

Трансформације координата

Нека су $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ две базе при чему је

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix} \\ &\downarrow \\ \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix} &= A^T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Тада је $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрица преласка с базе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ на базу $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, тј. важи

$\nearrow$
 координате
вектора $\vec{f}_1$
у бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$\uparrow$
 координате
вектора $\vec{f}_2$
у бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$\nwarrow$
 координате
вектора $\vec{f}_3$
у бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Посматрајмо сада два координатна система $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$ и $O'_{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3}$. Координате тачке M у координатном систему $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$ су бројеви $x, y, z \in \mathbb{R}$ такви да је $\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Пишемо $M(x, y, z)$. Слично, координате тачке M у координатном систему $O'_{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3}$ су бројеви $x', y', z' \in \mathbb{R}$ такви да је $\vec{O'M} = x'\vec{f}_1 + y'\vec{f}_2 + z'\vec{f}_3$. Трансформација координата је формула која (за исту тачку M) повезује координате x, y, z и x', y', z' . Важи:

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OO'} + \vec{O'M} = \vec{OO'} + x'\vec{f}_1 + y'\vec{f}_2 + z'\vec{f}_3 = \vec{OO'} + x'(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) + y'(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + z'(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) \\ &= \vec{OO'} + (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\vec{e}_1 + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\vec{e}_2 + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\vec{e}_3\end{aligned}$$

Нека је $\vec{OO'} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, тј. нека су b_1, b_2, b_3 координате тачке O' у координатном систему $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$. Тада је

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 + (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\vec{e}_1 + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\vec{e}_2 + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\vec{e}_3 = \\ &= (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + b_1)\vec{e}_1 + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b_2)\vec{e}_2 + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + b_3)\vec{e}_3, \text{ те како је } \vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \\ \text{то је } x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + b_1, y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b_2, z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + b_3. \text{ Матрични запис ове формуле је}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ односно } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Сличне формуле важе и ако посматрамо неке координатне системе $O\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $O'\vec{f}_1, \vec{f}_2$ у равни.

Дакле, ако је $\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2$ и $\vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2$ и ако су координате тачке M у координатним системима $O\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $O'\vec{f}_1, \vec{f}_2$ редом бројеви x, y , односно x', y' , онда је $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, где је $\vec{OO'} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$.

Такође, координатни систем $O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ може се обележити и са $Oxyz$, $O'\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ са $O'x'y'z'$, а координатни системи у равни са Oxy и $O'x'y'$, а уместо термина координатни систем можемо користити и термин афини репер.

3.1. Тежиште троугла OAB је тачка O' . У равни троугла изабрана су два афина репера: репер Oxy са почетком у тачки O и координатним векторима $\vec{e}_1 = \vec{OA}$ и $\vec{e}_2 = \vec{OB}$ и репер $O'x'y'$ са почетком у тачки O' и координатним векторима $\vec{f}_1 = \vec{O'A}$ и $\vec{f}_2 = \vec{O'B}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') као и координате средишта страница троугла OAB у односу на репер $O'x'y'$.

Решење: Како је тачка O' тежиште троугла OAB , то важи $\vec{OO'} = \frac{1}{3}(\vec{OO} + \vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB})$. (н)

Да бисмо нашли матрицу преласка с базе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ на базу $\vec{f}_1, \vec{f}_2$, изразимо нове базне векторе преко старих.

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 = \vec{O'A} &= \vec{O'O} + \vec{OA} = -\vec{OO'} + \vec{OA} \stackrel{(н)}{=} -\frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OA} = -\frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB} + \vec{OA} = \vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB} = \\ &\stackrel{\text{правило}}{\text{надовезивања}} = (1 - \frac{1}{3})\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB} = \frac{2}{3}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{f}_2 = \vec{O'B} &= \vec{O'O} + \vec{OB} = -\vec{OO'} + \vec{OB} \stackrel{(н)}{=} -\frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OB} = -\frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB} + \vec{OB} = -\frac{1}{3}\vec{OA} + \vec{OB} - \frac{1}{3}\vec{OB} = \\ &= -\frac{1}{3}\vec{OA} + (1 - \frac{1}{3})\vec{OB} = -\frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB} = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Матрица преласка с базе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ на базу $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ је $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

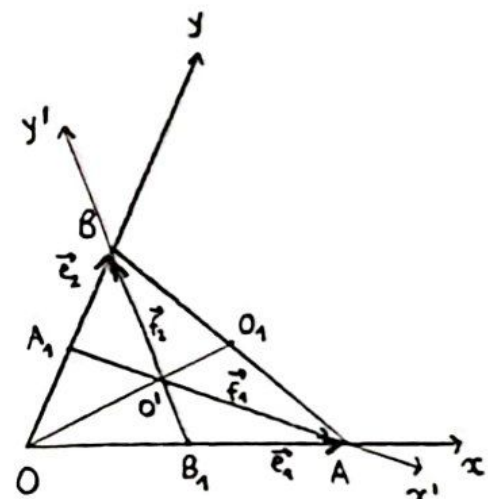
координате вектора $\vec{f}_1$ у бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ координате вектора $\vec{f}_2$ у бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

Нађимо сада координате новог координатног почетка O' у старој бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, тј. координате вектора $\vec{OO'}$.
 $\vec{OO'} \stackrel{(н)}{=} \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2$

Тражена веза координата (x, y) и (x', y') је $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
 ← координате новог координатног почетка O' у старој бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Означимо са O_1, A_1 и B_1 средишта страница AB, OB и OA троугла OAB , редом,

На основу напомене после 1.4 задатка за средиште O_1 странице AB важи $\vec{O'O_1} = \frac{1}{2}\vec{O'A} + \frac{1}{2}\vec{O'B} = \frac{1}{2}\vec{f}_1 + \frac{1}{2}\vec{f}_2$ јер је $\frac{AO_1}{O_1B} = 1$, те су координате средишта O_1 странице AB троугла OAB у односу на репер $O'x'y'$ једнаке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

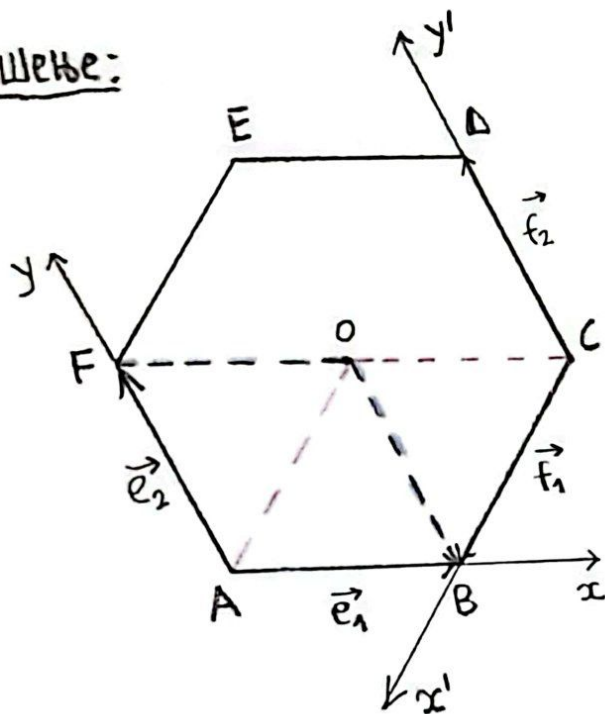


Како је тачка O' тежиште троугла OAB , то важи $\frac{\overrightarrow{AO'}}{\overrightarrow{O'A_1}} = 2$, те је $\overrightarrow{O'A_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AO'} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{O'A} = -\frac{1}{2} \vec{f}_1 = -\frac{1}{2} \vec{f}_1 + 0 \cdot \vec{f}_2$, те су координате средишта A_1 странице OB у односу на репер $O'x'y'$ једнаке $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Како је тачка O' тежиште троугла OAB , то важи $\frac{\overrightarrow{BO'}}{\overrightarrow{O'B_1}} = 2$, те је $\overrightarrow{O'B_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BO'} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{O'B} = -\frac{1}{2} \vec{f}_2 = 0 \cdot \vec{f}_1 - \frac{1}{2} \vec{f}_2$, те су координате средишта B_1 странице OA у односу на репер $O'x'y'$ једнаке $(0, -\frac{1}{2})$.

3.2. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао. Репер Ax има координатне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AF}$, а репер $Cx'y'$ координатне векторе $\vec{f}_1 = \vec{CB}$, $\vec{f}_2 = \vec{CD}$. Одредити формуле које представљају везу координата (x, y) и (x', y') , њима инверзне формуле, као и координате темена шестоугла у оба репера.

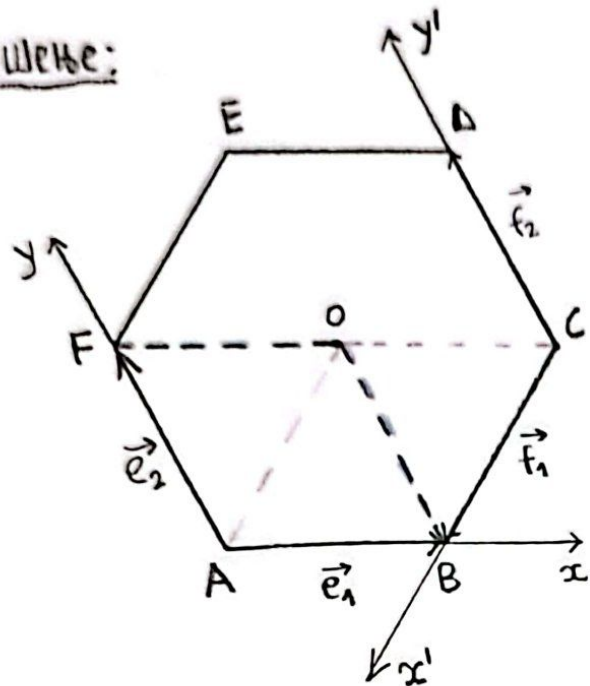
Решење:



Координатни вектори у старом реперу Ax су $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \vec{AF}$ (Ax и Ay су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \vec{AF}$ као на слици лево).

Координатни вектори у новом реперу $Cx'y'$ су $\vec{f}_1 = \vec{CB}$ и $\vec{f}_2 = \vec{CD}$ (Cx' и Cy' су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{f}_1 = \vec{CB}$ и $\vec{f}_2 = \vec{CD}$ као на слици лево).

Решење:



Координатни вектори у старом реперу Axy су $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \vec{AF}$ (Ax и Ay су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \vec{AF}$ као на слици лево).

Координатни вектори у новом реперу $Cx'y'$ су $\vec{f}_1 = \vec{CB}$ и $\vec{f}_2 = \vec{CD}$ (Cx' и Cy' су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{f}_1 = \vec{CB}$ и $\vec{f}_2 = \vec{CD}$ као на слици лево).

Потребно је да изразимо нове координатне векторе $\vec{f}_1 = \vec{CB}$ и $\vec{f}_2 = \vec{CD}$ преко старих координатних вектора $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \vec{AF}$ да бисмо нашли везу између старих координата (x, y) и нових координата (x', y') . То радимо користећи својства сабирања вектора и супротног вектора.

$$\vec{f}_1 = \vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CF} + \vec{FA} + \vec{AB} = -\vec{FC} - \vec{AF} + \vec{AB} = -2\vec{AB} - \vec{AF} + \vec{AB} = -\vec{AB} - \vec{AF} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

Тачка A је почетак вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, а F је крајња тачка вектора $\vec{e}_2$

$\vec{FC} = 2\vec{AB}$ јер су $\vec{FC}$ и $\vec{AB}$ истог правца и смера и FC је 2 пута дужа од дужи AB

Дакле, $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

$$\vec{f}_2 = \vec{CD} = \vec{AF} = \vec{e}_2$$

Вектори $\vec{CD}$ и $\vec{AF}$ су истог правца, смера и интензитета.

Поновимо формулу са предавања и вежби о трансформацији координата.

Ако је Axy стари репер са координатним векторима $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, а $Cx'y'$ нови репер са координатним векторима $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$, онда је веза између старих координата (x, y) и нових координата (x', y') дата помоћу формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Координате
првог новог
координатног
вектора $\vec{f}_1$
израженог
помоћу
вектора
 $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$
редом.

У овом
задатку
је $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$
те је $a_{11} = -1$
и $a_{21} = -1$

Координате
Другог новог
координатног
вектора $\vec{f}_2$
израженог
помоћу старих
координатних
вектора $\vec{e}_1$ и
 $\vec{e}_2$ редом.

У овом задатку
је $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$
те је $a_{12} = 0$ и
 $a_{22} = 1$.

Уочимо центар O датог правилног шестоугла
 $ABCDEF$. Троуглови OAB и OAF су једнако-
странични те је $\angle ABO = \angle AFO = 60^\circ$ и
 $\angle BAF = \angle BOF = 120^\circ$.

Координате
вектора $\vec{AC}$
(почетак старог
репера Axy је
тачка A , а почетак
новог репера $Cx'y'$
је точка C)
израженог помоћу
старих координатних
вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

У овом задатку
је $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} =$
 $= \vec{AB} - \vec{CB} = \vec{AB} - (-\vec{AB} - \vec{AF})$
 $= \vec{AB} + \vec{AB} + \vec{AF} =$
 $= 2\vec{AB} + \vec{AF} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ★
те је $b_1 = 2$ и $b_2 = 1$.

Како су наспрамни углови четвороугла $ABOF$ једнаки, то је он паралелограм. Слично је и четвороугао $ABCO$ паралелограм јер је $\angle OAB = \angle OCB = 60^\circ$ и $\angle ABC = \angle AOC = 120^\circ$ (централни углови $\angle FOA$, $\angle AOB$ и $\angle BOC$ правилног шестоугла једнаки су по 60°).

$$\text{Зато је } \vec{CB} = \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA} = \vec{FA} + \vec{BA} = -\vec{AF} - \vec{AB} = -\vec{AB} - \vec{AF}. \quad \#$$

Дакле, по наведеној формули за трансформацију координата, веза између старих и нових координата је:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \quad 2 \times 1 \leftarrow$ резултат множења ових матрица је матрица типа 2×1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x' + 0 \cdot y' \\ -1 \cdot x' + 1 \cdot y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' \\ -x' + y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' + 2 \\ -x' + y' + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x = -x' + 2 \\ y = -x' + y' + 1 \end{matrix}$$

Ово су тражене везе између старих и нових координата.

На основу њих налазимо тражене инверзне формуле, тако што x' и y' изражавамо преко x и y .

$$x = -x' + 2 \Rightarrow x' = -x + 2$$

$$y = -x' + y' + 1 \Rightarrow y' = y + x' - 1 \xrightarrow{\downarrow} y - x + 2 - 1 = -x + y + 1$$

Инверзне формуле можемо написати и у облику матричне једнакости.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ -1 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Напишімо сада координате темена шестоугла у старом реперу Ax . Претпоставимо да треба да изразимо координате темена T . То су заправо координате вектора $\vec{AT}$ израженог преко координатних вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ репера Ax .

Теме шестоугла	Одговарајући вектор	Тражене координате темена у реперу Ax
A	$\vec{AA} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$	$(0, 0)$
B	$\vec{AB} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$	$(1, 0)$
C	$\vec{AC} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ изведено у $\star$	$(2, 1)$
D	$\vec{AD} = 2 \cdot \vec{BC} = 2 \cdot \vec{AO} =$ $= 2 \cdot (\vec{AB} + \vec{AF}) =$ $= 2\vec{AB} + 2 \cdot \vec{AF} =$ $= 2\vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2$	$(2, 2)$

E

$$\begin{aligned}
 \vec{AE} &= \vec{AF} + \vec{FE} = \\
 &= \vec{AF} + \vec{BC} = \vec{AF} - \vec{CB} = \\
 &= \vec{AF} - (-\vec{AB} - \vec{AF}) & (1,2) \\
 &\quad \uparrow \text{ доказано} \\
 &\quad \quad \quad \cup \neq \\
 &= \vec{AB} + 2\vec{AF} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2
 \end{aligned}$$

F

$$\vec{AF} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 \quad (0,1)$$

Таким образом, координаты вершин шестугольника в старом реперу Ax_1y_1 — $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(2,1)$, $D(2,2)$, $E(1,2)$ и $F(0,1)$.

Напишімо сада координате темена шестоугла у новом реперу $Sx'y'$. Како смо већ одредили координате темена шестоугла у старом реперу Axy и знамо везу између нових и старих координата, можемо на тај начин израчунати координате темена шестоугла у новом реперу $Sx'y'$.

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2 \\ y' &= -x + y + 1 \end{aligned} > \text{извели смо ове формуле}$$

Теме шестоугла	Координате темена у реперу Axy	Координате темена у реперу $Sx'y'$
A	$(0,0) \quad x=0 \quad y=0$	$x' = -0 + 2 = 2$ $y' = -0 + 0 + 1 = 1$ $(2,1)$
B	$(1,0) \quad x=1 \quad y=0$	$x' = -1 + 2 = 1$ $y' = -1 + 0 + 1 = 0$ $(1,0)$

C

$$(2, 1) \quad x=2 \quad y=1$$

$$x' = -2 + 2 = 0$$

$$y' = -2 + 1 + 1 = 0$$

$$(0, 0)$$

D

$$(2, 2) \quad x=2 \quad y=2$$

$$x' = -2 + 2 = 0$$

$$y' = -2 + 2 + 1 = 1$$

$$(0, 1)$$

E

$$(1, 2) \quad x=1 \quad y=2$$

$$x' = -1 + 2 = 1$$

$$y' = -1 + 2 + 1 = 2$$

$$(1, 2)$$

F

$$(0, 1) \quad x=0 \quad y=1$$

$$x' = -0 + 2 = 2$$

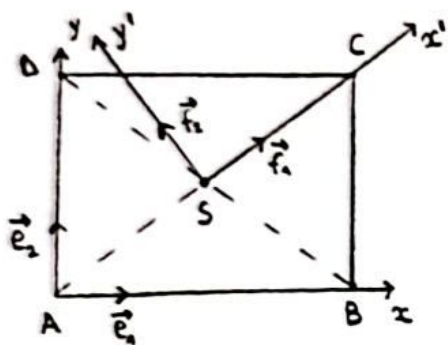
$$y' = -0 + 1 + 1 = 2$$

$$(2, 2)$$

Таким образом, координаты вершин шестугольника в Новом реперу (x', y') —
A(2, 1), B(1, 0), C(0, 0), D(0, 1), E(1, 2) и F(2, 2).

3.3. Дат је правоугаоник $ABCD$ чије ивице имају дужине $AB=4$, $BC=3$, а тачка S је центар тог правоугаоника. Дата су два ортонормирана репера, исте оријентације: репер Axy има x осу у правцу вектора $\vec{AB}$ и y осу у правцу вектора $\vec{AD}$, а репер $Sx'y'$ има x' осу у правцу вектора $\vec{SC}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') , као и координате темена правоугаоника у оба координатна репера.

Решење:



Означимо са $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ базне векторе у ортонормираном реперу Axy . Тада је $\|\vec{e}_1\|=\|\vec{e}_2\|=1$ и $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. Репер Axy има x осу у правцу вектора $\vec{AB}$, те је вектор $\vec{e}_1$ истог смера као $\vec{AB}$, а дужине 1, те је $\vec{e}_1 = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\vec{AB}}{4}$, а вектор y -осе је у правцу вектора $\vec{AD}$, те је вектор $\vec{e}_2$ истог смера као $\vec{AD}$, а дужине 1, те је $\vec{e}_2 = \frac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = \frac{\vec{AD}}{3}$. $\Rightarrow \vec{AB}=4\vec{e}_1$, $\vec{AD}=3\vec{e}_2$

$\|\vec{AB}\|=\|\vec{BC}\|=3$ јер је $ABCD$ правоугаоник

Означимо са $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ базне векторе у ортонормираном реперу $Sx'y'$. Тада је $\|\vec{f}_1\|=\|\vec{f}_2\|=1$ и $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$. Репер $Sx'y'$ има x' осу у правцу вектора $\vec{SC}$, те је вектор $\vec{f}_1 = \frac{\vec{SC}}{\|\vec{SC}\|}$

јер је $\|\vec{f}_1\|=1$.

$$\vec{SC} = \frac{1}{2} \vec{AC} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} = \frac{1}{2} \cdot 4\vec{e}_1 + \frac{1}{2} \cdot 3\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 \quad \#$$

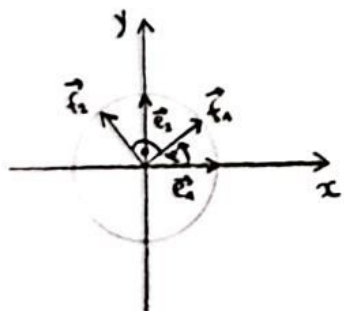
$$\|\vec{SC}\|^2 = \vec{SC} \cdot \vec{SC} = (2\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2) \cdot (2\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + 3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 3\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + \frac{9}{4}\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 4 \cdot \|\vec{e}_1\|^2 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + \frac{9}{4} \cdot \|\vec{e}_2\|^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{16}{4} + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \|\vec{SC}\| = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \vec{f}_1 = \frac{\vec{SC}}{\|\vec{SC}\|} = \frac{2\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}}\vec{e}_1 + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}\vec{e}_2 = \frac{4}{5}\vec{e}_1 + \frac{3}{5}\vec{e}_2$$

Вектор $\vec{f}_2$ је једнозначно одређен условима да је $Sx'y'$ ортонормиран репер исте оријентације као Axy . Замислимо да су почетне тачке вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ иста тачка. Приметимо да крајње тачке вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ припадају јединичној кружници јер важи $\|\vec{e}_1\|=\|\vec{e}_2\|=\|\vec{f}_1\|=\|\vec{f}_2\|=1$. Означимо са φ оријентисани угао од вектора $\vec{e}_1$ до вектора $\vec{f}_1$ у смеру кретања од $\vec{e}_1$ до $\vec{e}_2$. Тада је $\varphi + \frac{\pi}{2}$ оријентисани угао од вектора $\vec{e}_1$ до вектора $\vec{f}_2$. $\vec{f}_1 = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2$, а већ смо извели $\vec{f}_1 = \frac{4}{5}\vec{e}_1 + \frac{3}{5}\vec{e}_2 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{4}{5}, \sin \varphi = \frac{3}{5}$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ су базни вектори, те су

линеарно независни



$$\vec{f}_2 = \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) \vec{e}_1 + \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) \vec{e}_2 = -\sin\varphi \vec{e}_1 + \cos\varphi \vec{e}_2 = -\frac{3}{5} \vec{e}_1 + \frac{4}{5} \vec{e}_2$$

$$\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos\varphi \cos\frac{\pi}{2} - \sin\varphi \sin\frac{\pi}{2} = \cos\varphi \cdot 0 - \sin\varphi \cdot 1 = -\sin\varphi$$

$$\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \sin\varphi \cos\frac{\pi}{2} + \cos\varphi \sin\frac{\pi}{2} = \sin\varphi \cdot 0 + \cos\varphi \cdot 1 = \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \text{Матрица преласка са базе } \vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ на базу } \vec{f}_1, \vec{f}_2 \text{ је } \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Координате новог координатног почетка S у старој бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ су координате вектора $\vec{AS}$ у тој бази.

$$\vec{AS} = \frac{1}{2} \vec{AC} = \vec{SC} = 2\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2$$

$$\text{Тражена веза између координата } (x, y) \text{ и } (x', y') \text{ је } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Из курса Линеарна алгебра је познато да је матрица преласка с ортонормиране базе на ортонормирану базу ортогонална, а за ортогоналне матрице важи да је $A^{-1} = A^T$.

$$\text{Дакле, } \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{множимо ово слева са } \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{5} + \frac{9}{10} \\ -\frac{6}{5} + \frac{12}{10} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{16+9}{10} \\ -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{25}{10} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ су}$$

инверзне формуле трансформације.

Теме правоугаоника

Одговарајући вектор
са почетком АКоординате темена
у реперу АхуКоординате темена
у реперу $\{x'y'\}$

А

$$\vec{AA} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$$

$$A(0,0)$$

$$x=0 \quad y=0$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A(-\frac{5}{2}, 0)$$

В

$$\vec{AB} = 4\vec{e}_1 = 4 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$$

$$B(4,0)$$

$$x=4 \quad y=0$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{32-25}{10} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow B(\frac{7}{10}, -\frac{12}{5})$$

С

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

↑
правило паралелограма

$$C(4,3)$$

$$x=4 \quad y=3$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} + \frac{9}{5} \\ -\frac{12}{5} + \frac{12}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{25}{5} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C(\frac{5}{2}, 0)$$

D

$$\vec{AD} = 3\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

$$D(0,3)$$

$$x=0 \quad y=3$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{18-25}{10} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow D(-\frac{7}{10}, \frac{12}{5})$$

3.4. Дате су координате тачака $A(2,1)$, $B(3,0)$ и $C(1,4)$ у односу на афини репер Oxy у равни. У односу на нови афини репер $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(1,6)$, $B(1,9)$ и $C(3,1)$. Изразити координате (x,y) произвољне тачке M у реперу Oxy помоћу координата (x',y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$.

Решење: Формула која повезује старе и нове координате у афиним реперима Oxy и $O'x'y'$ редом су:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Циљ је да одредимо a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 и b_2 .

Тачка	Координате тачке у афиним реперу Oxy	Координате тачке у афиним реперу $O'x'y'$
A	$x=2 \quad y=1$	$x'=1 \quad y'=6$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_{11} + 6a_{12} + b_1 &= 2 & (1) \\ a_{21} + 6a_{22} + b_2 &= 1 & (2) \end{aligned}$$

B

$$x=3 \quad y=0$$

$$x'=1 \quad y'=9$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_{11} + 9a_{12} + b_1 &= 3 & (3) \\ a_{21} + 9a_{22} + b_2 &= 0 & (4) \end{aligned}$$

C

$$x=1 \quad y=4$$

$$x'=3 \quad y'=1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 3a_{11} + a_{12} + b_1 &= 1 & (5) \\ 3a_{21} + a_{22} + b_2 &= 4 & (6) \end{aligned}$$

Остало је још да решимо систем од 6 једначина са 6 непознатих.
Довољно је решити два система од 3 једначине са 3 непознате.

$$a_{11} + 6a_{12} + b_1 = 2 \quad (1) \quad | \cdot (-1)$$

$$a_{11} + 9a_{12} + b_1 = 3 \quad (3) \quad \leftarrow +$$

$$3a_{11} + a_{12} + b_1 = 1 \quad (5) \quad \leftarrow$$

$$a_{11} + 6a_{12} + b_1 = 2$$

$$3a_{12} = 1 \Rightarrow \boxed{a_{12} = \frac{1}{3}}$$

$$2a_{11} - 5a_{12} = -1 \quad \leftarrow$$

$$2 \cdot a_{11} - \frac{5}{3} = -1$$

$$2a_{11} = -1 + \frac{5}{3}$$

$$2a_{11} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{a_{11} = \frac{1}{3}}$$

$$a_{21} + 6a_{22} + b_2 = 1 \quad (2) \quad | \cdot (-1)$$

$$a_{21} + 9a_{22} + b_2 = 0 \quad (4) \quad \leftarrow +$$

$$3a_{21} + a_{22} + b_2 = 4 \quad (6) \quad \leftarrow +$$

$$a_{21} + 6a_{22} + b_2 = 1$$

$$3a_{22} = -1 \Rightarrow \boxed{a_{22} = -\frac{1}{3}}$$

$$2a_{21} - 5a_{22} = 3 \quad \leftarrow$$

$$2a_{21} + \frac{5}{3} = 3$$

$$2a_{21} = 3 - \frac{5}{3}$$

$$2a_{21} = \frac{9-5}{3}$$

$$2a_{21} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{a_{21} = \frac{2}{3}}$$

$$b_1 = 2 - a_{11} - 6a_{12}$$

$$b_1 = 2 - \frac{1}{3} - 6 \cdot \frac{1}{3}$$

$$b_1 = 2 - \frac{1}{3} - 2$$

$$\boxed{b_1 = -\frac{1}{3}}$$

$$b_2 = 1 - a_{21} - 6a_{22}$$

$$b_2 = 1 - \frac{2}{3} - 6 \cdot (-\frac{1}{3})$$

$$b_2 = \frac{1}{3} + 2$$

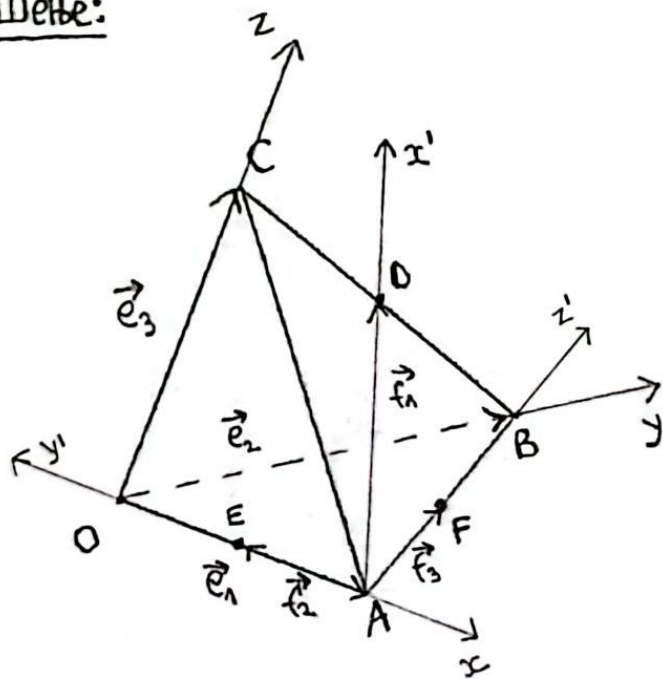
$$\boxed{b_2 = \frac{7}{3}}$$

Тако смо добили тражену везу између координата (x, y) произвољне тачке M у релеру Oxy и координата (x', y') те исте тачке у новом релеру $O'x'y'$ и она је дата формулом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

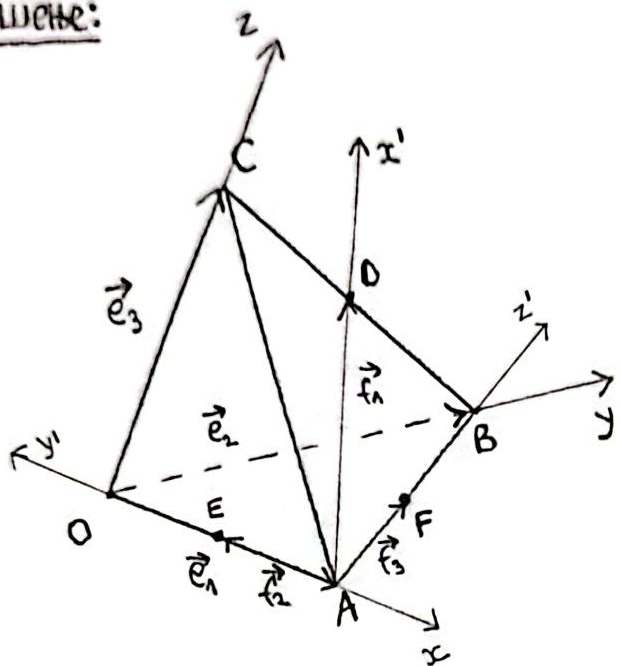
3.5. Дат је тетраедар $OABC$. Афини репер $Oxyz$ има почетак у темену O , а координатни вектори су $\vec{e}_1 = \vec{OA}$, $\vec{e}_2 = \vec{OB}$ и $\vec{e}_3 = \vec{OC}$. Афини репер $Ax'y'z'$ има почетак у темену A тетраедра, а његови координатни вектори су $\vec{f}_1 = \vec{AB}$, $\vec{f}_2 = \vec{AE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{AF}$, где су D, E и F средишта ивица BC, OA и AB . Изразити координате (x, y, z) произвољне тачке M у реперу $Oxyz$ помоћу координата (x', y', z') исте тачке у реперу $Ax'y'z'$. Одредити инверзне формуле као и координате темена тетраедра у односу на репер $Ax'y'z'$.

Решење:



Координатни вектори у старом реперу $Oxyz$ су $\vec{e}_1 = \vec{OA}$, $\vec{e}_2 = \vec{OB}$ и $\vec{e}_3 = \vec{OC}$. (Ox, Oy и Oz су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{e}_1 = \vec{OA}$, $\vec{e}_2 = \vec{OB}$ и $\vec{e}_3 = \vec{OC}$). Координатни вектори у новом реперу $Ax'y'z'$ су $\vec{f}_1 = \vec{AB}$, $\vec{f}_2 = \vec{AE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{AF}$ (Ax', Ay' и Az' су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{f}_1 = \vec{AB}$, $\vec{f}_2 = \vec{AE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{AF}$).

Решење:



Координатни вектори у старом реперу $Oxyz$ су $\vec{e}_1 = \vec{OA}$, $\vec{e}_2 = \vec{OB}$ и $\vec{e}_3 = \vec{OC}$.
(Ox , Oy и Oz су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{e}_1 = \vec{OA}$, $\vec{e}_2 = \vec{OB}$ и $\vec{e}_3 = \vec{OC}$). Координатни вектори у новом реперу $Ax'y'z'$ су $\vec{f}_1 = \vec{AB}$, $\vec{f}_2 = \vec{AE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{AF}$ (Ax' , Ay' и Az' су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{f}_1 = \vec{AB}$, $\vec{f}_2 = \vec{AE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{AF}$)

Потребно је да изразимо нове координатне векторе $\vec{f}_1 = \vec{AB}$, $\vec{f}_2 = \vec{AE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{AF}$ преко старих координатних вектора $\vec{e}_1 = \vec{OA}$, $\vec{e}_2 = \vec{OB}$ и $\vec{e}_3 = \vec{OC}$.

$$\vec{f}_1 = \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC} - \vec{OA} = -\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC} = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3$$

D је средиште дужи BC

D је по задатку (1.4)

$$\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC}$$

$$\vec{f}_2 = \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AO} = -\frac{1}{2}\vec{OA} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1$$

$$\vec{f}_3 = \vec{AF} = \vec{AO} + \vec{OF} = -\vec{OA} + \vec{OF} = -\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = -\frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$$

F је средиште дужи AB

$$\text{Дакле, } \vec{f}_1 = (-1) \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{1}{2} \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{f}_3 = -\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

Формула о трансформацији координата нам даје да ако је $Oxyz$ стари репер са координатним векторима $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, а $Ax'y'z'$ нови репер са координатним векторима $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ и $\vec{f}_3$, онда је веза између старих координата (x, y) и нових координата:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Координате првог
новог координатног
вектора $\vec{f}_1$ израженог
помоћу вектора
 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

$$\vec{f}_1 = (-1) \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow a_{11} = -1 \quad a_{21} = \frac{1}{2} \quad a_{31} = \frac{1}{2}$$

Координате
 $\vec{f}_2$ израженог
преко $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$

$$\vec{f}_2 = -\frac{1}{2} \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow a_{12} = -\frac{1}{2} \quad a_{22} = 0 \quad a_{32} = 0$$

Координате вектора
 $\vec{OA}$ (O је почетак
репера $Oxyz$, а A је
почетак репера $Ax'y'z'$)
преко $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.
 $\vec{OA} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \Rightarrow b_1 = 1 \quad b_2 = 0 \quad b_3 = 0$

Координате $\vec{f}_3$
израженог преко
 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$

$$\vec{f}_3 = -\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow a_{13} = -\frac{1}{2} \quad a_{23} = \frac{1}{2} \quad a_{33} = 0$$

Дакле, веза између координата (x, y, z) произвољне тачке M у реперу $Oxyz$ и координата (x', y', z') исте тачке у реперу $Ax'y'z'$ је:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x' - \frac{1}{2} \cdot y' - \frac{1}{2} \cdot z' \\ \frac{1}{2} \cdot x' + 0 \cdot y' + \frac{1}{2} \cdot z' \\ \frac{1}{2} \cdot x' + 0 \cdot y' + 0 \cdot z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 1 \\ y &= \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}z' \\ z &= \frac{1}{2}x' \end{aligned}$$

Набъиме сега инверзните формуле, т.е. изразиме x' , y' и z' преко x , y и z .

$$x = -x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}z'$$

$$z = \frac{1}{2}x' \Rightarrow \boxed{x' = 2z}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 2z + \frac{1}{2}z'$$

$$y = z + \frac{1}{2}z'$$

$$\frac{1}{2}z' = y - z$$

$$\boxed{z' = 2y - 2z}$$

$$x = -x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y' &= -x - x' - \frac{1}{2}z' + 1 = -x - 2z - \frac{1}{2} \cdot (2y - 2z) + 1 = -x - 2z - y + z + 1 \\ &= -x - y - z + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{y' = -2x - 2y - 2z + 2}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z \\ -2 \cdot x - 2y - 2z \\ 0 \cdot x + 2y - 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нађимо још координате темена тетраедра OABC у односу на репер $Ax'y'z'$.

Теме тетраедра

Координате темена
у реперу $Oxyz$

Координате темена
у реперу $Ax'y'z'$

O

$$\vec{OO} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

$$(0, 0, 0)$$

$$x=0 \quad y=0 \quad z=0$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A

$$\vec{OA} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

$$(1, 0, 0)$$

$$x=1 \quad y=0 \quad z=0$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B

$$\vec{OB} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

$$(0, 1, 0)$$

$$x=0 \quad y=1 \quad z=0$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

C

$$\vec{OC} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3$$

$$(0, 0, 1)$$

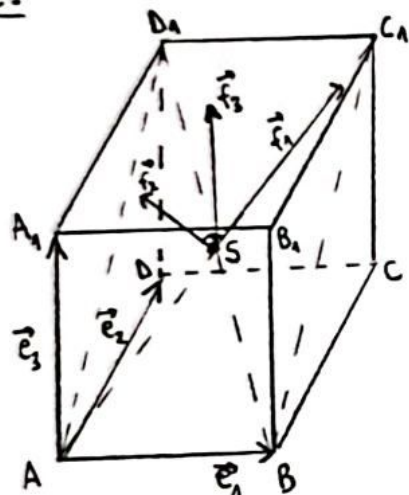
$$x=0 \quad y=0 \quad z=1$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3.6. Дата је коцка $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ ивице 1, са центром S . Ортонормирани репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$, $\vec{e}_3 = \vec{AA_1}$. У ортонормираном реперу $Sx'y'z'$ исте оријентације, дијагонална равна ABC_1D_1 има једначину $z'=0$, тачка C_1 је на позитивном делу x' осе, а тачка D_1 има позитивну x' и y' координату. Одредити формуле трансформација координата и координате темена коцке у ова репера.

Решење:



Означимо са $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ базне векторе ортонормираног репера $Sx'y'z'$. Тада је $\|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\| = \|\vec{f}_3\| = 1$ и $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2, \vec{f}_1 \perp \vec{f}_3, \vec{f}_2 \perp \vec{f}_3$. Тачка C_1 је на позитивном делу x' осе, те вектори $\vec{SC}_1$ и $\vec{f}_1$ имају исти смер. Како је $\vec{f}_1$ јединични вектор, то је $\vec{f}_1 = \frac{\vec{SC}_1}{\|\vec{SC}_1\|}$. Тачка S је центар коцке, те је S средиште просторне дијагонале AC_1 .

$$\Rightarrow \vec{SC}_1 = \frac{1}{2} \vec{AC}_1 = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC}_1) = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA}_1) = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AA}_1 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3 \quad *$$

$\vec{BC} = \vec{AD}$ јер је четворougао $ABCD$ квадрат (те је и паралелограм)

$$\vec{CC}_1 = \vec{BB}_1 = \vec{AA}_1$$

$\square BCC_1B_1$
је квадрат

$\square ABB_1A_1$
је квадрат

$$\|\vec{SC}_1\|^2 = \vec{SC}_1 \cdot \vec{SC}_1 = \left(\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3\right) = \frac{1}{4} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{4} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{4} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \frac{1}{4} \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{4} \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{4} \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \frac{1}{4} \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{4} \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{4} \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \|\vec{SC}_1\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{f}_1 = \frac{\vec{SC}_1}{\|\vec{SC}_1\|} = \frac{\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{e}_3$$

Пошто равна ABC_1D_1 има једначину $z'=0$, следи да за сваку тачку X равни ABC_1D_1 важи $\vec{SX} = x' \cdot \vec{f}_1 + y' \cdot \vec{f}_2 + 0 \cdot \vec{f}_3$ (јер услов да равна ABC_1D_1 има једначину $z'=0$ значи да свака тачка те равни има z' координату једнаку 0), тј. $\vec{SX} = x' \vec{f}_1 + y' \vec{f}_2$. Дакле, свака тачка равни ABC_1D_1 припада координатној равни $Sx'y'$, односно равни ABC_1D_1 и $Sx'y'$ су исте.

$$AB=1$$

$BC_1 = \sqrt{2}$ као дијагонала квадрата BCC_1A_1 ивице 1

$AB \perp BC$ јер је $ABCD$ квадрат
 $AB \perp BB_1$ јер је ABB_1A_1 квадрат
 $BC \cap BB_1 = \{B\}$

Кошијева
теорема

$$AB \perp (BCC_1A_1) \Rightarrow AB \perp BC_1 \xRightarrow{\text{Питагорина теорема}}$$

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC_1^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

Применом косинусне теореме на $\triangle C_1SD_1$ добијемо $1^2 = C_1D_1^2 = SC_1^2 + SD_1^2 - 2 \cdot SC_1 \cdot SD_1 \cdot \cos \angle C_1SD_1 =$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle C_1SD_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \cos \angle C_1SD_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos \angle C_1SD_1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \cos \angle C_1SD_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \angle C_1SD_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle C_1SD_1 \text{ је оштар}$$

$$SC_1 = \frac{AC_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$SD_1 = \frac{BD_1}{2} = \frac{AC_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Важи $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$ јер је репер $Sx'y'z'$ ортонормиран, а тачка D_1 има позитивну x' и y' координату по услови задатка. Нека је Y тачка таква да је $\vec{SY} = \vec{f}_2$. Тада је $SY \perp SC_1$ (јер су $\vec{f}_1$ и $\vec{SC}_1$ истог смера и $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$) и тачке Y и D_1 су с исте стране праве SC_1 да би тачка D_1 имала позитивну y' координату. Како је $\angle C_1SD_1 < 90^\circ = \angle C_1SY$, то се тачка D_1 налази унутар угла $\angle C_1SY$, те тачка D_1 заиста има позитивну x' и y' координату.

Вектор $\vec{f}_3$ је нормалан на $\vec{f}_1$ и на $\vec{f}_2$ јер је репер $Sx'y'z'$ ортонормиран, па је $\vec{f}_3$ нормалан на равни $ABCD_1$.

$\Rightarrow$ вектори $\vec{f}_3$ и $\vec{SC}_1 \times \vec{SD}_1$ имају исти правца, а и смер јер су ортонормирани репери $Axyz$ и $Sx'y'z'$ исте оријентације а базни вектори $\vec{e}_1 = \vec{AB}, \vec{e}_2 = \vec{AD}, \vec{e}_3 = \vec{AA_1}$ ортонормираног репера $Axyz$ чине позитивно оријентисану ортонормирану базу.

$$\Rightarrow \vec{SC}_1 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3$$

$$\vec{SD}_1 = \frac{1}{2} \vec{BD}_1 = \frac{1}{2} (\vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DD_1}) = \frac{1}{2} (-\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) = -\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AA_1} = -\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3$$

$\vec{DD_1} = \vec{AA_1}$ јер је ADD_1A_1 квадрат

$$\vec{SC}_1 \times \vec{SD}_1 = \left(\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3\right) \times \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3\right) = -\frac{1}{4} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + \frac{1}{4} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \frac{1}{4} \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 - \frac{1}{4} \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \frac{1}{4} \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + \frac{1}{4} \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 - \frac{1}{4} \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + \frac{1}{4} \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + \frac{1}{4} \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \frac{1}{4} \vec{e}_3 - \frac{1}{4} \vec{e}_2 + \frac{1}{4} \vec{e}_3 + \frac{1}{4} \vec{e}_1 - \frac{1}{4} \vec{e}_1 - \frac{1}{4} \vec{e}_1 = -\frac{1}{2} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_3 = \vec{AA_1} = \vec{AB} \times \vec{AD} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$$

$AA_1 \perp AB$ и $AA_1 \perp AD$ јер су ABB_1A_1 и ADD_1A_1 квадрати
 $\Rightarrow$ вектори $\vec{AA_1}$ и $\vec{AB} \times \vec{AD}$ су истог правца, а и смера на основу правила десне руке
 $\|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AD}\| \sin \angle(\vec{AB}, \vec{AD}) = 1 \cdot 1 \sin 90^\circ = 1 = \|\vec{AA_1}\|$

$$\|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\|^2 = (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = \left(-\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_3\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_3\right) = \frac{1}{4}\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 - \frac{1}{4}\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 - \frac{1}{4}\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{4}\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \vec{f}_3 = \frac{\vec{s}_1 \times \vec{s}_2}{\|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\|} = \frac{-\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_3$$

Да бисмо одредили вектор $\vec{f}_2$, искористимо то да је $Sx'y'z'$ ортонормиран репер позитивне оријентације, те је $\vec{f}_2 = \vec{f}_3 \times \vec{f}_1$ ($\vec{f}_2 \perp \vec{f}_3$, $\vec{f}_2 \perp \vec{f}_1$, $\|\vec{f}_3 \times \vec{f}_1\| = \|\vec{f}_3\| \cdot \|\vec{f}_1\| \sin \angle(\vec{f}_3, \vec{f}_1) = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1 = \|\vec{f}_2\|$ и због позитивне оријентације $\vec{f}_3 \times \vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ имају исти смер).

$$\vec{f}_2 = \vec{f}_3 \times \vec{f}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-\vec{e}_3) - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3 = -\frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}\vec{e}_3$$

Дакле, $\vec{f}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_3$, те је матрица преласка са базе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ на базу $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ једнака $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Нађимо координате новог координатног почетка S (тј. вектора $\vec{AS}$) помоћу старих базних вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

$$\vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AC}_1 = \vec{SC}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \text{Формуле трансформација координата су} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрица преласка с ортонормиране базе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ на ортонормирану базу $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ је ортогонална, те је

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

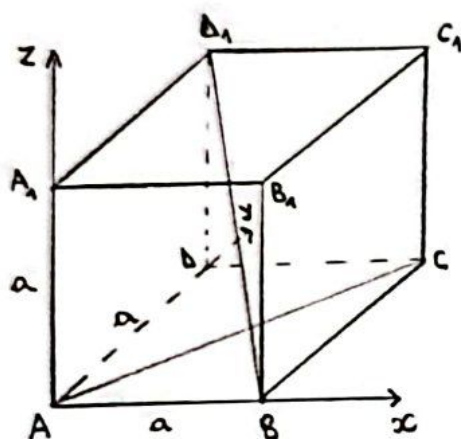
$$\text{Инверзне формуле трансформација координата су:} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{12} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Теме коцке	Одговарајући вектор са почетком А	Координате тачака у реперу Ахуz	Координате тачака у реперу Sx'y'z'
A	$\vec{AA} = \vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$	A(0,0,0) x=0 y=0 z=0	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y' = 0 \quad z' = 0 \Rightarrow A(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$
B	$\vec{AB} = \vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$	B(1,0,0) x=1 y=0 z=0	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x' = 0 \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad z' = 0 \Rightarrow B(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
C	$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$ правило паралелограма	C(1,1,0) x=1 y=1 z=0	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ $x' = 0 \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad z' = 0 \Rightarrow C(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
D	$\vec{AD} = \vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$	D(0,1,0) x=0 y=1 z=0	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ $x' = 0 \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad z' = 0 \Rightarrow D(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
A ₁	$\vec{AA_1} = \vec{e}_3 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$	A ₁ (0,0,1) x=0 y=0 z=1	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $x' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad z' = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
B ₁	$\vec{AB_1} = \vec{AB} + \vec{AA_1} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$ правило паралелограма	B ₁ (1,0,1) x=1 y=0 z=1	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow B_1(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
C ₁	$\vec{AC_1} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$	C ₁ (1,1,1) x=1 y=1 z=1	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow C_1(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
D ₁	$\vec{AD_1} = \vec{AD} + \vec{AA_1} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$ правило паралелограма	D ₁ (0,1,1) x=0 y=1 z=1	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow D_1(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

3.7. Дана је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивице a . Одредити а) угао између мимоилазних правих AC и BD_1 ; б) растојање између правих AC и BD_1 ; в) угао између праве AC и равни $\alpha = BCD_1$.

Решење:



Посматрајмо ортонормирани репер $Axyz$ такав да су тачке B, D и A_1 , редом на позитивном делу x -осе, y -осе и z -осе.

Тада су $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $D(0,a,0)$ и $A_1(0,0,a)$ координате ових тачака. Важи и $C(a,a,0)$, $D_1(0,a,a)$.

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{AC} &= [C] - [A] = (a, a, 0) - (0, 0, 0) = (a, a, 0) \\ \vec{BD_1} &= [D_1] - [B] = (0, a, a) - (a, 0, 0) = (-a, a, a) \\ \vec{AC} \cdot \vec{BD_1} &= (a, a, 0) \cdot (-a, a, a) = -a^2 + a^2 + 0 = 0 \\ \|\vec{AC}\| &= \sqrt{a^2 + a^2 + 0^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} \neq 0 \\ \|\vec{BD_1}\| &= \sqrt{(-a)^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \neq 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{BD_1} \\ \|\vec{AC}\| \\ \|\vec{BD_1}\| \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \angle(\vec{AC}, \vec{BD_1}) = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BD_1$$

Тражени угао између мимоилазних правих AC и BD_1 је 90° .

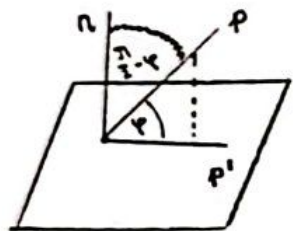
б) Растојање између правих AC и BD_1 може се израчунати по формули $d(AC, BD_1) = \frac{|[\vec{AC}, \vec{BD_1}, \vec{AB}]|}{\|\vec{AC} \times \vec{BD_1}\|}$.

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= [C] - [A] = (a, a, 0) - (0, 0, 0) = (a, a, 0) \quad \vec{BD_1} = [D_1] - [B] = (0, a, a) - (a, 0, 0) = (-a, a, a) \\ \|\vec{AC} \times \vec{BD_1}\| &= \left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix} \right\| = \|(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & a \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ -a & a \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ -a & a \end{vmatrix} \vec{e}_3\| \\ &= \|1 \cdot (a \cdot a - 0 \cdot a) \vec{e}_1 + (-1) \cdot (a \cdot a - (-a) \cdot 0) \vec{e}_2 + 1 \cdot (a \cdot a - (-a) \cdot a) \vec{e}_3\| \\ &= \|a^2 \vec{e}_1 - a^2 \vec{e}_2 + 2a^2 \vec{e}_3\| = \sqrt{(a^2)^2 + (-a^2)^2 + (2a^2)^2} = \sqrt{a^4 + a^4 + 4a^4} = \sqrt{6a^4} = a^2\sqrt{6} \\ |[\vec{AC}, \vec{BD_1}, \vec{AB}]| &= \left| \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ -a & a & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| = |(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & a \end{vmatrix} \cdot a + 0 + 0| = |(a \cdot a - a \cdot 0) \cdot a| = |a^2 \cdot a| = |a^3| = a^3 \end{aligned}$$

$$\vec{AB} = [B] - [A] = (a, 0, 0) - (0, 0, 0) = (a, 0, 0)$$

$$\text{Растојање између правих } AC \text{ и } BD_1 \text{ је } \frac{|[\vec{AC}, \vec{BD_1}, \vec{AB}]|}{\|\vec{AC} \times \vec{BD_1}\|} = \frac{a^3}{a^2\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

В) Угао φ између праве и равни је, по дефиницији, угао између праве и њене нормалне пројекције на ту раван. Ако у тачки продора посматране праве и равни уочимо нормалу на ту раван, онда је угао између посматране праве и нормале једнак $\frac{\pi}{2} - \varphi$.



Како су вектори $\vec{BC}$ и $\vec{BA}_1$ линеарно независни, то по дефиницији векторског производа следи да је $\vec{BC} \times \vec{BA}_1$ нормалан на равни BCD_1A_1 коју разапичу вектори $\vec{BC}$ и $\vec{BA}_1$.

$$\vec{BC} = [C] - [B] = (a, a, 0) - (a, 0, 0) = (0, a, 0)$$

$$\vec{BA}_1 = [A_1] - [B] = (0, 0, a) - (a, 0, 0) = (-a, 0, a)$$

$$\vec{BC} \times \vec{BA}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = (a \cdot a - 0 \cdot 0) \vec{e}_1 - (0 \cdot a - (-a) \cdot a) \vec{e}_2 + (0 \cdot 0 - (-a) \cdot a) \vec{e}_3 = a^2 \vec{e}_1 - a^2 \vec{e}_2 + a^2 \vec{e}_3 = (a^2, 0, a^2)$$

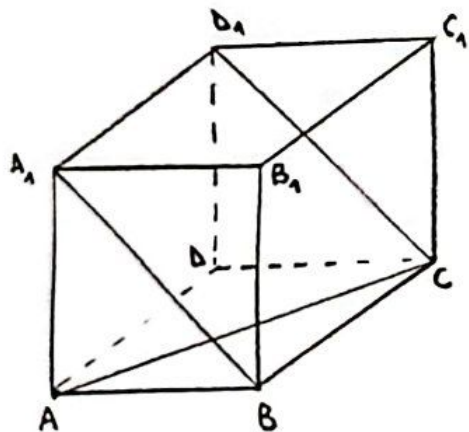
$$\vec{AC} = [C] - [A] = (a, a, 0) - (0, 0, 0) = (a, a, 0)$$

φ - угао између праве AC и равни BCD_1A_1

$$\sin \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{(\vec{BC} \times \vec{BA}_1) \cdot \vec{AC}}{\|\vec{BC} \times \vec{BA}_1\| \|\vec{AC}\|} = \frac{(a^2, 0, a^2) \cdot (a, a, 0)}{\sqrt{a^4 + 0 + a^4} \cdot \sqrt{a^2 + a^2 + 0}} = \frac{a^3 + 0 + 0}{\sqrt{2a^4} \cdot \sqrt{2a^2}} = \frac{a^3}{2a^3} = \frac{1}{2}$$

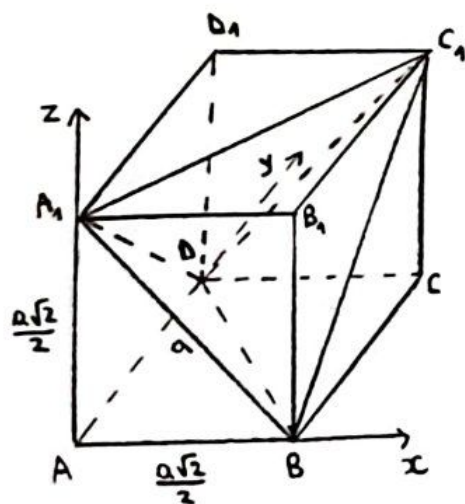
$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

Угао између праве AC и равни $\alpha = BCD_1A_1$ износи $\frac{\pi}{6}$.



- 3.8. У погодно одабраном ортонормираном реперу одредити координате темена а) правилног тетраедра ивице a ;
 б) правилног октаедра ивице a .

Решење: а) Плосни правилног тетраедра су једнакостранични троуглови, те није погодно бирати координатни систем код кога би координатни почетак било неко теме тетраедра, а једна од оса била у смеру ивице тетраедра јер остале две осе не би биле у смеру осталих ивица тетраедра. С друге стране, темена коцке имају погодне координате у координатном систему чији је координатни почетак неко теме коцке, а осе су у смеру ивица коцке које полазе из тог темена. Зато је циљ наћи четири темена коцке таква да она представљају и темена правилног тетраедра да бисмо у координатном систему коцке изразили координате темена тог тетраедра.



Приметимо да је A_1BC_1D правилни тетраедар чија су темена уједно и темена коцке $ABCD A_1B_1C_1D_1$.

$A_1B = BC_1 = A_1C_1 = BB_1 = C_1D = A_1D$ као дијагонале подударних квадрата који чине плосни коцке и да би њихова дужина била a , ивица коцке треба бити $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Посматрајмо ортонормиран репер $Axyz$, такав да тачке B, D и A_1 редом припадају позитивном делу x -осе, y -осе и z -осе.

$A_1(0, 0, \frac{a\sqrt{2}}{2})$, $B(\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$, $C_1(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2})$, $D(0, \frac{a\sqrt{2}}{2}, 0)$ су тражене координате темена правилног тетраедра ивице a у погодно одабраном ортонормираном реперу $Axyz$.

- б) Правилни октаедар је тело ограничено омотачима двеју правилних четвоространих пирамида (основа правилне четворостране пирамиде је квадрат, а подножје висине из врха пирамиде се поклапа са центром тог квадрата), које имају заједничку основу и бочна ивица једнака је основној ивици.

Како су дијагонале AC и BD квадрата $ABCD$ међусобно нормалне и подножја висина осе пирамиде чији омотачи ограничавају правилни октаедар се поклапају са пресечном тачком O тих дијагонала AC и BD , погодно је одабрати координатни систем $Oxyz$ коме је координатни почетак центар O квадрата $ABCD$ и тачке C, D и E припадају редом позитивном делу x -осе, y -осе и z -осе.

$$AB = BC = CD = AD = EA = EB = EC = ED = FA = FB = FC = FD = d$$

$$OA = OB = OC = OD = \frac{d\sqrt{2}}{2} \text{ као половине дијагонала квадрата } ABCD \text{ странице } d$$

$$\Rightarrow A(-\frac{d\sqrt{2}}{2}, 0, 0), B(0, -\frac{d\sqrt{2}}{2}, 0), C(\frac{d\sqrt{2}}{2}, 0, 0), D(0, \frac{d\sqrt{2}}{2}, 0) \text{ су координате 4 темена октаедра}$$

Применимо Питагорину теорему на правоугли троугао AOE ($EO \perp (ABCD)$ те је $EO \perp AO$).

$$OE = \sqrt{AE^2 - AO^2} = \sqrt{d^2 - (\frac{d\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{d^2 - \frac{2d^2}{4}} = \sqrt{\frac{2d^2}{4}} = \frac{d\sqrt{2}}{2} \Rightarrow E(0, 0, \frac{d\sqrt{2}}{2}) \text{ и}$$

$$F(0, 0, -\frac{d\sqrt{2}}{2}) \text{ су}$$

координате преостала два темена правилног октаедра

