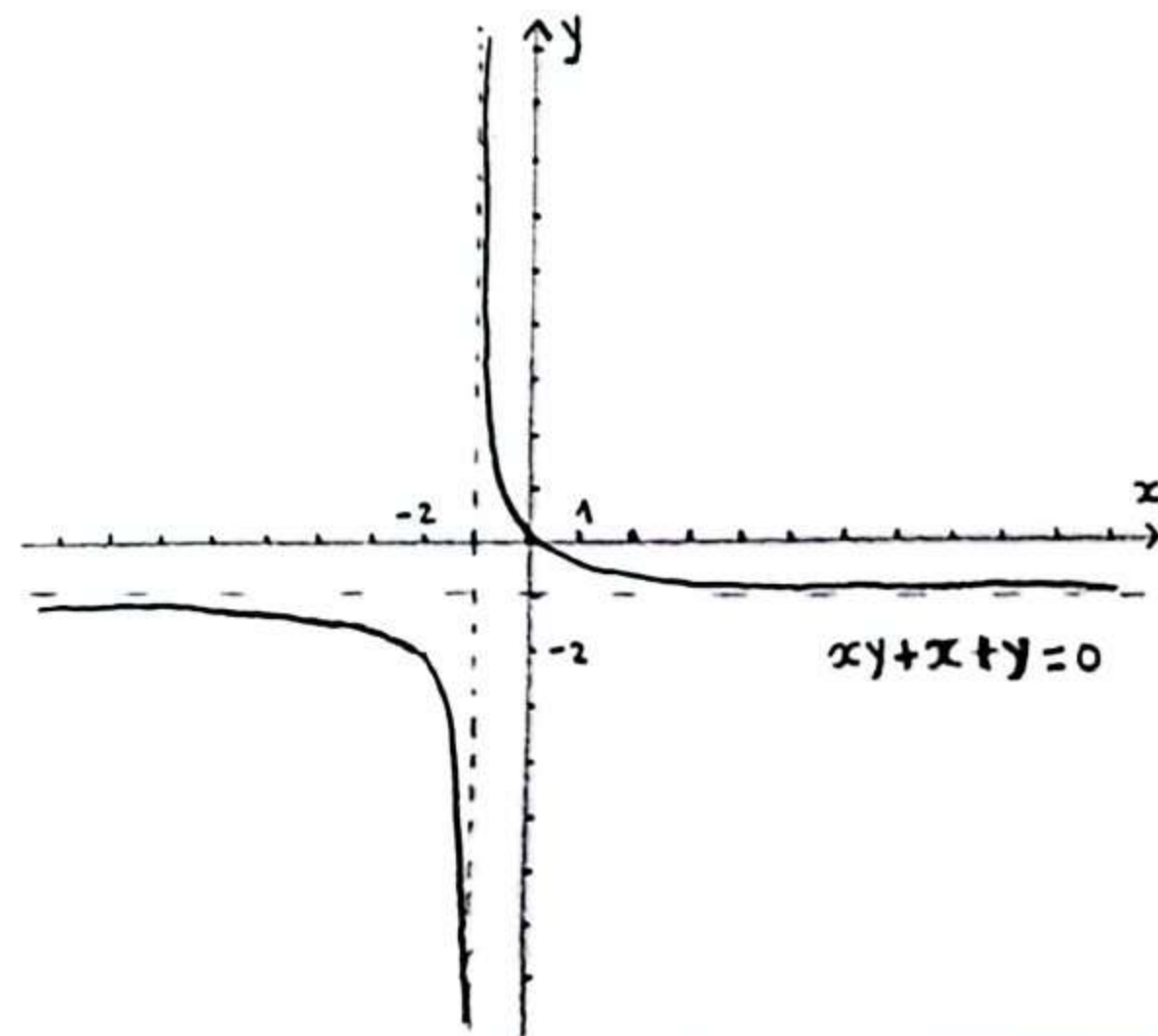
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - 1 = -1.$$

Убацујемо $y'' = x''$ у $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - 1 = -1$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}}x'' - 1 = \sqrt{2}x'' - 1$$

Дакле, асимптоте хиперболе у (x, y) су $y=-1$ и $x=-1$.

Ексцентрицитет хиперболе је $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.



5.16. Свести криву другог реда $4x^2 - 4xy + y^2 + x + 12y + 6 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле те трансформације. Која је то крива и колики јој је ексцентрицитет? Скицирати криву.

Решење: $4x^2 - 4xy + y^2 + x + 12y + 6 = 0 \Rightarrow a_{11}=4 \quad a_{12}=-2 \quad a_{22}=1 \quad a_{13}=\frac{1}{2} \quad a_{23}=6 \quad a_{33}=6$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 6 \end{pmatrix}$ је матрица придружена кривој

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Нађимо сопствене вредности матрице B .

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \cdot (1-\lambda) - (-2) \cdot (-2) = 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$$

$\lambda(\lambda - 5) = 0$ за $\lambda = 0$ и $\lambda = 5$ те су то сопствене вредности.

Нађимо сопствене векторе.

1° $\lambda = 0$

$$(B - \lambda E) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4u - 2v = 0 \quad | :2 \quad 2u - v = 0$$

$$\begin{array}{rcl} 4u - 2v = 0 & & 2u - v = 0 \\ -2u + v = 0 & \xrightarrow{+} & 0 = 0 \\ \hline 2u - v = 0 & & \\ 0 = 0 & & \end{array}$$

$$2u - v = 0$$

$$0 = 0$$

Сопствени вектори који одговарају сопственој вредности 0 су $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 2u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Да бисмо обезбедили својство $R_1^T = R_1^{-1}$ из теорије потребно је узети јединични вектор (вектор дужине 1).

Пошто је $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, следи да ћемо узети

вектор $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

$$2^\circ \lambda = 5$$

$$(B - \lambda E) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-u - 2v = 0 \quad | :(-1)$$

$$-2u - 4v = 0 \quad | :(-2)$$

$$\underline{u + 2v = 0} \Rightarrow u = -2v$$

$$u + 2v = 0$$

Сопствени вектори који одговарају сопственој вредности $\lambda = 5$ су $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v \\ v \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Поново, треба узети јединични сопствени вектор, па пошто је $\sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, следи да можемо узети вектор $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

При томе, можемо приметити да смо овај сопствени вектор добили од сопственог вектора $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ који смо добили за претходну сопствену вредност помоћу: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$.

То важи и генерално (из линеарне алгебре је познато да су код симетричних матрица сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима међусобно нормални), те не морамо рачунати сопствени вектор за другу сопствену вредност.

$$\Rightarrow R_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ и проширимо је до матрице } 3 \times 3, \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тада добијамо трансформацију координата } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ тј. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и једначину криве у новом координатном систему } O'x'y'.$$

$$(x \ y \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T A \left(R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}^T R^T A R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (x' \ y' \ 1) R^T A R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

односно нова матрица коефицијената је $A' = R^T A R$.

$$A' = R^T A R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{25}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{10}{\sqrt{5}} & \frac{5}{\sqrt{5}} & \frac{5}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{25}{2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{25}{5} & \frac{5}{5} \\ \frac{25}{2\sqrt{5}} & \frac{5}{\sqrt{5}} & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 5 & \sqrt{5} \\ \frac{5\sqrt{5}}{2} & \sqrt{5} & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{у новом координатном систему } O'x'y' \text{ крива има једначину}$$

$$0 \cdot x'^2 + 2 \cdot 0 \cdot x'y' + 5 \cdot y'^2 + 2 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2} x' + 2\sqrt{5} y' + 6 = 0 \quad \text{тј.} \quad 5y'^2 + 5\sqrt{5}x' + 2\sqrt{5}y' + 6 = 0.$$

Приметимо да овде нема x'^2 . Да има, извршили бисмо следећу трансформацију коју ћемо извршити над y' .

$$5 \cdot (y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} y') + 5\sqrt{5}x' + 6 = 0$$

$$5 \cdot ((y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - (\frac{1}{\sqrt{5}})^2) + 5\sqrt{5}x' + 6 = 0$$

$$5 \cdot (y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - 5 \cdot \frac{1}{5} + 5\sqrt{5}x' + 6 = 0$$

$$5 (y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - 1 + 5\sqrt{5}x' + 6 = 0$$

$$5 (y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + 5\sqrt{5}x' + 5 = 0$$

$$5 (y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + 5\sqrt{5}(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}) = 0$$

Вршимо следећу трансформацију:

$$y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{5}} \quad x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$5 y''^2 + 5\sqrt{5} x'' = 0 \quad / : 5$$

$$y''^2 + \sqrt{5} x'' = 0$$

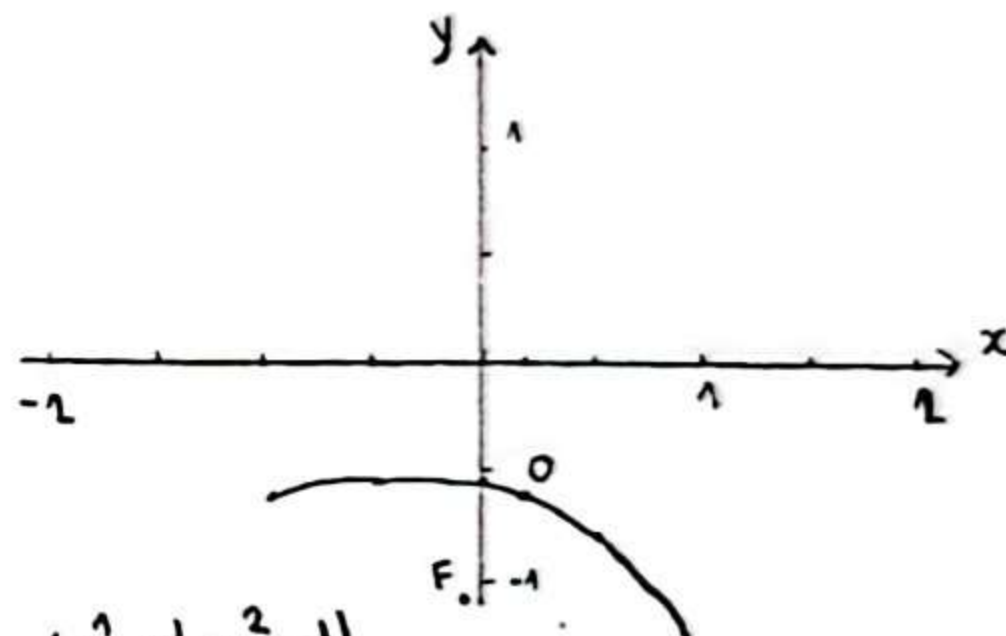
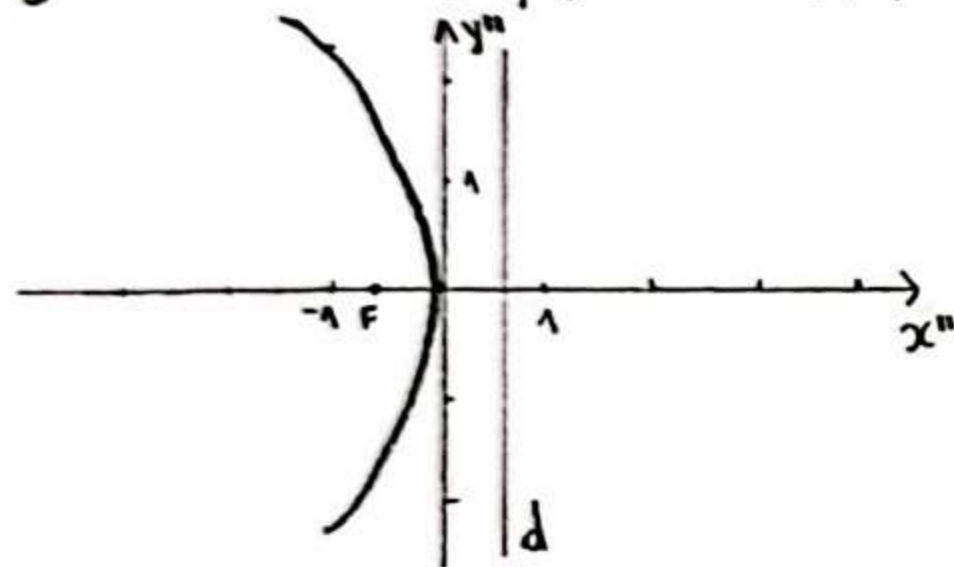
$$y''^2 = -\sqrt{5} x'' = -2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} x'' \Rightarrow p = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{и крива је параболa}$$

Дакле, правимо потпун квадрат од y'^2 и y' , а ако имамо и x'^2 , онда и од x'^2 и x' . При томе, у загради коју подижемо на квадрат коефицијент уз x' , односно y' треба бити 1 и та заграда постаје ново x'' , односно y'' .

Приметимо да је $y''^2 = -2px''$, $p > 0$, те је ова парабола симетрична стандардној канонској параболу $y''^2 = 2px''$, $p > 0$, у односу на y'' -осу.

Ексцентрицитет је једнак 1 јер је у питању парабола.

У канонском облику се одмах види да је теме параболе $O(0,0)$, да је оса $\sigma: y'' = 0$, да је жижа $F(-\frac{\sqrt{5}}{4}, 0)$ и директриса $d: x'' = \frac{\sqrt{5}}{4}$.



Како су формуле трансформације $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{pmatrix}$ тј. $x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'$ и

$y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'$ и како је $x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{5}}$ тј. $x' = x'' - \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}$ тј. $y' = y'' - \frac{1}{\sqrt{5}}$, то је

$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x'' - \frac{1}{\sqrt{5}}) - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot (y'' - \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' - \frac{1}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}y'' + \frac{2}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'' + \frac{1}{5}$ и $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot (x'' - \frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(y'' - \frac{1}{\sqrt{5}}) =$
 $= \frac{2}{\sqrt{5}}x'' - \frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}y'' - \frac{1}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'' - \frac{3}{5}$. Заменом одговарајућих x'' и y'' координата темена добијамо

$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 - \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$, а заменом одговарајућих x'' и y'' координата жиже

$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-\frac{\sqrt{5}}{4}) - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0 + \frac{1}{5} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{-5+4}{20} = -\frac{1}{20}$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot (-\frac{\sqrt{5}}{4}) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 - \frac{3}{5} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = -\frac{5}{10} - \frac{6}{10} = -\frac{11}{10}$