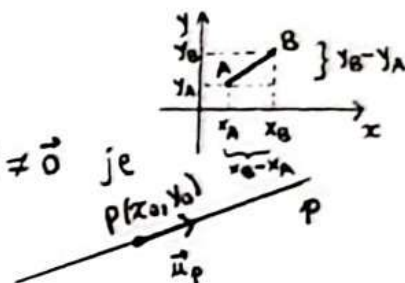


Тачка, права и равни

• Аналитичка геометрија равни

- имамо само x, y координате. Растојање тачака $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ је $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Једначина праве у равни која садржи тачку $P(x_0, y_0)$ и има вектор правца праве $\vec{u}_p = (a, b) \neq \vec{0}$ је

$$p: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (=t) \quad (*)$$



Параметарске једначине ове праве су $x = at + x_0$, $y = bt + y_0$.

Сређивањем (*) тј. унакрсним множењем добија се $b(x - x_0) = a(y - y_0)$

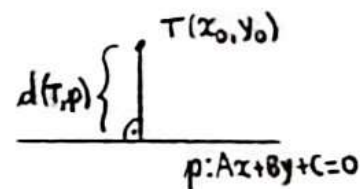
$$bx - bx_0 = ay - ay_0$$

$$bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0$$

$$bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$$

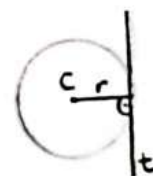
Општи облик је $Ax + By + C = 0$, где је (A, B) вектор нормале праве p (јер је $(A, B) = (b, -a)$, те је $(A, B) \cdot (a, b) = (b, -a) \cdot (a, b) = b \cdot a - a \cdot b = 0$).

- Растојање тачке $T(x_0, y_0)$ од праве $p: Ax + By + C = 0$ је $d(T, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

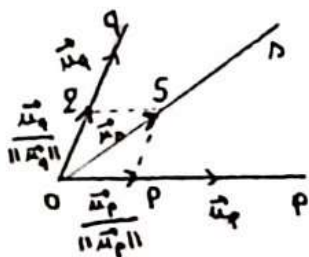


- Једначина кружнице са центром $C(x_0, y_0)$ и полупречником r у равни је $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Услов да је права t тангента ове кружнице је да је $d(C, t) = r$.

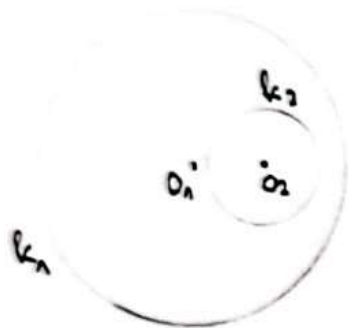


- Вектор правца симетрале $\nless pOq$ је $\vec{u}_s = \frac{\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|} + \frac{\vec{u}_q}{\|\vec{u}_q\|}$ (јер је четвороугао $opsq$ ромб, а дијагонала os тог ромба представља симетралу $\nless pOq = x_{pOq}$).

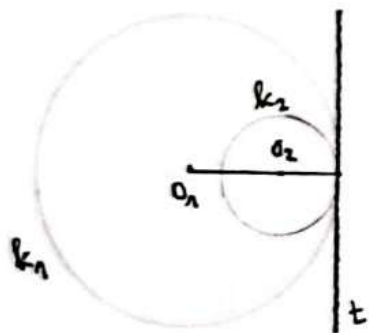


- За једничке тангенте кругова $k_1: (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2$ са центром $O_1(x_1, y_1)$ и полупречника r_1 и $k_2: (x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2$ са центром $O_2(x_2, y_2)$ и полупречника r_2 .

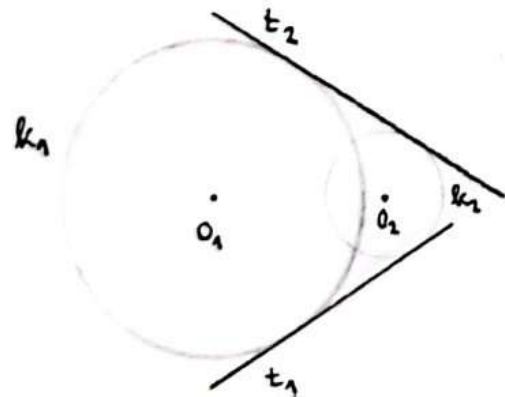
Ако је $O_1O_2 < |r_1 - r_2|$, кругови k_1 и k_2 немају заједничких тангенти (један круг је унутар другог).



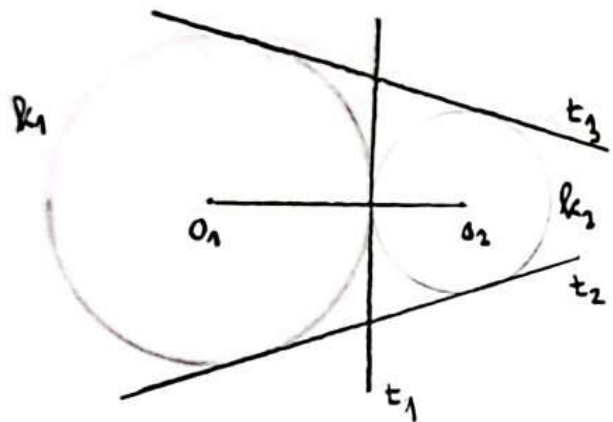
Ако је $O_1O_2 = |r_1 - r_2|$, кругови k_1 и k_2 имају једну заједничку спољашњу тангенту (ти кругови се додирују изнутра).



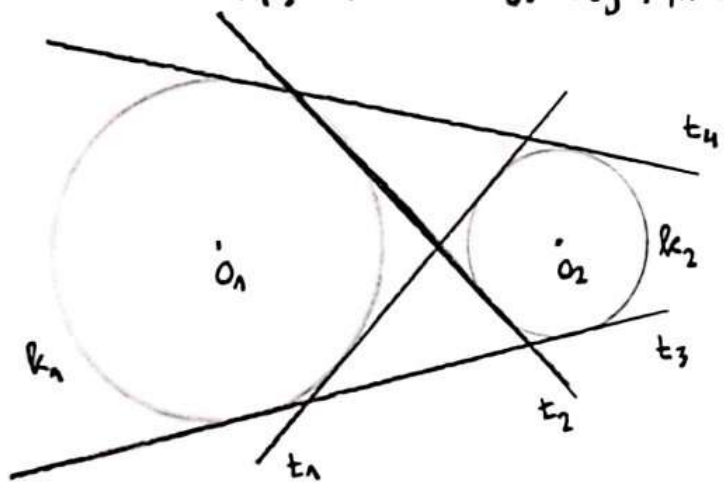
Ако је $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$, кругови k_1 и k_2 имају две заједничке спољашње тангенте (ти кругови се секу).



Ако је $O_1O_2 = r_1 + r_2$, кругови k_1 и k_2 имају једну заједничку унутрашњу и две заједничке спољашње тангенте (ти кругови се додирују споља).



Ако је $O_1O_2 > r_1 + r_2$, кругови k_1 и k_2 имају две заједничке унутрашње и две заједничке спољашње тангенте (ти кругови немају заједничких тачака).



4. Тачка, права и равна

4.1. Одредити углове које права $p: 3x - 2y + 4 = 0$ гради са координатним осама.

Решење: $p: 3x - 2y + 4 = 0$

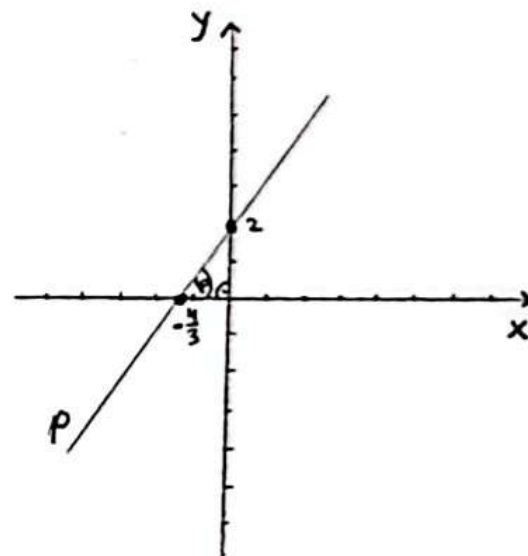
I НАЧИН: $2y = 3x + 4 \quad / : 2 \neq 0$

$$y = \frac{3}{2}x + 2 \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & -\frac{4}{3} \\ \hline y & 2 & 0 \end{array} \quad \frac{3}{2}x + 2 = 0 \quad \frac{3}{2}x = -2 \quad 3x = -4 \quad x = -\frac{4}{3}$$

$k = \frac{3}{2}$ је коефицијент правца праве p и он је једнак $\operatorname{tg} \varphi$ где је φ угао који права p закљача са позитивним делом x -осе.

$$\operatorname{tg} \varphi = k = \frac{3}{2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$$

Права p са x -осом гради угао од $\operatorname{arctg} \frac{3}{2}$, а са y -осом угао $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{3}{2} = \operatorname{arccos} \frac{3}{2} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$.



II НАЧИН: Права $p: 3x - 2y + 4 = 0$ има вектор нормале $\vec{n}_p = (3, -2)$, те је $\vec{u}_p = (2, 3)$ један од вектора правца праве p јер је $(3, -2) \cdot (2, 3) = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 6 - 6 = 0$.
потребан нам је оштар $\angle(p, x\text{-осе})$

$$\vec{e}_1 = (1, 0) \text{ је један од вектора правца } x\text{-осе} \Rightarrow \cos \angle(p, x\text{-осе}) = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{e}_1|}{\|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{e}_1\|} = \frac{|(2, 3) \cdot (1, 0)|}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 0|}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{1+0}} = \frac{|2+0|}{\sqrt{13} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \angle(p, x\text{-осе}) = \operatorname{arccos} \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1) \text{ је један вектор правца } y\text{-осе} \Rightarrow \cos \angle(p, y\text{-осе}) = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{e}_2|}{\|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{e}_2\|} = \frac{|(2, 3) \cdot (0, 1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{|3|}{\sqrt{13} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\Rightarrow \angle(p, y\text{-осе}) = \operatorname{arccos} \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

потребан нам је
оштар $\angle(p, y\text{-осе})$

4.2. Одредити једначину праве n која је нормална на праву $p: 2x+3y-4=0$ и која садржи пресек права $x+y+1=0$ и $x-y=0$.

Решење: $q: x+y+1=0$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & -1 \end{array} \quad y = -x-1$$

$$\{N\} = q \cap r$$

Нека је $N(x_N, y_N)$.

$$N \in q \Rightarrow y_N = -x_N - 1$$

$$N \in r \Rightarrow y_N = x_N$$

$$r: x-y=0$$

$$y = x \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & 0 \end{array} \quad 1$$

$$x_N = -x_N - 1$$

$$x_N + x_N = -1$$

$$2x_N = -1$$

$$x_N = -\frac{1}{2}$$

$$y_N = x_N = -\frac{1}{2}$$

$$N(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$p: 2x+3y-4=0$$

$$3y = -2x+4$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & \frac{4}{3} \end{array} \quad 0$$

$$k_p = -\frac{2}{3}$$

$$n \perp p \Rightarrow k_n \cdot k_p = -1$$

$$k_n \cdot (-\frac{2}{3}) = -1$$

$$k_n = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$n: y - y_N = k_n(x - x_N)$$

$$y - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}(x - (-\frac{1}{2}))$$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(x + \frac{1}{2})$$

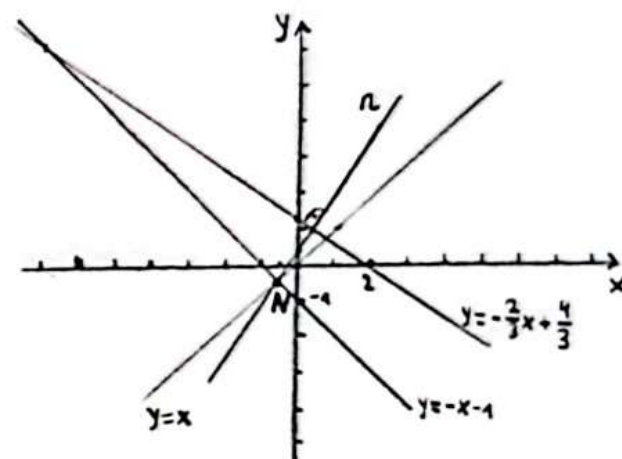
$$y + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3-2}{4}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & \frac{1}{4} \end{array} \quad -\frac{1}{6}$$



једначина праве чији је коефицијент правца k_n и која садржи тачку $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Тражена једначина праве n је $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$.

Напомена: До једначине праве n се могло доћи и коришћењем чињенице $n \perp p \Rightarrow \vec{n}_n \perp \vec{n}_p = (2, 3)$, а како је $\vec{n}_n \perp \vec{m}_n$, то је могуће узети вектор $\vec{n}_p$ за вектор правца праве n која садржи тачку $N(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, те је једначина праве n : $\frac{x - (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{y - (-\frac{1}{2})}{3}$ тј. $n: \frac{x + \frac{1}{2}}{2} = \frac{y + \frac{1}{2}}{3}$.

- 4.3. Праве $p: y=x-2$ и $q: y=3$ разлажу раван на четири угла. а) Одредити једначине осе симетрале тих углова. б) Без цртања, у сваком од четири угла одредити по једну тачку A_1, A_2, A_3, A_4 . в) Одредити која од тачака A_i је у истом углу као тачка $M(1,4)$. Проверити цртањем.

Решење: а) $\{T\} = p \cap q$

Нека је $T(x_T, y_T)$.

$$T \in p: y_T = x_T - 2$$

$$T \in q: y_T = 3$$

$$3 = x_T - 2$$

$$x_T = 3 + 2 = 5$$

$$\Rightarrow T(5, 3)$$

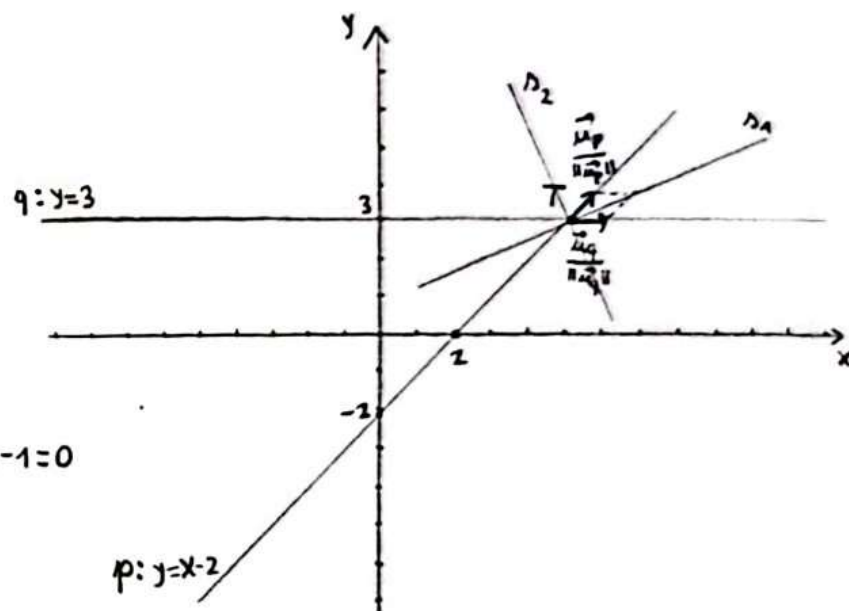
$$p: y = x - 2 \Rightarrow \vec{n}_p = (1, -1) \Rightarrow \vec{\mu}_p = (1, 1) \text{ је један вектор}$$

$$x - y - 2 = 0 \quad \text{правца праве } p \text{ јер је } (1, -1) \cdot (1, 1) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 1 - 1 = 0$$

$$q: y = 3$$

$$0 \cdot x + 1 \cdot y - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_q = (0, 1) \Rightarrow \vec{\mu}_q = (1, 0) \text{ је један вектор}$$

$$\text{правца праве } q \text{ јер је } (0, 1) \cdot (1, 0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$



$$\text{Један вектор правца праве } l_1 \text{ која представља симетралу угла } qTp \text{ је } \vec{\mu}_{l_1} = \frac{\vec{\mu}_p}{\|\vec{\mu}_p\|} + \frac{\vec{\mu}_q}{\|\vec{\mu}_q\|} =$$

$$= \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2+1^2}} + \frac{(1, 0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} + \frac{(1, 0)}{1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Дакле, права l_1 садржи тачку $T(5, 3)$ и има вектор правца $\vec{\mu}_{l_1} = \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, те је

$$l_1: \frac{x-5}{\frac{\sqrt{2}+2}{2}} = \frac{y-3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \text{једначина једне симетрале тј. } l_1: \frac{x-5}{\sqrt{2}+2} = \frac{y-3}{\sqrt{2}}, \text{ тј. } l_1: \frac{x-5}{1+\sqrt{2}} = \frac{y-3}{1}.$$

Како су симетрале суплементних углова међусобно нормалне, то је $\vec{\mu}_{l_2} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$ један вектор правца друге симетрале l_2 јер је $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}+2}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+2}{2} + \frac{\sqrt{2}+2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, а важи и да $T \in l_2$, те је

$$l_2: \frac{x-5}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y-3}{\frac{\sqrt{2}+2}{2}} \quad \text{тј. } l_2: \frac{x-5}{-\sqrt{2}} = \frac{y-3}{\sqrt{2}+2} \quad \text{тј. } l_2: \frac{x-5}{-1} = \frac{y-3}{1+\sqrt{2}}.$$

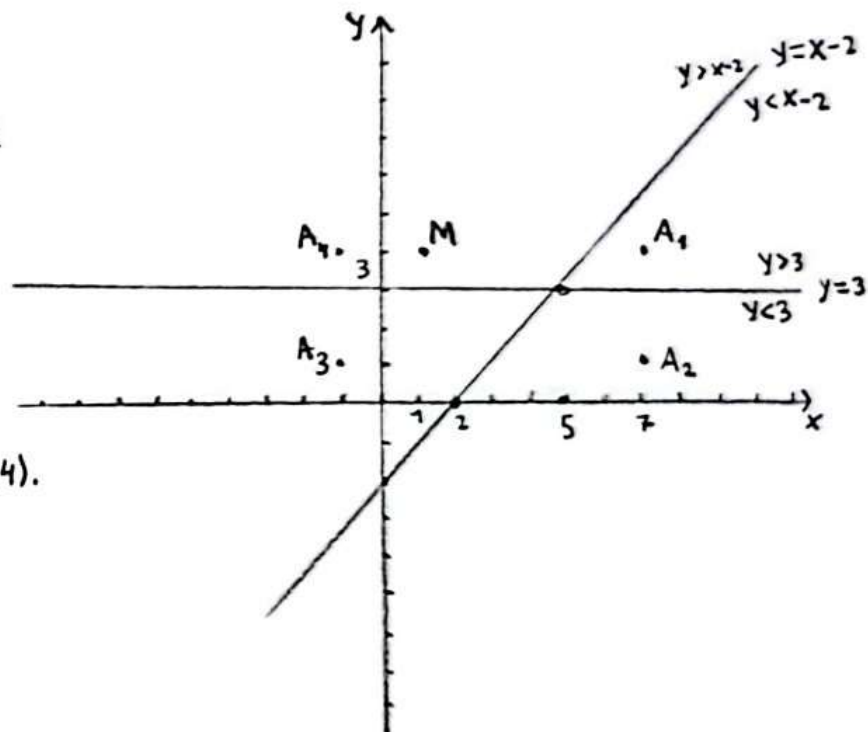
Б) Прова $Ax + By + C = 0$ дели раван на две полуравни које су дате са $Ax + By + C < 0$ и са $Ax + By + C > 0$.
 Која од те две полуравни је са које стране праве $Ax + By + C = 0$ одређујемо користећи чињеницу да
 тачка $T(x_0, y_0)$ припада полуравни $Ax + By + C < 0$ ако и само ако је $Ax_0 + By_0 + C < 0$.

$$A_1(7, 4) \quad y_{A_1} = 4 > 3 \\ y_{A_1} = 4 < 5 = 7 - 2 = x_{A_1} - 2$$

$$A_2(7, 1) \quad y_{A_2} = 1 < 3 \\ y_{A_2} = 1 < 5 = 7 - 2 = x_{A_2} - 2$$

$$A_3(-1, 1) \quad y_{A_3} = 1 < 3 \\ y_{A_3} = 1 > -1 - 2 = -3 = x_{A_3} - 2$$

$$A_4(-1, 4) \quad y_{A_4} = 4 > 3 \\ y_{A_4} = 4 > -3 = -1 - 2 = x_{A_4} - 2$$



Тражене тачке могу бити $A_1(7, 4)$, $A_2(7, 1)$, $A_3(-1, 1)$ и $A_4(-1, 4)$.

В) $M(1, 4)$
 $y_M = 4 > 3$
 $y_M = 4 > -1 = 1 - 2 = x_M - 2$

Како је и за тачку A_4 важило $y_{A_4} = 4 > 3$ и $y_{A_4} = 4 > -3 = -1 - 2 = x_{A_4} - 2$, то је тачка A_4 у истом углу као тачка $M(1, 4)$.

4.4. Одредити једначине тангенти из тачке $M(1,2)$ на круг $k: (x-1)^2 + (y-7)^2 = 9$.

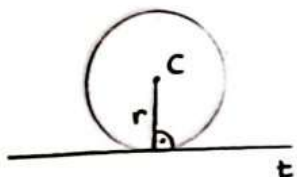
Решење: Једначина тангенте која садржи тачку $M(1,2)$ је $t: \frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{b}$ при чему, без умањена општости, можемо претпоставити да је вектор правца $\vec{a}_t = (a, b)$ тангенте t јединични, односно да је $a^2 + b^2 = 1$.

$$t: b(x-1) = a(y-2)$$

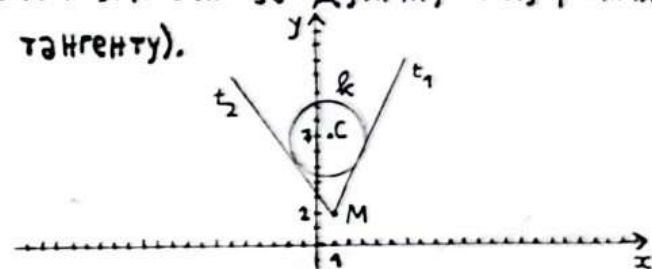
$$bx - b = ay - 2a$$

$$bx - ay - b + 2a = 0$$

Да би права t била тангента круга k , центар круга k мора бити удаљен за дужину полупречника тог круга од праве t (јер је додирни полупречник нормалан на тангенту).



$$d(C, t) = r$$



Центар круга $k: (x-1)^2 + (y-7)^2 = 9 = 3^2$ је тачка $C(1,7)$, а полупречник му је $r=3$ (јер је општа једначина круга $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ где је $C(x_0, y_0)$ центар тог круга, а r је полупречник).

$$d(C, t) = r$$

$$\frac{|b \cdot 1 - a \cdot 7 - b + 2a|}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|1 - 5a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Rightarrow \frac{15a}{\sqrt{1}} = 3 \Rightarrow 15a = 3 \Rightarrow 5|a| = 3 \Rightarrow |a| = \frac{3}{5} \begin{cases} a = -\frac{3}{5} \\ a = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$|b| = \sqrt{b^2} = \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \begin{cases} b = -\frac{4}{5} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Приметимо да су вектори $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ и $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ истог правца, а супротног смера, те је за писање једначине прве тангенте довољно посматрати само вектор $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, те је $t_1: \frac{x-1}{\frac{3}{5}} = \frac{y-2}{\frac{4}{5}}$ тј. $t_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4}$.

Приметимо да су вектори $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ и $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ истог правца, а супротног смера, те је за писање једначине друге тангенте довољно посматрати само вектор $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, те је $t_2: \frac{x-1}{\frac{3}{5}} = \frac{y-2}{-\frac{4}{5}}$ тј. $t_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4}$.

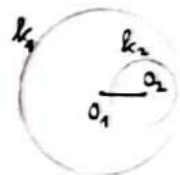
4.5. Дати су кругови $k_1: (x-7)^2 + (y-3)^2 = r_1^2$ и $k_2: (x-17)^2 + (y-3)^2 = 81$. а) У зависности од полупречника $r_1 > 0$ дискутовати број заједничких тангенти ових кругова. б) За $r_1 = 3$ одредити једначине заједничких тангенти ових кругова.

Решење: Круг $k_1: (x-7)^2 + (y-3)^2 = r_1^2$ има центар $O_1(7,3)$ и полупречник r_1 , док круг $k_2: (x-17)^2 + (y-3)^2 = 81 = 9^2$ има центар $O_2(17,3)$ и полупречник $r_2 = 9$.

а) Да бисмо одредили број заједничких тангенти кругова k_1 и k_2 , израчунајмо прво O_1O_2 .

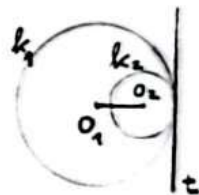
$$O_1O_2 = \sqrt{(x_{O_2} - x_{O_1})^2 + (y_{O_2} - y_{O_1})^2} = \sqrt{(17-7)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = \sqrt{10^2} = |10| = 10$$

1) случај $10 = O_1O_2 < |r_1 - r_2| = |r_1 - 9|$ тј. $r_1 - 9 < -10$ или $r_1 - 9 > 10$
 $r_1 < -10 + 9$ $r_1 > 10 + 9$
 $r_1 < -1$ $r_1 > 19$
 $\nexists$ јер је $r_1 > 0$



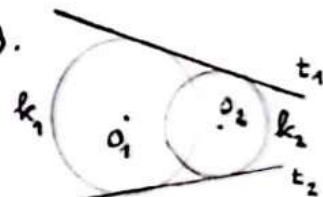
За $r_1 > 19$ је $O_1O_2 < |r_1 - 9|$, те је круг k_2 унутар круга k_1 и број заједничких тангенти је 0.

2) случај $10 = O_1O_2 = |r_1 - r_2| = |r_1 - 9|$ тј. $r_1 - 9 = -10$ или $r_1 - 9 = 10$
 $r_1 = -10 + 9$ $r_1 = 10 + 9$
 $r_1 = -1$ $r_1 = 19$
 $\nexists$ јер је $r_1 > 0$



За $r_1 = 19$ је $O_1O_2 = |r_1 - 9|$, те се кругови k_1 и k_2 додирују изнутра и број заједничких тангенти је 1.

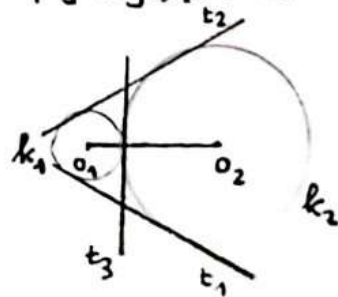
3) случај $|r_1 - 9| = |r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2 = r_1 + 9$ тј. $|r_1 - 9| < 10 < r_1 + 9$ тј. $1 < r_1 < 19$.
 $-10 < r_1 - 9 < 10$ $\rightarrow 1 < r_1$
 $-1 < r_1 < 19$



За $1 < r_1 < 19$ је $|r_1 - 9| < O_1O_2 < r_1 + 9$, те се кругови секу и број заједничких тангенти је 2.

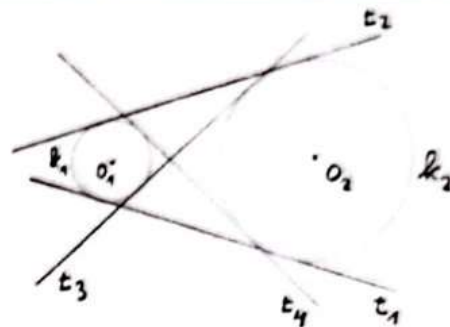
4) случај $10 = O_1O_2 = r_1 + r_2 = r_1 + 9$ тј. $r_1 = 10 - 9 = 1$

За $r_1 = 1$ кругови k_1 и k_2 се додирују споља и број заједничких тангенти је 3.



5) случај $10 = O_1O_2 > r_1 + r_2 = r_1 + 9$ тј. $1 > r_1$

За $0 < r_1 < 1$ кругови k_1 и k_2 немају заједничких тачака и број заједничких тангенти је 4.



б) За $r_1 = 3$ важи $1 < 3 < 19$, те на основу дела а) следи да кругови k_1 и k_2 имају две заједничке тангенте и оне су спољашње. Нека је $t: Ax + By + C = 0$ једначина заједничке тангенте.

Тада је $d(O_1, t) = r_1$ и $d(O_2, t) = r_2$, где је $O_1(7, 3)$, $O_2(17, 3)$, $r_1 = 3$ и $r_2 = 9$.

$$\frac{|A \cdot 7 + B \cdot 3 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3 \quad \frac{|A \cdot 17 + B \cdot 3 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 9$$

Вектор (A, B) је вектор нормале праве t . Без умањења општости, можемо претпоставити да је вектор (A, B) јединични, тј. да је $\sqrt{A^2 + B^2} = 1$ (ако није, можемо поделити једначину $Ax + By + C = 0$ са $\sqrt{A^2 + B^2}$ које је различито од 0 јер иначе $Ax + By + C = 0$ тј. $C = 0$ није једначина праве, те добијамо $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$, тј. $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, а за A_1 и B_1 важи $A_1^2 + B_1^2 = \frac{A^2}{A^2 + B^2} + \frac{B^2}{A^2 + B^2} = \frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2} = 1$).

$$\Rightarrow |7A + 3B + C| = 3 \quad \text{и} \quad |17A + 3B + C| = 9$$

1° случај $7A + 3B + C = 3$ и $17A + 3B + C = 9$

$$\begin{aligned} 17A - 7A + 3B - 3B + C - C &= 9 - 3 \\ 10A &= 6 \Rightarrow A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \\ B^2 &= 1 - A^2 = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

1.1° подслучај $B = -\frac{4}{5}$

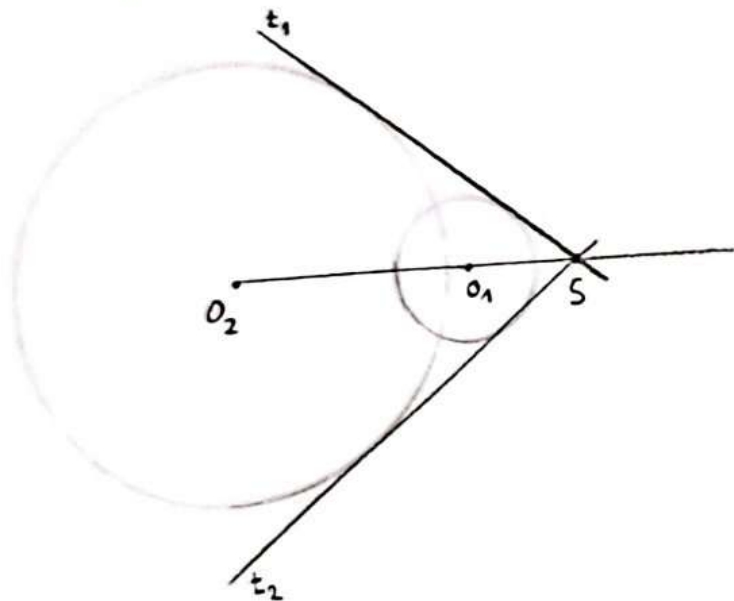
$$C = 3 - 7A - 3B = 3 - 7 \cdot \frac{3}{5} - 3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = 3 - \frac{21}{5} + \frac{12}{5} = \frac{15}{5} - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$$

$$t_1: \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} = 0 \quad \text{тј.} \quad t_1: 3x - 4y + 6 = 0$$

1.2° подслучај $B = \frac{4}{5}$

$$C = 3 - 7A - 3B = 3 - 7 \cdot \frac{3}{5} - 3 \cdot \frac{4}{5} = 3 - \frac{21}{5} - \frac{12}{5} = \frac{15}{5} - \frac{33}{5} = -\frac{18}{5}$$

$$t_2: \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{18}{5} = 0 \quad \text{тј.} \quad t_2: 3x + 4y - 18 = 0$$



2° случај $7A+3B+C=3$ $17A+3B+C=-9$

$$-9-3=17A+3B+C-(7A+3B+C)$$

$$-12=17A-7A$$

$$-12=10A \Rightarrow A = \frac{-12}{10} = -\frac{6}{5} \Rightarrow B^2=1-A^2=1-\left(-\frac{6}{5}\right)^2=1-\frac{36}{25}=\frac{25-36}{25}=\frac{-11}{25} < 0 \quad \text{jer je } B^2 \geq 0$$

3° случај $7A+3B+C=-3$ $17A+3B+C=9$

$$9-(-3)=17A+3B+C-(7A+3B+C)$$

$$12=17A-7A$$

$$12=10A \Rightarrow A = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \Rightarrow B^2=1-A^2=1-\left(\frac{6}{5}\right)^2=1-\frac{36}{25}=\frac{25-36}{25}=\frac{-11}{25} < 0 \quad \text{jer je } B^2 \geq 0$$

4° случај $7A+3B+C=-3$ $17A+3B+C=-9$

$$-9-(-3)=17A+3B+C-(7A+3B+C)$$

$$-6=17A-7A$$

$$-6=10A \Rightarrow A = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \Rightarrow B^2=1-A^2=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{25-9}{25}=\frac{16}{25}$$

4.1° подслучај $B = -\frac{4}{5}$

$$C = -3-7A-3B = -3-7\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-3\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{15}{5} + \frac{21}{5} + \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$$

$$t_3: -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{18}{5} = 0 \quad \text{тј.} \quad t_3: 3x+4y-18=0$$

што је заправо тангента t_2

4.2° подслучај $B = \frac{4}{5}$

$$C = -3-7A-3B = -3-7\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-3\cdot\frac{4}{5} = -\frac{15}{5} + \frac{21}{5} - \frac{12}{5} = -\frac{6}{5}$$

$$t_4: -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0 \quad \text{тј.} \quad t_4: 3x-4y+6=0$$

што је заправо тангента t_1

Дакле, тражене заједничке тангенте су $t_1: 3x-4y+6=0$ и $t_2: 3x+4y-18=0$.

4.6. Координате три темена четвороугла ABCD су A(5,5), B(1,3), C(3,-1). Темена четвороугла A₁B₁C₁D₁ су редом средишта страница AB, BC, CD, DA, а пресек дијагонала A₁C₁ и B₁D₁ је тачка S₁(4,3). Одредити координате темена D и однос површина ова два четвороугла.

Решење: $\left. \begin{array}{l} A_1 - \text{средиште } AB \\ B_1 - \text{средиште } AB \end{array} \right\} \Rightarrow A_1B_1 \text{ је средња линија троугла } VAB$
 $\Rightarrow A_1B_1 \parallel VB, A_1B_1 = \frac{1}{2}VB \quad (1)$

$\left. \begin{array}{l} B_1 - \text{средиште } BC \\ C_1 - \text{средиште } BC \end{array} \right\} \Rightarrow B_1C_1 \text{ је средња линија троугла } VBC$
 $\Rightarrow B_1C_1 \parallel VB, B_1C_1 = \frac{1}{2}VB \quad (2)$

(1), (2) $\Rightarrow A_1B_1 \parallel B_1C_1, A_1B_1 = B_1C_1 \Rightarrow \square A_1B_1C_1D_1$ је паралелограм

$\Rightarrow$ Дијагонале A₁C₁ и B₁D₁ се полове у тачки S₁.

A₁ је средиште AB $\Rightarrow x_{A_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$
 $y_{A_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow A_1(3,4)$

S₁ је средиште A₁C₁ $\Rightarrow 4 = x_{S_1} = \frac{x_{A_1} + x_{C_1}}{2} = \frac{3 + x_{C_1}}{2} \Rightarrow 3 + x_{C_1} = 2 \cdot 4$
 $3 + x_{C_1} = 8$
 $x_{C_1} = 8 - 3 = 5$

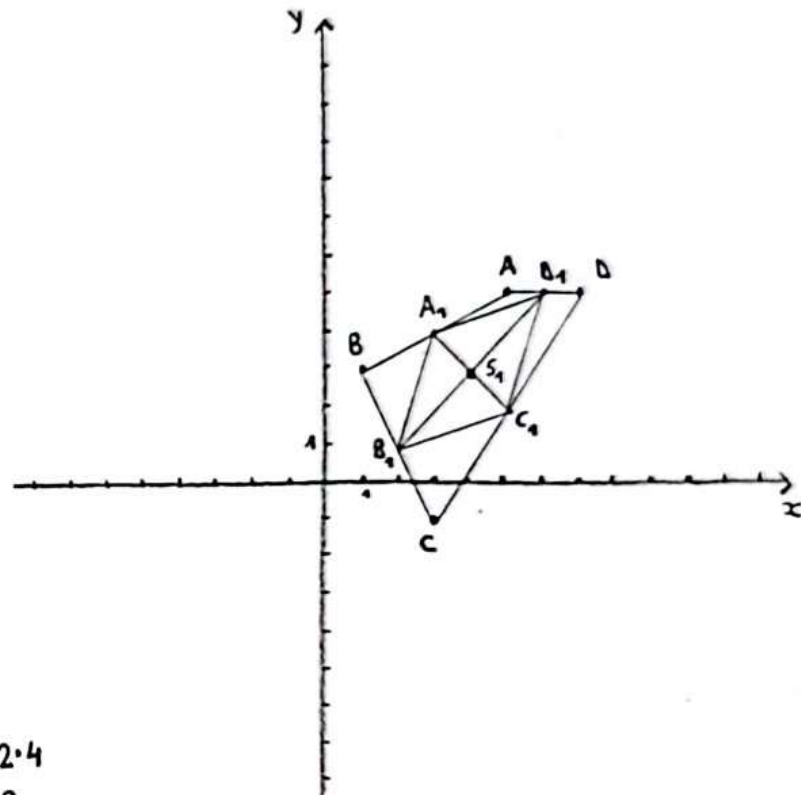
$3 = y_{S_1} = \frac{y_{A_1} + y_{C_1}}{2} = \frac{4 + y_{C_1}}{2} \Rightarrow 4 + y_{C_1} = 2 \cdot 3$
 $4 + y_{C_1} = 6$
 $y_{C_1} = 6 - 4 = 2$

$\Rightarrow C_1(5,2)$ је средиште дужи CD

$5 = x_{C_1} = \frac{x_C + x_D}{2} \Rightarrow x_C + x_D = 2 \cdot 5$
 $3 + x_D = 10$
 $x_D = 10 - 3 = 7$

$2 = y_{C_1} = \frac{y_C + y_D}{2} \Rightarrow y_C + y_D = 2 \cdot 2$
 $-1 + y_D = 4$
 $y_D = 4 + 1 = 5$

$\Rightarrow D(7,5)$



$$P_{ABCD} = P_{\triangle BAD} + P_{\triangle BCD}$$

$$\vec{BA} = [A] - [B] = (5, 5) - (1, 3) = (4, 2)$$

$$\vec{BD} = [D] - [B] = (7, 5) - (1, 3) = (6, 2)$$

$$\vec{BC} = [C] - [B] = (3, -1) - (1, 3) = (2, -4)$$

Сматрајемо да је посматрана равна заправо равна Oxy у $Oxyz$ простору да бисмо могли да израчунамо векторски производ $\vec{BA} \times \vec{BD}$. Онда је $\vec{BA} = (4, 2, 0)$, $\vec{BD} = (6, 2, 0)$ и $\vec{BC} = (2, -4, 0)$.

$$P_{\triangle BAD} = \frac{1}{2} \|\vec{BA} \times \vec{BD}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \right\| = \frac{1}{2} \left\| (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0) \vec{e}_1 - (4 \cdot 0 - 6 \cdot 0) \vec{e}_2 + (4 \cdot 2 - 6 \cdot 2) \vec{e}_3 \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| -4 \vec{e}_3 \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \|\vec{BC} \times \vec{BD}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \right\| = \frac{1}{2} \left\| (-4 \cdot 0 - 0 \cdot 2) \vec{e}_1 - (2 \cdot 0 - 0 \cdot 6) \vec{e}_2 + (2 \cdot 2 - 6 \cdot (-4)) \vec{e}_3 \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| 28 \vec{e}_3 \right\| = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$$

$$P_{ABCD} = P_{\triangle BAD} + P_{\triangle BCD} = 2 + 14 = 16$$

$$P_{A_1B_1C_1D_1} = \|\vec{B_1A_1} \times \vec{B_1C_1}\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \right\| = \left\| (3 \cdot 0 - 1 \cdot 0) \vec{e}_1 - (1 \cdot 0 - 3 \cdot 0) \vec{e}_2 + (1 \cdot 1 - 3 \cdot 3) \vec{e}_3 \right\| = \left\| -8 \vec{e}_3 \right\| = 8$$

$$B_1 \text{ је средиште } BC \Rightarrow x_{B_1} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \quad y_{B_1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

$$\vec{B_1A_1} = [A_1] - [B_1] = (3, 4, 0) - (2, 1, 0) = (1, 3, 0) \quad \vec{B_1C_1} = [C_1] - [B_1] = (5, 2, 0) - (2, 1, 0) = (3, 1, 0)$$

Координате тачака D су $(7, 5)$, а однос површина четвороуглова $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ је $\frac{P_{ABCD}}{P_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{16}{8} = 2$.

4.7. У поларним координатама одредити: а) једначину праве $p: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. б) Једначину праве q која са x -осом гради угао $\varphi_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, а на растојању је $r_0 \geq 0$ од координатног почетка.

Решење: а) Заменимо везе између Декартових и поларних координата $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ у једначину праве $p: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

$$\frac{r \cos \varphi}{m} + \frac{r \sin \varphi}{n} = 1$$

б) Прво ћемо наћи једначину праве q у Декартовим координатама. Угао који права $q: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ гради са x -осом је $\varphi_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Дакле, вектор правца $\vec{u}_q = (a, b)$ праве q мора бити $\vec{u}_q = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$.

$$\Rightarrow q: \frac{x-x_0}{\cos \varphi_0} = \frac{y-y_0}{\sin \varphi_0} \Rightarrow \sin \varphi_0 \cdot (x-x_0) = \cos \varphi_0 \cdot (y-y_0)$$

$$\Rightarrow \sin \varphi_0 \cdot x - \sin \varphi_0 \cdot x_0 = \cos \varphi_0 \cdot y - \cos \varphi_0 \cdot y_0$$

$$\Rightarrow \sin \varphi_0 \cdot x - \cos \varphi_0 \cdot y + \cos \varphi_0 \cdot y_0 - \sin \varphi_0 \cdot x_0 = 0$$

Услов задатка је да је права q од координатног почетка $(0,0)$ на растојању $r_0 \geq 0$.

$$r_0 = d(0, q) = \frac{|\sin \varphi_0 \cdot 0 - \cos \varphi_0 \cdot 0 + \cos \varphi_0 \cdot y_0 - \sin \varphi_0 \cdot x_0|}{\sqrt{\sin^2 \varphi_0 + (-\cos \varphi_0)^2}} = \frac{|\cos \varphi_0 \cdot y_0 - \sin \varphi_0 \cdot x_0|}{1}$$

$$\Rightarrow |\cos \varphi_0 \cdot y_0 - \sin \varphi_0 \cdot x_0| = r_0 \Rightarrow r_0 = \cos \varphi_0 y_0 - \sin \varphi_0 x_0 \text{ или } r_0 = \cos \varphi_0 y_0 - \sin \varphi_0 x_0$$

Претјимо сада на поларне координате и заменимо $x = r \cos \varphi$ и

$y = r \sin \varphi$ у добијене једначине правих $q_1: \sin \varphi_0 x - \cos \varphi_0 y + r_0 = 0$

и $q_2: \sin \varphi_0 x - \cos \varphi_0 y - r_0 = 0$.

$$\Rightarrow q_1: \sin \varphi_0 r \cos \varphi - \cos \varphi_0 r \sin \varphi + r_0 = 0$$

$$r \cdot (\sin \varphi_0 \cos \varphi - \cos \varphi_0 \sin \varphi) + r_0 = 0$$

$$r \cdot \sin(\varphi_0 - \varphi) + r_0 = 0$$

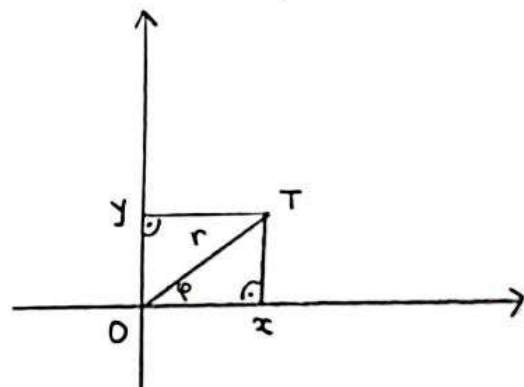
$$q_2: \sin \varphi_0 r \cos \varphi - \cos \varphi_0 r \sin \varphi - r_0 = 0$$

$$r \cdot (\sin \varphi_0 \cos \varphi - \cos \varphi_0 \sin \varphi) - r_0 = 0$$

$$r \sin(\varphi_0 - \varphi) - r_0 = 0$$

Нека је O произволна тачка у равни и нека је Ox позитивни део x -осе Декартовог правоуглог координатног система Oxy . Посматрамо произволну тачку T у Oxy . Ако је $T \neq O$, онда је $r = OT$ и φ је оријентисани угао од полуправе Ox до полуправе OT (мери се у математички позитивном смеру, тј. смеру супротном од смера кретања казаљке на сату) и може бити у интервалу $[0, \pi)$.

Ако је $T = O$, онда је $r = 0$, а φ није дефинисано. Веза између Декартових и поларних координата гласи: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.



Постоје две такве праве,

$$\Rightarrow q_1: r \cdot \sin(\varphi_0 - \varphi) + r_0 = 0 \text{ и}$$

$$q_2: r \sin(\varphi_0 - \varphi) - r_0 = 0.$$

4.8.) Одредити растојање тачака А и В преко њихових поларних координата $A(r_A, \varphi_A)$, $B(r_B, \varphi_B)$.

Решење: $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(r_B \cos \varphi_B - r_A \cos \varphi_A)^2 + (r_B \sin \varphi_B - r_A \sin \varphi_A)^2} = \sqrt{\underbrace{r_B^2 \cos^2 \varphi_B - 2r_A r_B \cos \varphi_B \cos \varphi_A + r_A^2 \cos^2 \varphi_A}_{x_A = r_A \cos \varphi_A} + \underbrace{r_B^2 \sin^2 \varphi_B - 2r_A r_B \sin \varphi_B \sin \varphi_A + r_A^2 \sin^2 \varphi_A}_{y_A = r_A \sin \varphi_A}}$

$x_A = r_A \cos \varphi_A$
 $y_A = r_A \sin \varphi_A$
 $x_B = r_B \cos \varphi_B$
 $y_B = r_B \sin \varphi_B$

$$= \sqrt{r_A^2 \cdot (\cos^2 \varphi_A + \sin^2 \varphi_A) + r_B^2 \cdot (\cos^2 \varphi_B + \sin^2 \varphi_B) - 2r_A r_B \cdot (\cos \varphi_B \cos \varphi_A + \sin \varphi_B \sin \varphi_A)}$$

$$= \sqrt{r_A^2 \cdot 1 + r_B^2 \cdot 1 - 2r_A r_B \cos(\varphi_B - \varphi_A)} = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_B - \varphi_A)}$$

Тражено растојање тачака А и В је $\sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_B - \varphi_A)}$.

Аналитичка геометрија простора

— имамо координате x, y, z . Растојање тачака $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ је $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

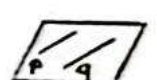
— Једначина праве у простору која садржи тачку $P(x_P, y_P, z_P)$ и има вектор правца праве $\vec{m}_P = (a, b, c) \neq \vec{0}$ је

$$r: \frac{x - x_P}{a} = \frac{y - y_P}{b} = \frac{z - z_P}{c} (=t)$$

Параметарске једначине ове праве су $x = at + x_P, y = bt + y_P, z = ct + z_P, t \in \mathbb{R}$.

— Међусобни положај две праве p и q , при чему права p садржи тачку P и има вектор правца $\vec{m}_P$, а права q садржи тачку Q и има вектор правца $\vec{m}_Q$

1) $p = q \Leftrightarrow$ Важи да праве p и q имају бар једну заједничку тачку и вектори $\vec{m}_P$ и $\vec{m}_Q$ су линеарно зависни. 

2) p и q су дисјунктне и у истој су равни $\Leftrightarrow$ Важи да је $p \cap q = \emptyset$ и вектори $\vec{m}_P$ и $\vec{m}_Q$ су линеарно зависни. 

3) p и q се секу $\Leftrightarrow \vec{m}_P$ и $\vec{m}_Q$ су линеарно независни и $[\vec{r}_P, \vec{m}_P, \vec{m}_Q] = 0$

4) p и q су мимоилазне $\Leftrightarrow \vec{m}_P$ и $\vec{m}_Q$ су линеарно независни и $[\vec{r}_P, \vec{m}_P, \vec{m}_Q] \neq 0$

— Растојање тачке $T(x_T, y_T, z_T)$ од праве $p: \frac{x - x_P}{a} = \frac{y - y_P}{b} = \frac{z - z_P}{c}$ је $d(T, p) = \frac{\|\vec{m}_P \times \vec{PT}\|}{\|\vec{m}_P\|}$

при чему је $P(x_P, y_P, z_P) \in p$.

— Једначина равни α која садржи тачку $T(x_T, y_T, z_T)$ и има вектор нормале $\vec{n}_\alpha = (a, b, c) \neq \vec{0}$ је

$$\alpha: a \cdot (x - x_T) + b \cdot (y - y_T) + c \cdot (z - z_T) = 0$$

Параметарске једначине равни α су $x = x_T + t m_1 + s u_1, y = y_T + t m_2 + s u_2, z = z_T + t m_3 + s u_3$, t и s су реални параметри.

Ако су $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ и $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ два линеарно независна вектора из равни α , онда је $\vec{n}_\alpha = \vec{m} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$

један вектор нормале равни α .

— Права p је нормална на равни α ако је $\vec{m}_P$ колинеаран са $\vec{n}_\alpha$.

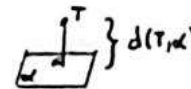
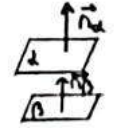
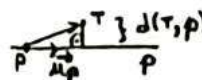
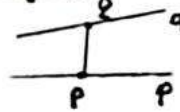
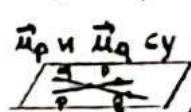
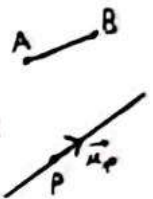
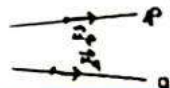
— Права q је паралелна равни α ако је $\vec{n}_\alpha$ нормалан на $\vec{m}_Q$.

— Равни α и β су паралелне ако су вектори $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$ колинеарни.

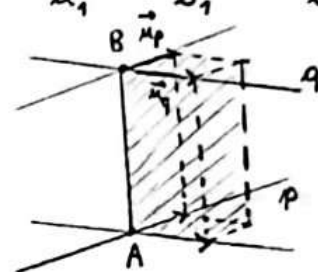
— Растојање тачке $T(x_T, y_T, z_T)$ од равни $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ је $d(T, \alpha) = \frac{|ax_T + by_T + cz_T + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

— Угао између две праве (мисли се на оштар угао) $p: \frac{x - x_P}{a} = \frac{y - y_P}{b} = \frac{z - z_P}{c}$ и $q: \frac{x - x_Q}{a_1} = \frac{y - y_Q}{b_1} = \frac{z - z_Q}{c_1}$ се одређује помоћу

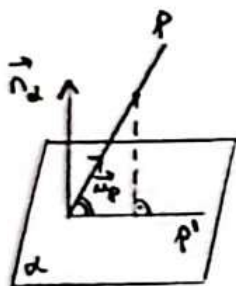
$$\cos \angle(p, q) = \frac{|\vec{m}_P \cdot \vec{m}_Q|}{\|\vec{m}_P\| \cdot \|\vec{m}_Q\|}$$



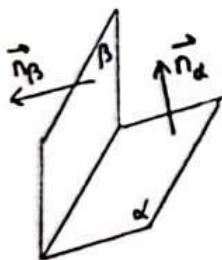
- Растојање између мимоилазних права $p: \frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{c}$ и $q: \frac{x-x_q}{a_1} = \frac{y-y_q}{b_1} = \frac{z-z_q}{c_1}$ је $d(p,q) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{u}_p, \vec{u}_q]|}{\|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\|}$ при чему су $A \in p$ и $B \in q$ произвољне тачке.



- Угао између праве p и равни α се одређује помоћу $\sin \varphi(p, \alpha) = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{\|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\|}$.

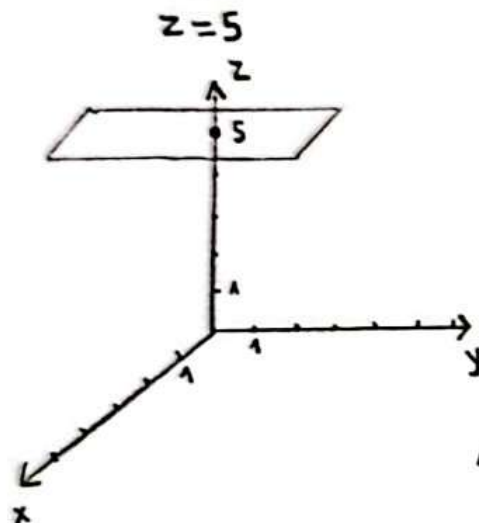


- Угао између равни α и β се одређује помоћу $\cos \varphi(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$.



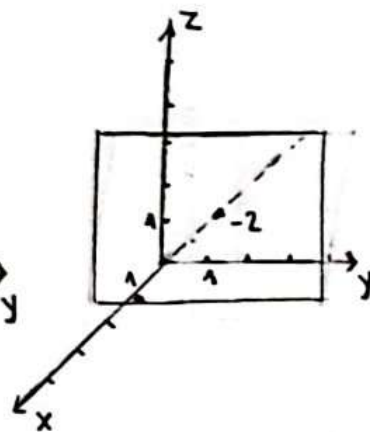
4.9. Скицирати раван а) $z-5=0$; б) $x=-2$; в) $y+z-3=0$; г) $x+2y+3z-6=0$.

Решене: а) $z-5=0$



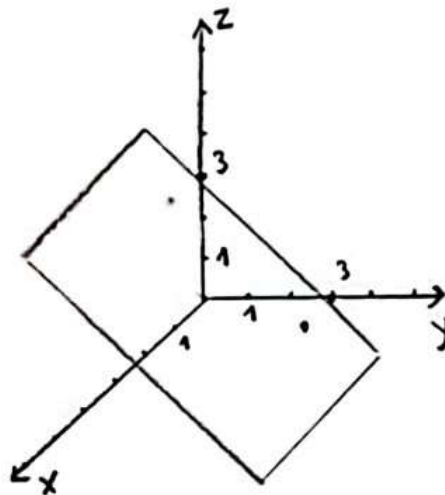
Тражена раван садржи тачку $(0,0,5)$ и паралелна је равни Oxy .

б) $x=-2$



Тражена раван садржи тачку $(-2,0,0)$ и паралелна је равни Oyz .

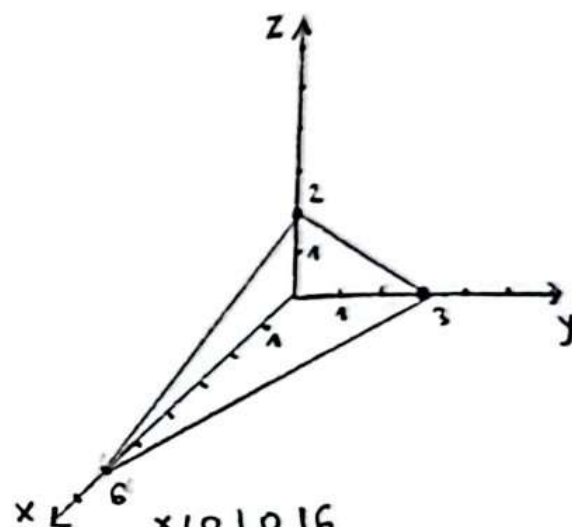
в) $y+z-3=0$



x	0	0	1
y	3	0	3
z	0	3	0

Тражена раван је паралелна x -оси и сече раван $x=0$ по правој $z=-y+3$.

г) $x+2y+3z-6=0$



x	0	0	6
y	0	3	0
z	2	0	0

Тражена раван сече x -осу у тачки $(6,0,0)$, y -осу у тачки $(0,3,0)$, а z -осу у тачки $(0,0,2)$.

4.10. Одредити једначину нормале из тачке $A(2,3,-1)$ на раван $\alpha: 2x + y - 4z + 5 = 0$.

Решење:

$\alpha: 2x + y - 4z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (2, 1, -4)$ је вектор нормале
равни α

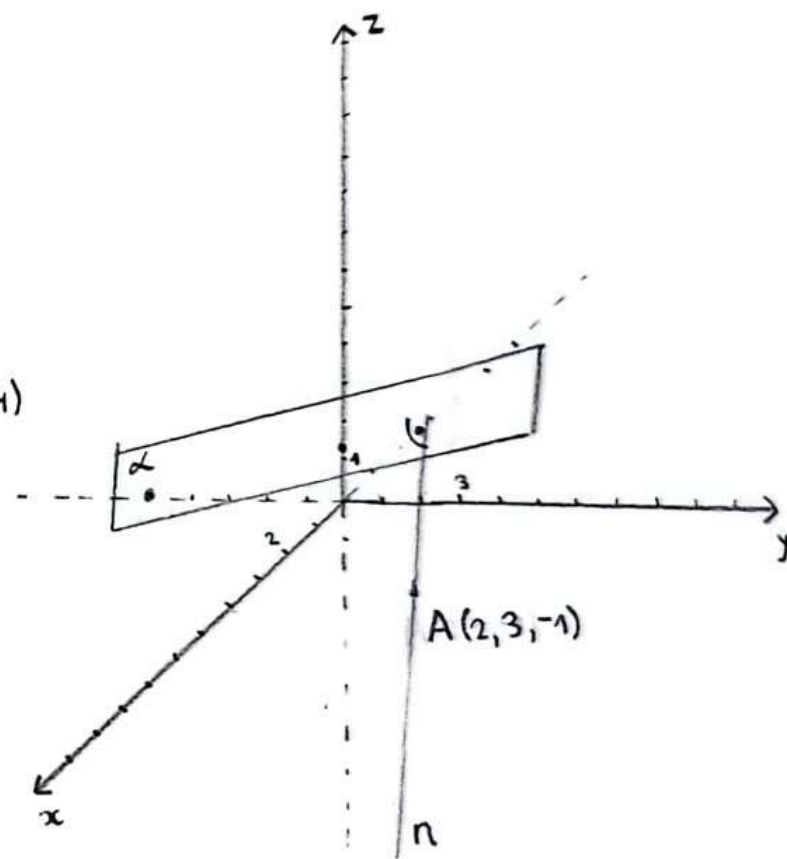
x	0	0	$-\frac{5}{2}$
y	-5	0	0
z	0	$\frac{5}{4}$	0

n - тражена нормала из тачке $A(2,3,-1)$ на раван α

$n \perp \alpha \Rightarrow$ Један од вектора правца праве n је
вектор нормале равни α . $\Rightarrow \vec{\mu}_n = \vec{n}_\alpha = (2, 1, -4)$

Једначина праве n која садржи тачку $A(2,3,-1)$ и
има вектор правца $(2, 1, -4)$ је:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-(-1)}{-4}, \text{ тј. п. } \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-4}.$$



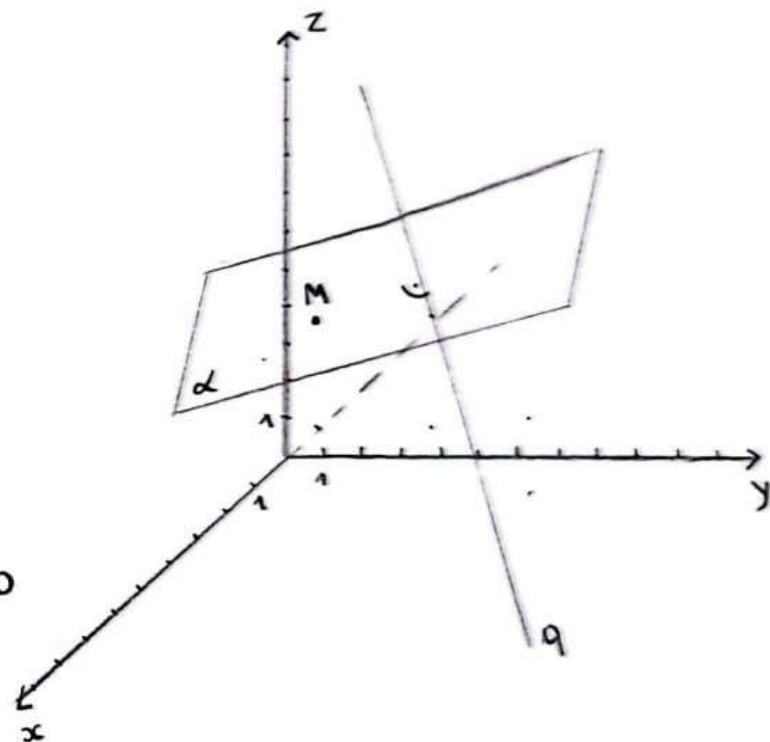
4.11. Одредити једначину равни која садржи тачку $M(-1, 0, 3)$ и нормална је на праву $q: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

Решење: $q: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \vec{u}_q = (2, 4, -1)$ је вектор правца
праве q

α - тражена равна која садржи тачку $M(-1, 0, 3)$ и нормална
је на праву q

$\Rightarrow$ Вектор правца праве q је (један од) вектор нормале
равни α тј. $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_q = (2, 4, -1)$.

Једначина равни α која садржи тачку $M(-1, 0, 3)$ и има
вектор нормале $(2, 4, -1)$ је $2 \cdot (x - (-1)) + 4 \cdot (y - 0) + (-1) \cdot (z - 3) = 0$
тј. $2 \cdot (x+1) + 4y - (z-3) = 0$, односно $2x + 2 + 4y - z + 3 = 0$,
те је $\alpha: 2x + 4y - z + 5 = 0$.



4.12. Одредити једначину равни која :

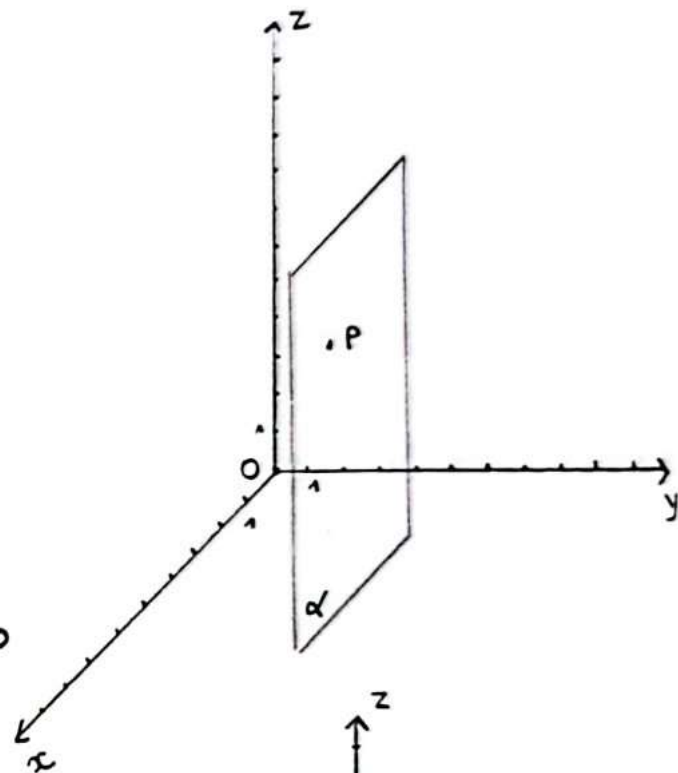
- а) је паралелна са равни Oxz и садржи тачку $P(2,3,5)$ б) садржи Z -осу и тачку $M(-3,1,2)$
в) паралелна је x оси и садржи тачке $A(4,0,-2)$, $B(5,1,7)$.

Решење: а) α - тражена равна која је паралелна са равни Oxz и садржи тачку $P(2,3,5)$

Паралелне равни α и Oxz имају исту нормалу.

Како је $Oy \perp Ox$ и $Oy \perp Oz$, то на основу Кошијеве теореме следи да је $Oy \perp Oxz$, те се за вектор нормале равни α може узети вектор $\vec{n}_\alpha = (0,1,0)$.

Једначина равни α која садржи тачку $P(2,3,5)$ и има вектор нормале $(0,1,0)$ је $\alpha: 0 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-3) + 0 \cdot (z-5) = 0$ тј. $\alpha: y=3$.



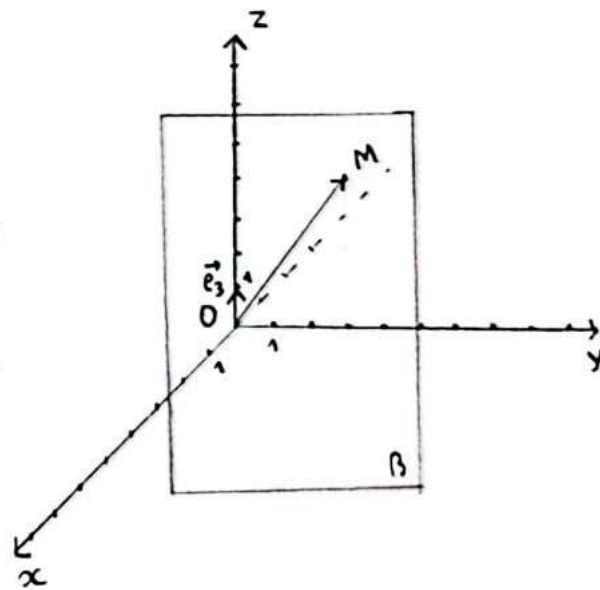
б) β - тражена равна која садржи Z -осу и тачку $M(-3,1,2)$

Како тачка $O(0,0,0)$ припада Z -оси, а Z -оса припада равни β , то тачка $O(0,0,0)$ припада равни β .

$\vec{OM} = [M] - [O] = (-3,1,2) - (0,0,0) = (-3,1,2)$ је у равни β јер $O \in \beta$ и $M \in \beta$.

Један од вектора правца Z -осе је $\vec{e}_3 = (0,0,1)$.

Дакле, вектори $\vec{e}_3$ и $\vec{OM}$ су садржани у равни β .



Приметимо да су вектори $\vec{e}_3$ и $\vec{OM}$ линеарно независни.

$$\tilde{\alpha} \cdot \vec{e}_3 + \tilde{\beta} \cdot \vec{OM} = \vec{0} \Rightarrow \tilde{\alpha} \cdot (0, 0, 1) + \tilde{\beta} \cdot (-3, 1, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow (0, 0, \tilde{\alpha}) + (-3\tilde{\beta}, \tilde{\beta}, 2\tilde{\beta}) = (0, 0, 0) \Rightarrow (-3\tilde{\beta}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} + 2\tilde{\beta}) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow -3\tilde{\beta} = 0$$

$$\tilde{\beta} = 0$$

$$\tilde{\alpha} + 2\tilde{\beta} = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0$$

Како из $\tilde{\alpha} \cdot \vec{e}_3 + \tilde{\beta} \cdot \vec{OM} = \vec{0}$ следи $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$, то су $\vec{e}_3$ и $\vec{OM}$ линеарно независни вектори равни β , те је $\vec{e}_3 \times \vec{OM}$ један вектор нормале равни β .

$$\vec{e}_3 \times \vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = (-1)^2 \cdot (0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (0 \cdot 2 - (-3) \cdot 1) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (0 \cdot 1 - (-3) \cdot 0) \vec{e}_3 = -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 = (-1, -3, 0)$$

$$+ (-1)^4 \cdot (0 \cdot 1 - (-3) \cdot 0) \vec{e}_3 = -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 = (-1, -3, 0)$$

Једначина равни β која садржи тачку $M(-3, 1, 2)$ и има вектор нормале $(-1, -3, 0)$ је

$$\beta: -1(x - (-3)) - 3(y - 1) + 0 \cdot (z - 2) = 0 \quad \text{тј.} \quad \beta: -(x + 3) - 3y + 3 = 0, \quad \text{односно} \quad \beta: -x - 3 - 3y + 3 = 0,$$

$$\text{тј.} \quad \beta: -x - 3y = 0, \quad \text{односно} \quad \beta: x + 3y = 0.$$

В) γ -тражена равна која је паралелна x оси и садржи тачке $A(4, 0, -2)$, $B(5, 1, 7)$

Како је γ паралелна x оси, то постоји представник вектора $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$

који припада равни γ .

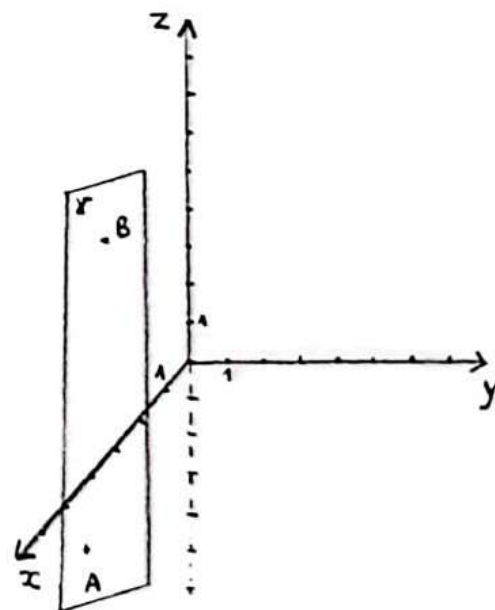
$$A(4, 0, -2) \in \gamma, \quad B(5, 1, 7) \in \gamma \Rightarrow \vec{AB} = [B] - [A] = (5, 1, 7) - (4, 0, -2) = (1, 1, 9) \in \gamma$$

Приметимо да су вектори $\vec{e}_1$ и $\vec{AB}$ линеарно независни.

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{AB} = \vec{0} \Rightarrow \alpha \cdot (1, 0, 0) + \beta \cdot (1, 1, 9) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\alpha, 0, 0) + (\beta, \beta, 9\beta) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta, \beta, 9\beta) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \quad \beta = 0 \quad 9\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Како из $\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{AB} = \vec{0}$ следи $\alpha = \beta = 0$, то су $\vec{e}_1$ и $\vec{AB}$ линеарно независни вектори равни γ , те је $\vec{e}_1 \times \vec{AB}$ један вектор нормале равни γ .



$$\vec{e}_1 \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = (-1)^2 \cdot (0 \cdot 9 - 0 \cdot 1) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (1 \cdot 9 - 0 \cdot 1) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) \vec{e}_3$$

$$= 1 \cdot (0 - 0) \vec{e}_1 + (-1) \cdot 9 \vec{e}_2 + 1 \cdot 1 \cdot \vec{e}_3 = -9 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (0, -9, 1)$$

Једначина равни γ која садржи тачку $A(4, 0, -2)$ и има вектор нормале $(0, -9, 1)$ је $\gamma: 0 \cdot (x-4) + (-9) \cdot (y-0) + 1 \cdot (z-(-2)) = 0$
 тј. $\gamma: -9y + z + 2 = 0$.

4.13. Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P(3, -2, -4)$ у односу на раван $\alpha: 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ као и пројекцију P' тачке P на раван α .

Решење: n - права која садржи тачку $P(3, -2, -4)$ и нормална је на раван α

$$\vec{m}_n = \vec{n}_\alpha = (6, 2, -3)$$

јер је $\alpha: 6x + 2y - 3z - 75 = 0$

Једначина праве која садржи тачку $P(3, -2, -4)$ и има вектор правца $(6, 2, -3)$ је

$$n: \frac{x-3}{6} = \frac{y-(-2)}{2} = \frac{z-(-4)}{-3} \quad \text{тј.} \quad n: \frac{x-3}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{-3} = t.$$

Параметарске једначине праве n су: $x = 6t + 3$, $y = 2t - 2$, $z = -3t - 4$, $t \in \mathbb{R}$.

По дефиницији пројекције P' тачке P на раван α је $\{P'\} = n \cap \alpha$.

Пронађимо $t' \in \mathbb{R}$ такво да су $x' = 6t' + 3$, $y' = 2t' - 2$ и $z' = -3t' - 4$

координате тачке P' .

$$P' \in \alpha \Rightarrow 6 \cdot x' + 2 \cdot y' - 3z' - 75 = 0 \Rightarrow 6 \cdot (6t' + 3) + 2 \cdot (2t' - 2) - 3(-3t' - 4) - 75 = 0$$

$$36t' + 18 + 4t' - 4 + 9t' + 12 - 75 = 0$$

$$40t' + 9t' + 14 - 63 = 0$$

$$49t' - 49 = 0$$

$$49t' = 49$$

$$t' = \frac{49}{49} = 1$$

$$\Rightarrow x' = 6t' + 3 = 6 \cdot 1 + 3 = 6 + 3 = 9, \quad y' = 2t' - 2 = 2 \cdot 1 - 2 = 2 - 2 = 0, \quad z' = -3t' - 4 = -3 \cdot 1 - 4 = -3 - 4 = -7$$

$\Rightarrow$ пројекција тачке P на раван α је тачка $P'(9, 0, -7)$.

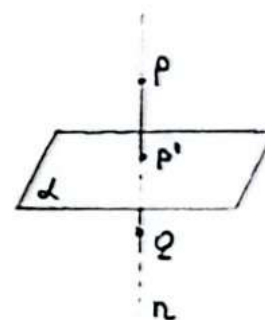
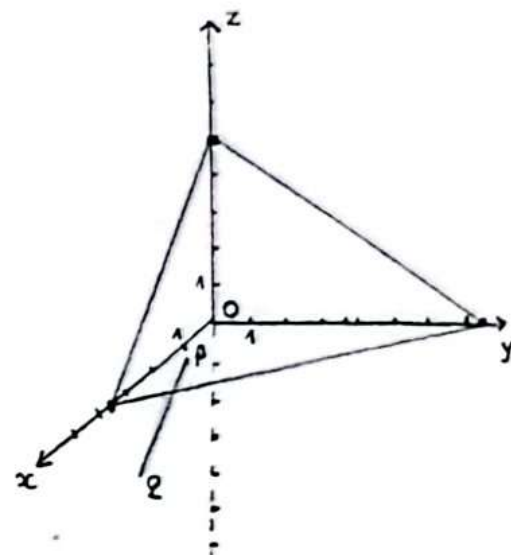
По дефиницији симетричне тачке Q тачки $P(3, -2, -4)$ у односу на раван α важи да је тачка P' средиште дужи PQ , те важи:

$$9 = x' = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow 18 = x_P + x_Q = 3 + x_Q \Rightarrow x_Q = 18 - 3 = 15$$

$$0 = y' = \frac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow 0 = y_P + y_Q = -2 + y_Q \Rightarrow y_Q = 2$$

$$-7 = z' = \frac{z_P + z_Q}{2} \Rightarrow -14 = -4 + z_Q \Rightarrow z_Q = -14 + 4 = -10$$

симетрична тачка тачки $P(3, -2, -4)$ у односу на раван α је тачка $Q(15, 2, -10)$.



4.14. Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P(-1, -2, 1)$ у односу на праву $\ell: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$ као и пројекцију P' тачке P на праву ℓ .

Решење: $\ell: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1} = t \Rightarrow x = -2t$
 $y = 4t + 3$
 $z = t + 4, t \in \mathbb{R}$
 $\vec{u}_\ell = (-2, 4, 1)$

Нека је $t' \in \mathbb{R}$ такво да су $x' = -2t', y' = 4t' + 3, z' = t' + 4$ координате тачке P' .

P' је пројекција тачке P на праву $\ell \Rightarrow PP' \perp \ell \Rightarrow \vec{PP'} \cdot \vec{u}_\ell = 0$

$$\vec{PP'} = [P'] - [P] = (-2t', 4t' + 3, t' + 4) - (-1, -2, 1) = (-2t' + 1, 4t' + 5, t' + 3)$$

$$\vec{PP'} \cdot \vec{u}_\ell = 0 \Rightarrow (-2t' + 1, 4t' + 5, t' + 3) \cdot (-2, 4, 1) = 0$$

$$-2(-2t' + 1) + 4(4t' + 5) + 1(t' + 3) = 0$$

$$4t' - 2 + 16t' + 20 + t' + 3 = 0$$

$$21t' + 21 = 0$$

$$21t' = -21$$

$$t' = \frac{-21}{21} = -1 \Rightarrow x' = -2t' = -2 \cdot (-1) = 2 \quad y' = 4t' + 3 = 4 \cdot (-1) + 3 = -4 + 3 = -1 \quad z' = t' + 4 = -1 + 4 = 3$$

Пројекција тачке P на праву ℓ је тачка $P'(2, -1, 3)$.

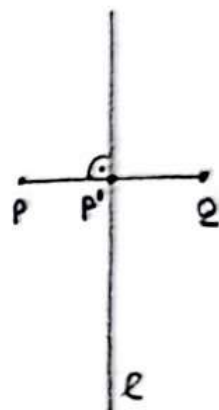
Како је тачка Q симетрична тачки $P(-1, -2, 1)$ у односу на праву ℓ , то је тачка P' средиште дужи PQ .

$$\Rightarrow 2 = x' = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow 4 = x_P + x_Q = -1 + x_Q \Rightarrow x_Q = 4 + 1 = 5$$

$$-1 = y' = \frac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow -2 = y_P + y_Q = -2 + y_Q \Rightarrow y_Q = -2 + 2 = 0$$

$$3 = z' = \frac{z_P + z_Q}{2} \Rightarrow 6 = z_P + z_Q = 1 + z_Q \Rightarrow z_Q = 6 - 1 = 5$$

Симетрична тачка тачки P у односу на праву ℓ је тачка $Q(5, 0, 5)$.



4.15. Одредити једначину равни која садржи праву $\ell: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ и нормална је на равни $\alpha: 2x-4y+z+5=0$.

Решење: Приметимо да тачка $L(1, -2, 3)$ припада правој ℓ (јер је $\frac{1-1}{2} = \frac{-2+2}{1} = \frac{3-3}{3} = 0$), те тражена равни β која садржи праву ℓ мора садржати и тачку L .

$$\ell: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow \vec{\mu}_\ell = (2, 1, 3)$$

Како равни β садржи праву ℓ , то вектор правца $\vec{\mu}_\ell$ праве ℓ припада равни β .

$$\beta \perp \alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{n}_\alpha = (2, -4, 1)$$

$$\vec{\mu}_\ell \subset \beta, \vec{n}_\beta \perp \beta \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{\mu}_\ell$$

$$\alpha: 2x-4y+z+5=0$$

Приметимо да су вектори $\vec{\mu}_\ell$ и $\vec{n}_\alpha$ линеарно независни.

$$\alpha \vec{\mu}_\ell + b \vec{n}_\alpha = \vec{0} \Rightarrow a \cdot (2, 1, 3) + b \cdot (2, -4, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow (2a, a, 3a) + (2b, -4b, b) = (0, 0, 0) \Rightarrow (2a+2b, a-4b, 3a+b) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow 2a+2b=0 \quad / :2 \quad a+b=0$$

$$a-4b=0 \quad \xrightarrow{\quad} \ominus \quad 5b=0 \Rightarrow b=0$$

$$3a+b=0$$

$$a=-b=-0=0$$

Како из $a \vec{\mu}_\ell + b \vec{n}_\alpha = \vec{0}$ следи да је $a=b=0$, то су $\vec{\mu}_\ell$ и $\vec{n}_\alpha$ линеарно независни.

$\Rightarrow$ Можемо сматрати да је $\vec{\mu}_\ell \times \vec{n}_\alpha$ вектор нормале на равни β .

$$\vec{\mu}_\ell \times \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = 1 \cdot (1 \cdot 1 - (-4) \cdot 3) \vec{e}_1 + (-1) \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 3) \vec{e}_2 + 1 \cdot (2 \cdot (-4) - 2 \cdot 1) \vec{e}_3$$

$$= (1+12) \vec{e}_1 - (2-6) \vec{e}_2 + 1 \cdot (-8-2) \vec{e}_3 = 13 \vec{e}_1 + 4 \vec{e}_2 - 10 \vec{e}_3 = (13, 4, -10).$$

Једначина равни β која садржи тачку $L(1, -2, 3)$ и има вектор нормале $(13, 4, -10)$ је

$$\beta: 13 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y-(-2)) - 10 \cdot (z-3) = 0$$

$$13x-13+4(y+2)-10z+30=0$$

$$13x-13+4y+8-10z+30=0$$

$$13x+4y-10z+25=0.$$

4.16. Одредити λ тако да се праве $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и $q: \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ секу. Које су координате пресечне тачке?

Решење: Како је $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$, то је $\vec{u}_p = (3, 5, -2)$ и права p садржи тачку $P(2, -4, 1)$ јер је $\frac{2-2}{3} = \frac{-4+4}{5} = \frac{1-1}{-2} = 0$.

Како је $q: \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$, то је $\vec{u}_q = (2, 1, 0)$ и права q садржи тачку $Q(\lambda, 3, -5)$ јер је $\frac{\lambda-\lambda}{2} = \frac{3-3}{1} = \frac{-5+5}{0} = 0$.

Како је $3 \neq \frac{3}{2} \cdot 2$ али $5 \neq \frac{3}{2} \cdot 1$, то вектори правца $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$ правих p и q , редом, нису колинеарни те праве p и q нису паралелне (не поклапају се нити су дисјунктне и у истој равни).

Дакле, дате праве p и q се или секу или су мимоилазне. По дефиницији мимоилазних правих не постоји раван која их садржи, док за две праве које се секу постоји раван која их садржи.

Односно, дате праве p и q се секу само уколико су вектори $\vec{PQ}$, $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$ компланарни, односно ако је $[\vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q] = 0$.

$$\vec{PQ} = [Q] - [P] = (\lambda, 3, -5) - (2, -4, 1) = (\lambda-2, 7, -6)$$

$$0 = [\vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q] = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 7 & -6 \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda-2 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \lambda-2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot 2 \cdot (7 \cdot (-2) - 5 \cdot (-6))$$

$$+ (-1)^5 \cdot (1 \cdot (\lambda-2) \cdot (-2) - 3 \cdot (-6)) + 0 = 2 \cdot (-14 + 30) - (-2\lambda + 4 + 18) = 2 \cdot 16 + 2\lambda - 22 = 32 + 2\lambda - 22 = 10 + 2\lambda$$

Дакле, праве p и q се секу ако и само ако је $2\lambda + 10 = 0$, тј. $2\lambda = -10$, тј. $\lambda = \frac{-10}{2} = -5$.

Означимо са $T(x_T, y_T, z_T)$ пресечну тачку правих p и q .

$T \in p \Rightarrow$ Постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да важи $\frac{x_T-2}{3} = \frac{y_T+4}{5} = \frac{z_T-1}{-2} = t$, тј. $x_T = 3t+2$, $y_T = 5t-4$, $z_T = -2t+1$.

$T \in q \Rightarrow$ Постоји $s \in \mathbb{R}$ такво да важи $\frac{x_T+5}{2} = \frac{y_T-3}{1} = \frac{z_T+5}{0} = s$, тј. $x_T = 2s-5$, $y_T = s+3$, $z_T = -5$.

$$3t+2 = x_T = 2s-5$$

$$5t-4 = y_T = s+3$$

$$-2t+1 = z_T = -5$$

$$\Rightarrow -2t = -5-1 = -6 \Rightarrow t = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_T = 3t+2 = 3 \cdot 3+2 = 9+2 = 11$$

$$y_T = 5t-4 = 5 \cdot 3-4 = 15-4 = 11$$

$$z_T = -5$$

$$5 \cdot 3 - 4 = 5 + 3$$

$$15 - 4 = 5 + 3$$

$$8 = 8$$

$$3 \cdot 3 + 2 = 2s - 5$$

$$9 + 2 = 2s - 5$$

$$11 + 5 = 2s$$

$$16 = 2s$$

$$s = 8 \quad \checkmark$$

Мора се проверити да су задовољене све једначине система.

Координате пресечне тачке су $T(11, 11, -5)$.

4.17. Одредити заједничку нормалу и растојање између мимоилазних права $p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ и $q: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Решење:

n - тражена заједничка нормала мимоилазних права p и q

$n \cap p = \{P\}$ $n \cap q = \{Q\}$ Нека су $P(x_p, y_p, z_p)$ и $Q(x_q, y_q, z_q)$.

$P \in p \Rightarrow$ Постоји $t \in \mathbb{R}$ тако да важи $\frac{x_p-4}{1} = \frac{y_p+3}{2} = \frac{z_p-12}{-1} = t$, тј.

$$x_p = t+4, y_p = 2t-3, z_p = -t+12.$$

$Q \in q \Rightarrow$ Постоји $s \in \mathbb{R}$ тако да важи $\frac{x_q-3}{-7} = \frac{y_q-1}{2} = \frac{z_q-1}{3} = s$, тј.

$$x_q = -7s+3, y_q = 2s+1, z_q = 3s+1.$$

$$\vec{QP} = [P] - [Q] = (t+4, 2t-3, -t+12) - (-7s+3, 2s+1, 3s+1) =$$

$$= (t+4+7s-3, 2t-3-2s-1, -t+12-3s-1) = (t+7s+1, 2t-2s-4, -t-3s+11)$$

$$QP \perp p \Rightarrow \vec{QP} \cdot \vec{u}_p = 0 \Rightarrow (t+7s+1, 2t-2s-4, -t-3s+11) \cdot (1, 2, -1) = 0$$

$$p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$$

те је $\vec{u}_p = (1, 2, -1)$

$$(t+7s+1) \cdot 1 + (2t-2s-4) \cdot 2 + (-t-3s+11) \cdot (-1) = 0$$

$$\underline{t} + \underline{7s} + 1 + \underline{4t} - \underline{4s} - 8 + \underline{t} + \underline{3s} - 11 = 0$$

$$6t + 6s - 18 = 0 \quad / : 6 \neq 0$$

$$t + s - 3 = 0 \Rightarrow t = 3 - s$$

$$QP \perp q \Rightarrow \vec{QP} \cdot \vec{u}_q = 0 \Rightarrow (t+7s+1, 2t-2s-4, -t-3s+11) \cdot (-7, 2, 3) = 0$$

$$(t+7s+1) \cdot (-7) + (2t-2s-4) \cdot 2 + (-t-3s+11) \cdot 3 = 0$$

$$\underline{-7t} - \underline{49s} - 7 + \underline{4t} - \underline{4s} - 8 - \underline{3t} - \underline{9s} + 33 = 0$$

$$-6t - 62s + 18 = 0 \quad / : 2 \neq 0$$

$$-3t - 31s + 9 = 0$$

$$-3(3-s) - 31s + 9 = 0$$

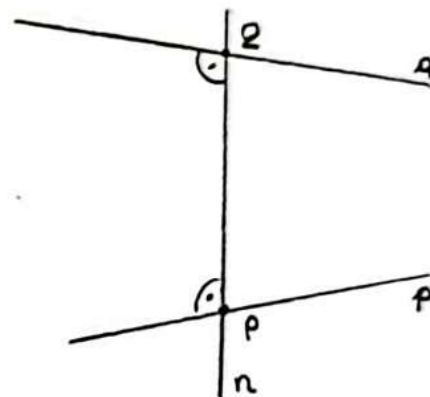
$$-9 + 3s - 31s + 9 = 0$$

$$-28s = 0 \Rightarrow s = 0 \quad t = 3 - s = 3 - 0 = 3 \Rightarrow x_p = t+4 = 3+4=7 \quad y_p = 2t-3 = 2 \cdot 3 - 3 = 6-3=3$$

$$z_p = -t+12 = -3+12=9 \Rightarrow P(7, 3, 9)$$

$$\vec{QP} = (t+7s+1, 2t-2s-4, -t-3s+11) = (3+7 \cdot 0+1, 2 \cdot 3-2 \cdot 0-4, -3-3 \cdot 0+11) = (4, 2, 8) = 2 \cdot (2, 1, 4) \Rightarrow \vec{u}_n = (2, 1, 4) \Rightarrow n: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{4}$$

је тражена заједничка нормала мимоилазних права p и q , а растојање им је $QP = \|\vec{QP}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 4 + 64} = \sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 21} = 2\sqrt{21}$.



4.18. Одредити једначину праве која садржи тачку $L(2, -1, 7)$ и сече праве $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ и $q: \frac{x-7}{-1} = \frac{y+11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.

Решење: ℓ - тражена једначина праве која садржи тачку $L(2, -1, 7)$ и сече праве p и q

$\ell \cap p = \{P\}$ $\ell \cap q = \{Q\}$ Нека су $P(x_p, y_p, z_p)$ и $Q(x_q, y_q, z_q)$.

$P \in p \Rightarrow$ постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да је $\frac{x_p-1}{2} = \frac{y_p-4}{-3} = \frac{z_p-3}{1} = t$, тј.

$$x_p = 2t+1, y_p = -3t+4, z_p = t+3.$$

$Q \in q \Rightarrow$ постоји $s \in \mathbb{R}$ такво да је $\frac{x_q-7}{-1} = \frac{y_q+11}{-3} = \frac{z_q+2}{0} = s$, тј.

$$x_q = -s+7, y_q = -3s+11, z_q = -2. \text{ важи да } P_1(1, 4, 3) \in p \text{ јер је } \frac{1-1}{2} = \frac{4-4}{-3} = \frac{3-3}{1} = 0.$$

Да би права ℓ секла праву p , праве LP_1 , ℓ и p морају бити компланарне, односно $[\vec{LP}_1, \vec{\mu}_\ell, \vec{\mu}_p] = 0$.

$$\vec{LP}_1 = [P_1] - [L] = (1, 4, 3) - (2, -1, 7) = (1-2, 4-(-1), 3-7) = (-1, 5, -4)$$

Означимо $\vec{\mu}_\ell = (a, b, c) \neq \vec{0}$

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1} \Rightarrow \vec{\mu}_p = (2, -3, 1)$$

$$0 = [\vec{LP}_1, \vec{\mu}_\ell, \vec{\mu}_p] = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -4 \\ a & b & c \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3 \cdot a \cdot (5 \cdot 1 - (-3) \cdot (-4)) + (-1)^4 \cdot b \cdot (-1 \cdot 1 - 2 \cdot (-4)) + (-1)^5 \cdot c \cdot (-1 \cdot (-3) - 2 \cdot 5) = -a \cdot (5 - 12) + b \cdot (-1 + 8) - c \cdot (3 - 10) =$$

$$= -a \cdot (-7) + b \cdot 7 - c \cdot (-7) = 7a + 7b + 7c \Rightarrow a + b + c = 0$$

важи да $Q_1(7, 11, -2) \in q$ јер је $\frac{7-7}{-1} = \frac{11+11}{-3} = \frac{-2+2}{0} = 0$. Да би права ℓ секла праву q , праве

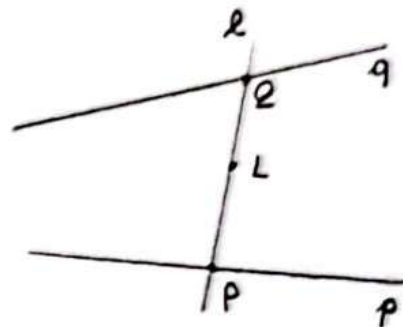
LQ_1 , ℓ и q морају бити компланарне, односно $[\vec{LQ}_1, \vec{\mu}_\ell, \vec{\mu}_q] = 0$.

$$\vec{LQ}_1 = [Q_1] - [L] = (7, 11, -2) - (2, -1, 7) = (7-2, 11-(-1), -2-7) = (5, 12, -9)$$

$$q: \frac{x-7}{-1} = \frac{y+11}{-3} = \frac{z+2}{0} \Rightarrow \vec{\mu}_q = (-1, -3, 0)$$

$$0 = [\vec{LQ}_1, \vec{\mu}_\ell, \vec{\mu}_q] = \begin{vmatrix} 5 & 12 & -9 \\ a & b & c \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 12 & -9 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot a \cdot (12 \cdot 0 - (-3) \cdot (-9)) +$$

$$(-1)^4 \cdot b \cdot (5 \cdot 0 - (-1) \cdot (-9)) + (-1)^5 \cdot c \cdot (5 \cdot (-3) - (-1) \cdot 12) = -a \cdot (-27) + b \cdot (-9) - c \cdot (-15 + 12) = 27a - 9b + 3c$$



$$a+b+c=0 \quad / \cdot (-3) \quad -3a-3b-3c=0$$

$$27a-9b+3c=0 \quad \text{---} \quad \oplus$$

$$24a-12b=0 \quad / :12 \neq 0$$

$$2a-b=0$$

$$b=2a \leadsto c=-a-b=-a-2a=-3a$$

$$\vec{u}_\ell = (a, b, c) = (a, 2a, -3a) = a \cdot (1, 2, -3)$$

$$a \neq 0 \text{ јер ако би } a=0, \text{ онда би } \vec{u}_\ell = (0, 0, 0) \nmid$$

Дакле, за вектор правца праве ℓ се може узети вектор $(1, 2, -3)$, а како права ℓ садржи тачку $L(2, -1, 7)$, то је њена једначина $\ell: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-7}{-3}$.

4.19. Кроз тачку $T(-3, 1, 2)$ одредити праву ℓ која је паралелна равни $\alpha: 4x - y + 2z - 5 = 0$ и која сече праву $p: \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Решење: $\ell \parallel \alpha \Rightarrow \vec{u}_\ell \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{u}_\ell \cdot \vec{n}_\alpha = 0$

Означимо вектор правца праве ℓ са $\vec{u}_\ell = (a, b, c) \neq \vec{0}$.

$\alpha: 4x - y + 2z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (4, -1, 2)$ је вектор нормале равни α

$$(a, b, c) \cdot (4, -1, 2) = 0$$

$$4a - b + 2c = 0$$

$p: \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \vec{u}_p = (0, 2, -1)$ је вектор правца праве p , а тачка

$P(-3, 2, -1)$ је са ње јер је $\frac{-3+3}{0} = \frac{2-2}{2} = \frac{-1+1}{-1} = 0$.

Како права ℓ сече праву p , то вектори $\vec{TP}$, $\vec{u}_\ell$ и $\vec{u}_p$ морају бити компланарни, тј. $[\vec{TP}, \vec{u}_\ell, \vec{u}_p] = 0$.

$$0 = [\vec{TP}, \vec{u}_\ell, \vec{u}_p] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ a & b & c \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{TP} = [P] - [T] = (-3, 2, -1) - (-3, 1, 2) = (0, 1, -3)$$

$$= (-1)^3 \cdot a \cdot (1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3)) + (-1)^4 \cdot b \cdot (0 \cdot (-1) - 0 \cdot (-3)) + (-1)^5 \cdot c \cdot (0 \cdot 2 - 0 \cdot 1) =$$

$$= -a \cdot (-1+6) + b \cdot (0+0) - c \cdot (0-0) = -5a \Rightarrow a = 0 \rightarrow 4a - b + 2c = 0$$

$$b = 4a + 2c = 4 \cdot 0 + 2c = 2c$$

$$\vec{u}_\ell = (a, b, c) = (0, 2c, c) = c \cdot (0, 2, 1)$$

$c \neq 0$ јер ако би $c = 0$, онда би $\vec{u}_\ell = (0, 0, 0) \nexists$

Дакле, за вектор правца праве ℓ се може узети вектор $(0, 2, 1)$, а како права ℓ садржи тачку T то је њена једначина $\ell: \frac{x+3}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$.

4.20. Одредити равн α која са равни $\gamma: x-4y-8z+12=0$ образује угао $\frac{\pi}{4}$ и садржи праву: а) $x+5y+z=0$,
 $x-z+4=0$ б) $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1}$.

Решење: $\alpha: ax+by+cz+d=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (a, b, c)$

Означимо са $\varphi(\alpha, \gamma)$ општар угао између равни α и γ . Тада важи $\varphi(\alpha, \gamma) = \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\gamma)$ или $\varphi(\alpha, \gamma) = \pi - \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\gamma)$,
 те је $\cos \varphi(\alpha, \gamma) = \cos \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\gamma)$ или $\cos \varphi(\alpha, \gamma) = \cos(\pi - \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\gamma)) = -\cos \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\gamma)$, односно $\cos \varphi(\alpha, \gamma) = |\cos \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\gamma)|$.

$$\gamma: x-4y-8z+12=0 \Rightarrow \vec{n}_\gamma = (1, -4, -8)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \cos \varphi(\alpha, \gamma) = |\cos \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\gamma)| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\gamma|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\gamma\|} = \frac{|(a, b, c) \cdot (1, -4, -8)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{1+16+64}} = \frac{|a-4b-8c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{81}} = \frac{|a-4b-8c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot 9}$$

$$\Rightarrow \underbrace{9\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}}_{\geq 0} = \underbrace{2 \cdot |a-4b-8c|}_{\geq 0} \quad |^2 \Rightarrow 81 \cdot 2 \cdot (a^2+b^2+c^2) = 4 \cdot (a-4b-8c)^2 \Rightarrow (a-4b-8c)^2 = \frac{81}{2} (a^2+b^2+c^2) \quad (1)$$

а) $p: x+5y+z=0$

$$x-z+4=0 \Rightarrow z=x+4$$

$$x=t \Rightarrow z=x+4=t+4$$

$$5y=-x-z=-t-t-4=-2t-4 \Rightarrow y=-\frac{2}{5}t-\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow p: \begin{matrix} x=t \\ y=-\frac{2}{5}t-\frac{4}{5} \\ z=t+4 \end{matrix}$$

Уочавањем коефицијената који стоје испред t у изразима за x, y и z добијамо вектор правца праве p
 $(1, -\frac{2}{5}, 1)$, а можемо за $\vec{u}_p$ узети и $5 \cdot (1, -\frac{2}{5}, 1) = (5, -2, 5)$.

$$p \subset \alpha \Rightarrow \vec{u}_p \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow (5, -2, 5) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow 5a - 2b + 5c = 0 \Rightarrow 2b = 5a + 5c \Rightarrow b = \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}c \quad (2)$$

$$P(0, -\frac{4}{5}, 4) \in p \text{ јер је за } t=0 \quad x_p=0, y_p=-\frac{2}{5} \cdot 0 - \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}, z_p=0+4=4$$

$$P \in p, p \subset \alpha \Rightarrow P \in \alpha \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot (-\frac{4}{5}) + c \cdot 4 + d = 0 \Rightarrow d = \frac{4}{5}b - 4c$$

Заменом (2) $b = \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}c$ у (1) $(a-4b-8c)^2 = \frac{81}{2} \cdot (a^2+b^2+c^2)$ добија се:

$$(a-4 \cdot (\frac{5}{2}a + \frac{5}{2}c) - 8c)^2 = \frac{81}{2} \cdot (a^2 + \frac{25}{4}(a+c)^2 + c^2)$$

$$(a-10a-10c-8c)^2 = \frac{81}{2} \cdot (a^2 + \frac{25}{4}a^2 + \frac{25}{2}ac + \frac{25}{4}c^2 + c^2)$$

$$(-9a-18c)^2 = \frac{81}{2} \cdot (\frac{29}{4}a^2 + \frac{25}{2}ac + \frac{29}{4}c^2)$$

$$81(a+2c)^2 = \frac{81}{2} \cdot \left(\frac{29}{4}a^2 + \frac{25}{2}ac + \frac{29}{4}c^2 \right) \quad / :81 \neq 0$$

$$a^2 + 4ac + 4c^2 = \frac{29}{8}a^2 + \frac{25}{4}ac + \frac{29}{8}c^2 \quad / :8 \neq 0$$

$$8a^2 + 32ac + 32c^2 = 29a^2 + 50ac + 29c^2$$

$$29a^2 - 8a^2 + 50ac - 32ac + 29c^2 - 32c^2 = 0$$

$$21a^2 + 18ac - 3c^2 = 0 \quad / :3 \neq 0$$

$$7a^2 + 6ac - c^2 = 0$$

Ако би $c=0$, онда би било $7a^2 + 6 \cdot a \cdot 0 - 0^2 = 0$ тј. $7a^2 = 0$, односно $a=0$, те би $b = \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}c = \frac{5}{2} \cdot 0 + \frac{5}{2} \cdot 0 = 0$ и $d = \frac{4}{5}b - 4c = \frac{4}{5} \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$, али $0=0$ није једначина равни.

Ако је $c \neq 0$, онда можемо поделити $7a^2 + 6ac - c^2 = 0$ са $c^2 \neq 0$.

$$7 \cdot \frac{a^2}{c^2} + 6 \cdot \frac{ac}{c^2} - \frac{c^2}{c^2} = 0$$

$$7 \cdot \left(\frac{a}{c} \right)^2 + 6 \cdot \frac{a}{c} - 1 = 0$$

Уведимо смену $s = \frac{a}{c}$.

$$7s^2 + 6s - 1 = 0$$

$$\Delta = (+6)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-1) = 36 + 28 = 64 = 8^2$$

$$s_{1,2} = \frac{-(+6) \pm \sqrt{8^2}}{2 \cdot 7} = \frac{-6 \pm 8}{14}$$

$$s_1 = \frac{-6-8}{14} = \frac{-14}{14} = -1 \quad s_2 = \frac{-6+8}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

1^о случај $s = -1 \Rightarrow \frac{a}{c} = -1 \Rightarrow a = -c$

$$b = \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}c = -\frac{5}{2}c + \frac{5}{2}c = 0$$

$$d = \frac{4}{5}b - 4c = \frac{4}{5} \cdot 0 - 4 \cdot c = -4c$$

$$\alpha_1: ax + by + cz + d = 0$$

$$-cx + 0 \cdot y + cz - 4c = 0 \quad / :c \neq 0$$

$$-x + z - 4 = 0$$

2^о случај $s = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{7} \Rightarrow c = 7a$

$$b = \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}c = \frac{5}{2}a + \frac{5}{2} \cdot 7a = \frac{5}{2}a + \frac{35}{2}a = \frac{40}{2}a = 20a$$

$$d = \frac{4}{5}b - 4c = \frac{4}{5} \cdot 20a - 4 \cdot 7a = 16a - 28a = -12a$$

$$\alpha_2: ax + by + cz + d = 0$$

$$ax + 20ay + 7az - 12a = 0 \quad / :a \neq 0 \text{ јер ако је } a=0 \text{ било би}$$

$$x + 20y + 7z - 12 = 0$$

$b=c=d=0$,
а $0=0$ није
једначина
равни

Тражене једначине равни су $-x + z - 4 = 0$ и $x + 20y + 7z - 12 = 0$.

8)

$$p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \vec{m}_p = (1, 0, -1)$$

$$p \subset \alpha \Rightarrow \vec{m}_p \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{m}_p \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow (1, 0, -1) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = 0 \Rightarrow 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + (-1) \cdot \gamma = 0$$

$$\alpha - \gamma = 0$$

$$\alpha = \gamma \quad (3)$$

$$P(1, 2, 0) \in p \text{ јер је } \frac{1-1}{1} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{-1} = 0, p \subset \alpha \Rightarrow P \in \alpha \Rightarrow \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 0 + d = 0$$

$$\alpha + 2\beta + d = 0$$

$$d = -\alpha - 2\beta$$

Заменом (3) $\alpha = \gamma$ у (1) $(\alpha - 4\beta - 8\gamma)^2 = \frac{81}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ добија се

$$(\gamma - 4\beta - 8\gamma)^2 = \frac{81}{2} \cdot (\gamma^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$(-4\beta - 7\gamma)^2 = \frac{81}{2} \cdot (\beta^2 + 2\gamma^2)$$

$$(4\beta + 7\gamma)^2 = \frac{81}{2} \beta^2 + 81\gamma^2$$

$$16\beta^2 + 56\beta\gamma + 49\gamma^2 = \frac{81}{2} \beta^2 + 81\gamma^2$$

$$\frac{81}{2} \beta^2 - 16\beta^2 - 56\beta\gamma + 81\gamma^2 - 49\gamma^2 = 0$$

$$\frac{81-32}{2} \beta^2 - 56\beta\gamma + 32\gamma^2 = 0$$

$$\frac{49}{2} \beta^2 - 56\beta\gamma + 32\gamma^2 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$49\beta^2 - 112\beta\gamma + 64\gamma^2 = 0$$

Ако би $\gamma = 0$, онда би $49\beta^2 - 112\beta \cdot 0 + 64 \cdot 0^2 = 0$, тј. $49\beta^2 = 0$, тј. $\beta = 0$, а и $\alpha = \gamma = 0$, као и $d = -\alpha - 2\beta = -0 - 2 \cdot 0 = 0$, али $0 = 0$ није једначина равни.

$$\Rightarrow \gamma \neq 0 \quad 49\beta^2 - 112\beta\gamma + 64\gamma^2 = 0 \quad / : \gamma^2 \neq 0$$

$$49 \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2} - 112 \cdot \frac{\beta\gamma}{\gamma^2} + 64 \frac{\gamma^2}{\gamma^2} = 0$$

$$49 \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 - 112 \cdot \frac{\beta}{\gamma} + 64 = 0$$

$$\text{Уведимо смену } s = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$49s^2 - 112s + 64 = 0$$

$$\Delta = (-112)^2 - 4 \cdot 49 \cdot 64 = 112^2 - (2 \cdot 7 \cdot 8)^2 = 112^2 - 112^2 = 0$$

$$s_1 = s_2 = \frac{-(-112)}{2 \cdot 49} = \frac{2 \cdot 56}{2 \cdot 49} = \frac{7 \cdot 8}{7 \cdot 7} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{8}{7} \Rightarrow b = \frac{8}{7}c$$

$$a = c$$

$$d = -a - 2b = -c - 2 \cdot \frac{8}{7}c = -c - \frac{16}{7}c = -\frac{23}{7}c$$

$$\Delta: ax + by + cz + d = 0$$

$$cx + \frac{8}{7}cy + cz - \frac{23}{7}c = 0 \quad / : c \neq 0$$

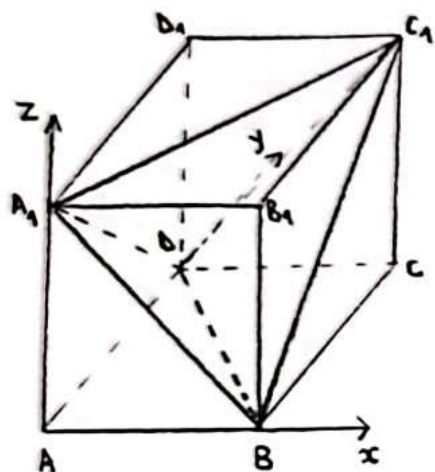
$$x + \frac{8}{7}y + z - \frac{23}{7} = 0 \quad / \cdot 7 \neq 0$$

$$7x + 8y + 7z - 23 = 0$$

Тражена равен је: $7x + 8y + 7z - 23 = 0$.

4.24. Одредити угао између пљосни правилног тетраедра.

Решење: Сетимо се погодно одабраног ортонормираног репера из задатка 3.8 а) у коме су координате тачака правилног тетраедра $A_1 B C_1 D$ ивице a биле $A_1(0,0,\frac{a\sqrt{3}}{2})$, $B(\frac{a\sqrt{3}}{2},0,0)$, $C_1(\frac{a\sqrt{3}}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2})$, $D(0,\frac{a\sqrt{3}}{2},0)$.



Због симетрије правилног тетраедра важи да су углови између сваке две његове пљосни једнаки, те је довољно израчунати угао између пљосни $A_1 B D$ и $A_1 B C_1$.

$$\vec{A_1 B} = [B] - [A_1] = (\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0) - (0, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2}) = (\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{a\sqrt{3}}{2})$$

$$\vec{A_1 D} = [D] - [A_1] = (0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0) - (0, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2}) = (0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2})$$

Вектор нормале равни $A_1 B D$ можемо узети да је $\vec{A_1 B} \times \vec{A_1 D}$ јер су $\vec{A_1 B}$ и $\vec{A_1 D}$

линеарно независни вектори равни $A_1 B D$ (зато што $\alpha \cdot \vec{A_1 B} + \beta \cdot \vec{A_1 D} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\alpha \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}) + \beta \cdot (0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\alpha \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, -\alpha \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}) + (0, \beta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, -\beta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \beta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, -\alpha \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - \beta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, \beta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, -\alpha \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - \beta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Downarrow \alpha \neq 0$$

$$\alpha = 0$$

$$\Downarrow \beta \neq 0$$

$$\beta = 0$$

✓

$$\vec{n}_{A_1 B D} = \vec{A_1 B} \times \vec{A_1 D} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & -\frac{a\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\frac{a\sqrt{3}}{2} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} & -\frac{a\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{3}}{2} & -\frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{a\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \vec{e}_3 =$$

$$= (-1)^2 \cdot (0 \cdot (-\frac{a\sqrt{3}}{2}) - \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot (-\frac{a\sqrt{3}}{2})) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot (-\frac{a\sqrt{3}}{2}) - 0 \cdot (-\frac{a\sqrt{3}}{2})) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - 0 \cdot 0) \vec{e}_3 =$$

$$= 1 \cdot \frac{2a^3}{4} \vec{e}_1 - (-\frac{2a^3}{4}) \vec{e}_2 + 1 \cdot \frac{2a^3}{4} \vec{e}_3 = \frac{a^3}{2} \vec{e}_1 + \frac{a^3}{2} \vec{e}_2 + \frac{a^3}{2} \vec{e}_3 = (\frac{a^3}{2}, \frac{a^3}{2}, \frac{a^3}{2})$$

$$\vec{A_1 C_1} = [C_1] - [A_1] = (\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}) - (0, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2}) = (\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0)$$

$$\gamma \cdot \vec{A_1 B} + \delta \cdot \vec{A_1 C_1} = \vec{0} \Rightarrow \gamma \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}) + \delta \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\gamma \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, -\gamma \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}) + (\delta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \delta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$(\gamma \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + \delta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \delta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, -\gamma \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}) = (0, 0, 0) \Rightarrow \gamma \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + \delta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, \delta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, -\gamma \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Downarrow \delta \neq 0$$

$$\delta = 0$$

$$\Downarrow \gamma \neq 0$$

$$\gamma = 0$$

✓

$\Rightarrow$ Вектори $\vec{A_1B}$ и $\vec{A_1C_1}$ су линеарно независни вектори равни A_1BC_1 , те се $\vec{A_1B} \times \vec{A_1C_1}$ може узети за вектор нормале равни A_1BC_1 .

$$\Rightarrow \vec{n}_{A_1BC_1} = \vec{A_1B} \times \vec{A_1C_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{2} & -\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{e}_3 =$$

$$= (-1)^2 \cdot (0 \cdot 0 - \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{a\sqrt{2}}{2})) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{a\sqrt{2}}{2})) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}) \vec{e}_3 =$$

$$= 1 \cdot (0 + \frac{2a^2}{4}) \vec{e}_1 - (0 + \frac{2a^2}{4}) \vec{e}_2 + 1 \cdot (\frac{2a^2}{4} - 0) \vec{e}_3 = \frac{a^2}{2} \vec{e}_1 - \frac{a^2}{2} \vec{e}_2 + \frac{a^2}{2} \vec{e}_3 = (\frac{a^2}{2}, -\frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{2})$$

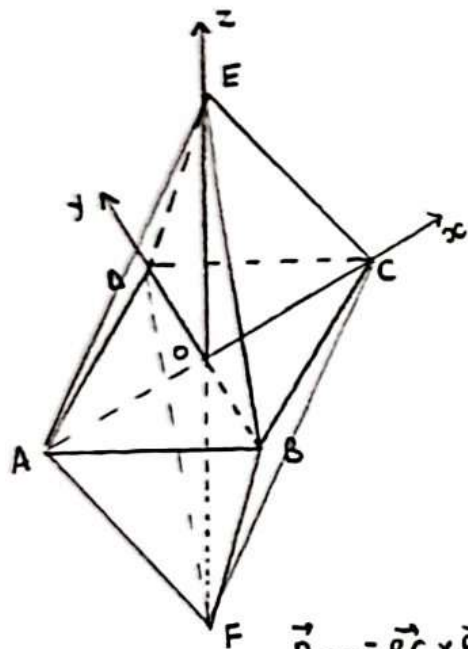
$$\cos \angle(A_1BD, A_1BC_1) = |\cos \angle(\vec{n}_{A_1BD}, \vec{n}_{A_1BC_1})| = \frac{|\vec{n}_{A_1BD} \cdot \vec{n}_{A_1BC_1}|}{\|\vec{n}_{A_1BD}\| \cdot \|\vec{n}_{A_1BC_1}\|} = \frac{|(\frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{2}) \cdot (\frac{a^2}{2}, -\frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{2})|}{\sqrt{(\frac{a^2}{2})^2 + (\frac{a^2}{2})^2 + (\frac{a^2}{2})^2} \cdot \sqrt{(\frac{a^2}{2})^2 + (-\frac{a^2}{2})^2 + (\frac{a^2}{2})^2}} =$$

$$= \frac{|\frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cdot (-\frac{a^2}{2}) + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{2}|}{\sqrt{3 \cdot \frac{a^4}{4}} \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{a^4}{4}}} = \frac{|\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4}|}{\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{2}} = \frac{\frac{a^4}{4}}{3 \cdot \frac{a^4}{4}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle(A_1BD, A_1BC_1) = \arccos \frac{1}{3}$$

Дакле, угао између плосни правилног тетраедра је $\arccos \frac{1}{3}$.

4.22. Одредити угао између (свих могућих) пљосни правилног октаедра које имају заједничку ивицу.

Решење: Сетимо се погодно одабраног ортонормираног репера из задатка 3.88) у коме су координате тачака правилног октаедра ЕАВСВФ ивице d биле $E(0,0,\frac{d\sqrt{2}}{2})$, $A(-\frac{d\sqrt{2}}{2},0,0)$, $B(0,-\frac{d\sqrt{2}}{2},0)$, $C(\frac{d\sqrt{2}}{2},0,0)$, $D(0,\frac{d\sqrt{2}}{2},0)$, $F(0,0,-\frac{d\sqrt{2}}{2})$.



одредимо прво угао између пљосни ВСЕ и ВСФ које се секу по дужи ВС.

$$\vec{BC} = [C] - [B] = (\frac{d\sqrt{2}}{2}, 0, 0) - (0, -\frac{d\sqrt{2}}{2}, 0) = (\frac{d\sqrt{2}}{2}, \frac{d\sqrt{2}}{2}, 0)$$

$$\vec{BE} = [E] - [B] = (0, 0, \frac{d\sqrt{2}}{2}) - (0, -\frac{d\sqrt{2}}{2}, 0) = (0, \frac{d\sqrt{2}}{2}, \frac{d\sqrt{2}}{2})$$

$$\alpha \cdot \vec{BC} + \beta \cdot \vec{BE} = \vec{0} \Rightarrow \alpha \cdot (\frac{d\sqrt{2}}{2}, \frac{d\sqrt{2}}{2}, 0) + \beta \cdot (0, \frac{d\sqrt{2}}{2}, \frac{d\sqrt{2}}{2}) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\alpha \frac{d\sqrt{2}}{2}, \alpha \frac{d\sqrt{2}}{2}, 0) + (0, \beta \frac{d\sqrt{2}}{2}, \beta \frac{d\sqrt{2}}{2}) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2}, \alpha \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} + \beta \frac{d\sqrt{2}}{2}, \beta \frac{d\sqrt{2}}{2}) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} = 0, \alpha \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} + \beta \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} = 0, \beta \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Downarrow d \neq 0 \quad \quad \quad \checkmark \quad \quad \quad \Downarrow d \neq 0$$

$$\alpha = 0 \quad \quad \quad \beta = 0$$

$\Rightarrow$ Вектори $\vec{BC}$ и $\vec{BE}$ су линеарно независни вектори равни ВСЕ, те је $\vec{BC} \times \vec{BE}$ један вектор нормале равни ВСЕ.

$$\vec{n}_{ВСЕ} = \vec{BC} \times \vec{BE} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{d\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{d\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{e}_3 =$$

$$= (-1)^2 \cdot (\frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} - \frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot 0) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (\frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot 0) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (\frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2}) \vec{e}_3 =$$

$$= 1 \cdot (\frac{d^2}{4} - 0) \vec{e}_1 - (\frac{d^2}{4} - 0) \vec{e}_2 + (\frac{d^2}{4} - 0) \vec{e}_3 = \frac{d^2}{4} \vec{e}_1 - \frac{d^2}{4} \vec{e}_2 + \frac{d^2}{4} \vec{e}_3 = (\frac{d^2}{4}, -\frac{d^2}{4}, \frac{d^2}{4})$$

$$\vec{BF} = [F] - [B] = (0, 0, -\frac{d\sqrt{2}}{2}) - (0, -\frac{d\sqrt{2}}{2}, 0) = (0, \frac{d\sqrt{2}}{2}, -\frac{d\sqrt{2}}{2})$$

$$\gamma \cdot \vec{BC} + \delta \cdot \vec{BF} = \vec{0} \Rightarrow \gamma \cdot (\frac{d\sqrt{2}}{2}, \frac{d\sqrt{2}}{2}, 0) + \delta \cdot (0, \frac{d\sqrt{2}}{2}, -\frac{d\sqrt{2}}{2}) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\gamma \frac{d\sqrt{2}}{2}, \gamma \frac{d\sqrt{2}}{2}, 0) + (0, \delta \frac{d\sqrt{2}}{2}, -\delta \frac{d\sqrt{2}}{2}) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\gamma \frac{d\sqrt{2}}{2}, \gamma \frac{d\sqrt{2}}{2} + \delta \frac{d\sqrt{2}}{2}, -\delta \frac{d\sqrt{2}}{2}) = (0, 0, 0) \Rightarrow \gamma \frac{d\sqrt{2}}{2} = 0, \gamma \frac{d\sqrt{2}}{2} + \delta \frac{d\sqrt{2}}{2} = 0, -\delta \frac{d\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Downarrow d \neq 0 \quad \quad \quad \checkmark \quad \quad \quad \Downarrow d \neq 0$$

$$\gamma = 0 \quad \quad \quad \delta = 0$$

$\Rightarrow$ Вектори $\vec{BC}$ и $\vec{BF}$ су линеарно независни вектори равни BCF, те је $\vec{BC} \times \vec{BF}$ један вектор нормале равни BCF.

$$\vec{n}_{BCF} = \vec{BC} \times \vec{BF} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{d\sqrt{2}}{2} & -\frac{d\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{d\sqrt{2}}{2} & -\frac{d\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{d\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{d\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{e}_3 =$$

$$= (-1)^2 \cdot \left(\frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{d\sqrt{2}}{2}\right) - 0 \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} \right) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot \left(\frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{d\sqrt{2}}{2}\right) - 0 \cdot 0 \right) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot \left(\frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} \right) \vec{e}_3 =$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{2d^2}{4} - 0 \right) \vec{e}_1 - \left(-\frac{2d^2}{4} - 0 \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{2d^2}{4} - 0 \right) \vec{e}_3 = -\frac{d^2}{2} \vec{e}_1 + \frac{d^2}{2} \vec{e}_2 + \frac{d^2}{2} \vec{e}_3 = \left(-\frac{d^2}{2}, \frac{d^2}{2}, \frac{d^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \cos \angle (BCE, BCF) = |\cos \angle (\vec{n}_{BCE}, \vec{n}_{BCF})| = \frac{|\vec{n}_{BCE} \cdot \vec{n}_{BCF}|}{\|\vec{n}_{BCE}\| \cdot \|\vec{n}_{BCF}\|} = \frac{\left| \left(\frac{d^2}{2}, -\frac{d^2}{2}, \frac{d^2}{2} \right) \cdot \left(-\frac{d^2}{2}, \frac{d^2}{2}, \frac{d^2}{2} \right) \right|}{\sqrt{\left(\frac{d^2}{2} \right)^2 + \left(-\frac{d^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{d^2}{2} \right)^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{d^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{d^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{d^2}{2} \right)^2}} = \frac{\left| \frac{d^2}{2} \cdot \left(-\frac{d^2}{2}\right) + \left(-\frac{d^2}{2}\right) \cdot \frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{2} \cdot \frac{d^2}{2} \right|}{\sqrt{3 \cdot \frac{d^4}{4}} \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{d^4}{4}}} =$$

$$= \frac{\left| -\frac{d^4}{4} - \frac{d^4}{4} + \frac{d^4}{4} \right|}{3 \cdot \frac{d^4}{4}} = \frac{\frac{d^4}{4}}{3 \cdot \frac{d^4}{4}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \arccos \frac{1}{3} = \angle (BCE, BCF)$$

Због симетрије правилног октаедра ће угао између свих могућих лобови тог октаедра које имају заједничку ивицу бити $\arccos \frac{1}{3}$.