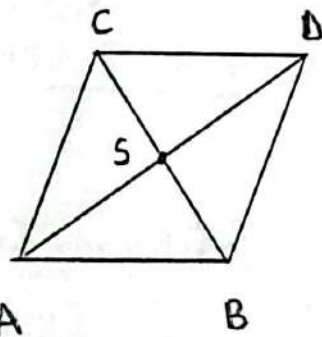


ВЕКТОРИ

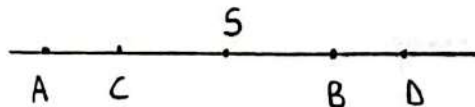
E - скуп тачака (дводимензионог или тродимензионог) еуклидског простора

$E \times E \leftarrow$ елементи овог Декартовог производа су двотачке

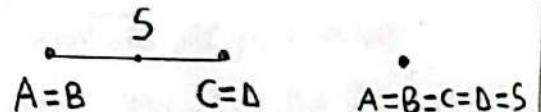
$(A, B) \in E \times E$ је у релацији еквиваленције са двотачком $(C, D) \in E \times E$, у ознаци $(A, B) \sim (C, D)$, уколико дужи AD и BC имају заједничко средиште.



$\square ABCD$ је паралелограм



$A \neq B$, A, B, C и D су
колинеарне



$A = B$
 $A \neq C$
 $C = D$

$A = B = C = D$

Релација еквиваленције је релација еквиваленције.

Вектор је класа еквиваленције при релацији еквиваленције.

$$\vec{AB} = \{ (x, y) \in E \times E : (x, y) \sim (A, B) \} \quad \text{вектор}$$

(A, B) је вектор представник вектора $\vec{AB}$

(A, A) је вектор представник нула вектора $\vec{0} = \vec{AA}$

Норма (дужина, интензитет) вектора $\vec{v}$ је ненегативан реални број $\|\vec{v}\|$ који је једнак дужини његовог вектора представника (A, B) , односно дужини дужи AB .

$$\|\vec{0}\| = 0$$

Само нула вектор $\vec{0}$ има норму 0. Сви остали вектори су ненула вектори и они поред норме имају и смер.

Вектори $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ су истог смера уколико су полуправе $[A, B)$ и $[C, D)$ паралелне.

Вектори $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ су истог правца уколико су праве AB и CD паралелне.

За векторе истог правца кажемо и да су колинеарни.

$\vec{0}$ је колинеаран са сваким вектором.

Вектори $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ су супротног смера ако су истог правца али не и истог смера.

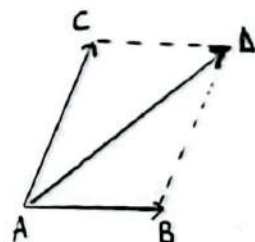
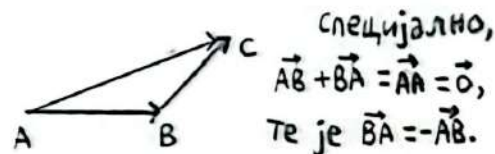
Ненула вектор је једнозначно одређен нормом и смером.

$\mathcal{V}$ - скуп свих вектора на еуклидском простору $\mathbb{E}$

Лема За сваку тачку $A \in \mathbb{E}$ и сваки вектор $\vec{v} \in \mathcal{V}$ постоји јединствена тачка $B \in \mathbb{E}$ таква да је $\vec{v} = \vec{AB}$



- Збир вектора $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$ је вектор $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$. (правило надовезивања)
- Збир неколинеарних вектора $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ је вектор $\vec{AD}$ при чему је тачка D четврто теме паралелограма $CABD$. (правило паралелограма)



- Умножник вектора $\vec{v} \in \mathcal{V}$ скаларом (бројем) $\lambda \in \mathbb{R}$ је вектор $\lambda \cdot \vec{v} \in \mathcal{V}$ чија норма износи $\|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$, док за $\vec{v} \neq \vec{0}$ важи да су вектори $\vec{v}$ и $\lambda \cdot \vec{v}$ истог смера у случају $\lambda > 0$, односно супротног смера у случају $\lambda < 0$.

The diagram shows a vector $\vec{v}$ pointing right. To its right, a vector $2 \cdot \vec{v}$ is shown, which is twice as long. Further right, a vector $-\frac{1}{2} \vec{v}$ is shown, which is half the length and points left. To the right of that, a vector $-\vec{v}$ is shown, which is the same length as $\vec{v}$ but points left. The text "супротан вектор вектору $\vec{v}$ " is written above $-\vec{v}$.
- За скуп ненула вектора $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq \mathcal{V}$ кажемо да је линеарно независан уколико $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$ за $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ повлачи $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. У супротном кажемо да је он линеарно зависан и тада се неки од вектора може изразити као линеарна комбинација осталих.
- Ако је вектор $\vec{v}$ могуће написати као $\vec{v} = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \dots + \beta_n \vec{v}_n$ и $\vec{v} = \gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_2 \vec{v}_2 + \dots + \gamma_n \vec{v}_n$, где је $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ линеарно независан скуп вектора, онда мора бити $\beta_1 = \gamma_1, \beta_2 = \gamma_2, \dots, \beta_n = \gamma_n$.

ГЕОМЕТРИЈА 1

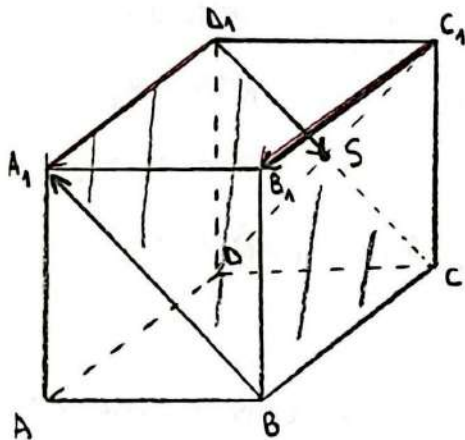
Задаци за вежбе

1. Линеарне операције са векторима

1.1. Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Да ли су вектори а) $\vec{BA_1}, \vec{C_1B_1}, \frac{1}{2}\vec{D_1C}$; б) $\vec{DD_1}, \vec{BC_1}, \vec{A_1D}$; в) $\vec{C_1B_1}, \vec{AB_1}, \vec{CD_1}$ компланарни?

Решење: Вектори $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ су компланарни ако постоји раван којој припадају неки представници вектора $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ (вектори су класе еквиваленције).

а) Посматрајмо $\vec{BA_1}, \vec{C_1B_1}$ и $\frac{1}{2}\vec{D_1C}$.



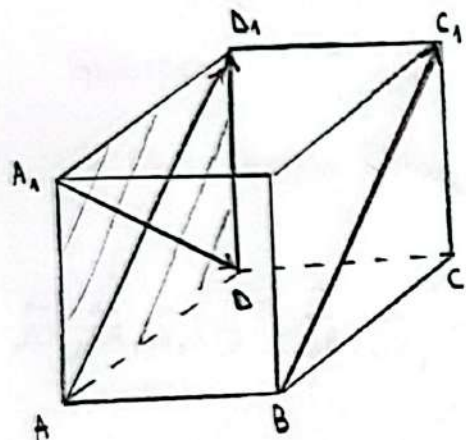
$\{S\} = CD_1 \cap DC_1 \Rightarrow$ Тачка S је средиште дужи CD_1 и DC_1 јер је четвороугао CC_1D_1D квадрат.

$\Rightarrow \vec{D_1S} = \frac{1}{2}\vec{D_1C}$ јер су $\vec{D_1S}$ и $\vec{D_1C}$ истог смера и дужина дужи D_1S је два пута мања од дужине дужи D_1C

$\vec{C_1B_1} = \vec{D_1A_1}$ јер је четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ квадрат, па се средишта дужи C_1A_1 и B_1D_1 поклапају

Представници $\vec{BA_1}, \vec{D_1A_1}$ и $\vec{D_1S}$ вектора $\vec{BA_1}, \vec{C_1B_1}$ и $\frac{1}{2}\vec{D_1C}$ припадају равни BCD_1A_1 , те су вектори $\vec{BA_1}, \vec{C_1B_1}$ и $\frac{1}{2}\vec{D_1C}$ компланарни.

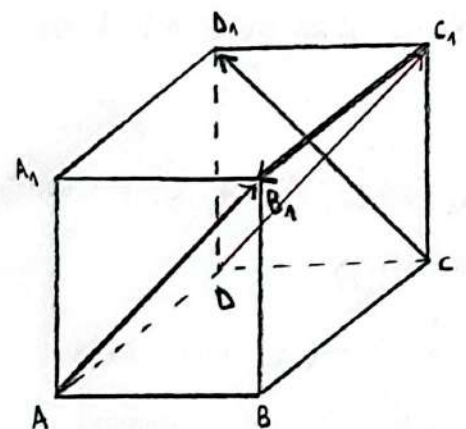
8) Посматрајмо векторе $\vec{DD_1}$, $\vec{BC_1}$ и $\vec{A_1D}$.



$\vec{BC_1} = \vec{AD_1}$ јер је четвороугао $AB C_1 D_1$ паралелограм,
($AB \parallel D_1 C_1$ и $AB = D_1 C_1$ као наспрамне ивице коцке)
те се средишта дужи BD_1 и $C_1 A$ поклапају

Представници $\vec{DD_1}$, $\vec{AD_1}$ и $\vec{A_1D}$ вектора $\vec{DD_1}$, $\vec{BC_1}$ и $\vec{A_1D}$ припадају
равни $AB D_1 A_1$, те су вектори $\vec{DD_1}$, $\vec{BC_1}$ и $\vec{A_1D}$ компланарни.

9) Посматрајмо векторе $\vec{C_1 B_1}$, $\vec{AB_1}$ и $\vec{CD_1}$.



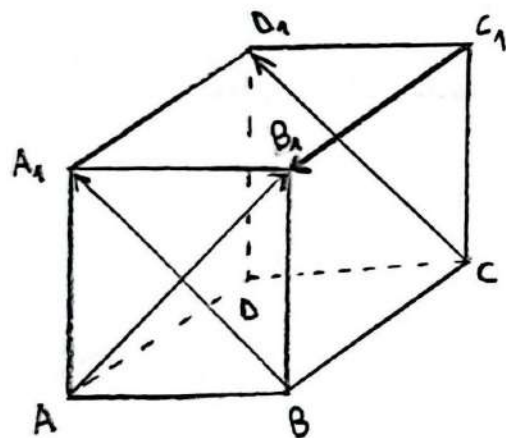
$\vec{AB_1} = \vec{DC_1}$ јер је четвороугао $AB C_1 D_1$ паралелограм
($AB \parallel D_1 C_1$ и $AB = D_1 C_1$ као наспрамне ивице коцке),
те се средишта дужи AC_1 и $B_1 D$ поклапају

Представници $\vec{DC_1}$ и $\vec{CD_1}$ вектора $\vec{AB_1}$ и $\vec{CD_1}$ припадају равни
 $CDD_1 C_1$, али $\vec{C_1 B_1}$ не припада тој равни, као што и ниједан
други представник тог вектора не припада равни $CDD_1 C_1$
јер су сви нормални на ту раван.

($C_1 B_1 \perp C_1 C$ јер је $D B C C_1 B_1$ квадрат и $C_1 B_1 \perp C_1 D_1$ јер је
 $D B_1 C_1 D_1 A_1$ квадрат, те је $C_1 B_1$ нормално на раван $CDD_1 C_1$
која је одређена помоћу правих $C_1 C$ и $C_1 D_1$)
 $\Rightarrow$ вектори $\vec{C_1 B_1}$, $\vec{AB_1}$ и $\vec{CD_1}$ нису компланарни.

B) Посматрамо векторе $\vec{C_1B_1}$, $\vec{AB_1}$ и $\vec{CB_1}$.

Вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ су некопланарни ако за $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ важи да из $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ следи $\alpha = \beta = \gamma = 0$, односно ако су вектори линеарно независни.



Представимо све векторе преко линеарно независних вектора $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ и $\vec{AA_1}$. ($\alpha_1\vec{AB} + \beta_1\vec{AD} + \gamma_1\vec{AA_1} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$)

$\vec{C_1B_1} = \vec{DA}$ јер је четвороугао C_1B_1AD паралелограм

($AD \parallel B_1C_1$ и $AD = B_1C_1$ као наспрамне ивице коцке), те се средишта дужи C_1A и B_1D

$$\vec{DA} = -\vec{AD}$$

поклапају

$$\Rightarrow \vec{C_1B_1} = -\vec{AD}$$

$\vec{BB_1} = \vec{AA_1}$ јер је $AB B_1 A_1$ квадрат као страна коцке

$$\vec{AB_1} = \vec{AB} + \vec{BB_1} = \vec{AB} + \vec{AA_1}$$

правило надовезивања

$$\vec{CB_1} = \vec{BA_1} = \vec{BA} + \vec{AA_1} = -\vec{AB} + \vec{AA_1}$$

јер је $BC B_1 A_1$ паралелограм ($A_1D_1 \parallel BC$ и $A_1D_1 = BC$ као наспрамне ивице коцке)

$$\alpha \cdot \vec{C_1B_1} + \beta \cdot \vec{AB_1} + \gamma \cdot \vec{CB_1} = \vec{0} \stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha \cdot (-\vec{AD}) + \beta \cdot (\vec{AB} + \vec{AA_1}) + \gamma \cdot (-\vec{AB} + \vec{AA_1}) = \vec{0}$$

$$\underline{-\alpha \cdot \vec{AD}} + \underline{\beta \vec{AB}} + \beta \vec{AA_1} - \underline{\gamma \vec{AB}} + \gamma \vec{AA_1} = \vec{0}$$

$$(\beta - \gamma) \vec{AB} + (-\alpha) \vec{AD} + (\beta + \gamma) \vec{AA_1} = \vec{0} \Rightarrow$$

$\uparrow$
 $\vec{AB}, \vec{AD} \text{ и } \vec{AA_1}$
 су лінейно
 незалежны

$$\begin{array}{lll} \beta - \gamma = 0 & -\alpha = 0 & \beta + \gamma = 0 \end{array} \quad \textcircled{+} \quad \begin{array}{l} 2\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \beta = 0 \end{array}$$

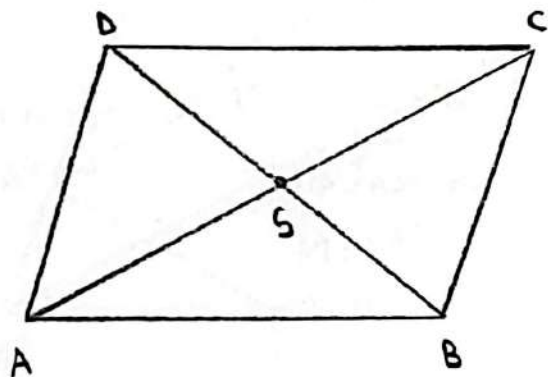
$\Downarrow$
 $\alpha = 0$

Како из $\alpha \cdot \vec{C_1B_1} + \beta \vec{AB_1} + \gamma \vec{CB_1} = \vec{0}$ следи $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то су вектори $\vec{C_1B_1}, \vec{AB_1}$ и $\vec{CB_1}$ некомпланарни.

1.2. Доказати да се дијагонале четвороугла полове ако и само ако је тај четвороугао паралелограм.

Решење ако и само ако $\Leftrightarrow$

$\Rightarrow$ Претпостављамо да се дијагонале AC и BD четвороугла $ABCD$ полове, тј. да пресечна тачка S дијагонала AC и BD представља заједничко средиште тих дијагонала. Доказујемо да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.



$\vec{AS} = \vec{SC}$ јер су $\vec{AS}$ и $\vec{SC}$ истог смера и интензитета
(дужи AS и SC су једнаке јер је S средиште AC)

$\vec{SB} = \vec{DS}$ јер су $\vec{SB}$ и $\vec{DS}$ истог смера и интензитета
(дужи SB и DS су једнаке јер је S средиште BD)

$\oplus$

$$\vec{AS} + \vec{SB} = \vec{SC} + \vec{DS}$$

$$\vec{AB} = \vec{DS} + \vec{SC}$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow AB \parallel DC$$

$$\vec{AS} = \vec{SC} \quad \vec{SB} = \vec{DS} \quad \text{тј.} \quad \vec{BS} = \vec{SD}$$

$$\Rightarrow \vec{AS} + \vec{SD} = \vec{SC} + \vec{BS}$$

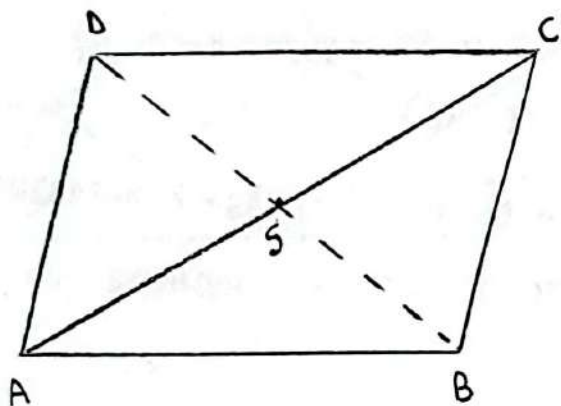
$$\vec{AD} = \vec{BS} + \vec{SC}$$

$$\vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow AD \parallel BC$$

$\Rightarrow$ $\square ABCD$ је паралелограм
по дефиницији
паралелограма

⌊ Претпостављамо да је четвороугао $ABCD$ паралелограм, тј. да су му наспрамне странице једнаке и паралелне, тј. $\vec{AB} = \vec{DC}$ и $\vec{BC} = \vec{AD}$. $\neq$

Доказујемо да се дијагонале AC и BD паралелограма $ABCD$ полове. Нека је тачка S средиште дијагонале AC . Тада је $\vec{AS} = \vec{SC}$.

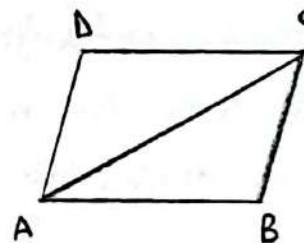


$$\vec{BS} = \vec{BA} + \vec{AS} = \vec{CD} + \vec{SC} = \vec{SC} + \vec{CD} = \vec{SD}$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \vec{BA} = \vec{CD}$$

$$\vec{AS} = \vec{SC}$$

Како је $\vec{BS} = \vec{SD}$, то су тачке B, S и D колинеарне и дужи BS и SD су једнаке, те тачка S мора бити средиште дијагонале BD , односно дијагонале AC и BD се полове.



По дефиницији паралелограма је $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$.

$\angle BAC = \angle DCA$
 $\angle BCA = \angle DAC$ $\rangle$ углови на трансверзали

$$AC = AC$$

$\Downarrow$ усу

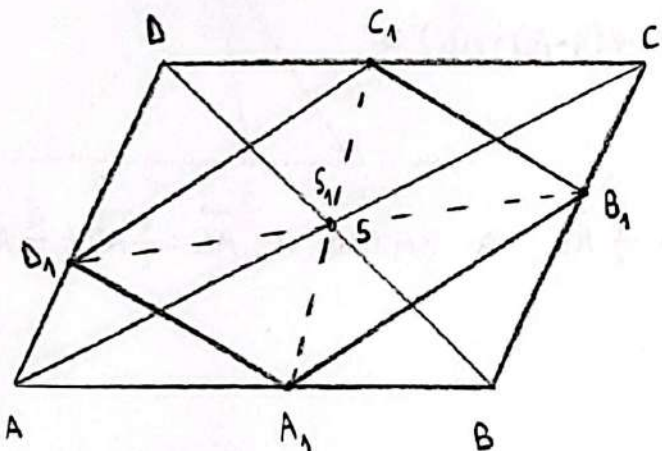
$$\triangle ABC \cong \triangle CDA \Rightarrow AB = DC$$

$$BC = AD$$

$\neq$

- 1.3. На страницама AB, BC, CD и AD паралелограма $ABCD$ дате су редом тачке A_1, B_1, C_1, D_1 тако да је $A_1B_1C_1D_1$ паралелограм. Доказати да се праве AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 секу у једној тачки.

Решење:



$\square ABCD$ је паралелограм $\stackrel{(1.2)}{\Rightarrow}$ Дијагонале AC и BD имају заједничко средиште S .

$\square A_1B_1C_1D_1$ је паралелограм $\stackrel{(1.2)}{\Rightarrow}$ Дијагонале A_1C_1 и B_1D_1 имају заједничко средиште S_1 .

Циљ је да докажемо да је $S = S_1$, а да бисмо то могли закључити довољно је доказати да је $\vec{AS} = \vec{AS_1}$.

Приметимо да су вектори $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ линеарно независни.

$$\vec{AS} = \frac{1}{2} \vec{AC} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} \stackrel{\square ABCD \text{ је паралелограм}}{=} \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD}$$

$\vec{AS}$ и $\frac{1}{2} \vec{AC}$ су истог смера и дужина дужи AS је једнака $\frac{1}{2}$ дужине дужи AC јер је S средиште дужи AC

$$\vec{AS_1} = \vec{AA_1} + \vec{A_1S_1}$$

$\vec{AA_1}$ и $\vec{AB}$ су колинеарни вектори $\Rightarrow \vec{AA_1} = \alpha \cdot \vec{AB}$

$\vec{AD_1}$ и $\vec{AD}$ су колинеарни вектори $\Rightarrow \vec{AD_1} = \beta \cdot \vec{AD}$

$\vec{A_1S_1} = \frac{1}{2} \vec{A_1C_1}$ јер је S_1 средиште дужи A_1C_1

$$\vec{A_1C_1} = \vec{A_1D_1} + \vec{D_1C_1}$$

$$\vec{A_1D_1} = \vec{A_1A} + \vec{AD_1} = -\vec{AA_1} + \beta \cdot \vec{AD} = -\alpha \cdot \vec{AB} + \beta \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{D_1C_1} = \vec{D_1D} + \vec{DC_1} = \vec{AD} - \vec{AD_1} + \gamma \cdot \vec{AB} = \vec{AD} - \beta \cdot \vec{AD} + \gamma \cdot \vec{AB} = \gamma \cdot \vec{AB} + (1-\beta) \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{DC_1} \text{ и } \vec{DC} \text{ су колинеарни вектори} \Rightarrow \vec{DC_1} = \gamma \cdot \vec{DC} = \gamma \cdot \vec{AB}$$

$\square ABCD$ је паралелограм

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{A_1S_1} &= \frac{1}{2} \vec{A_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A_1D_1} + \vec{D_1C_1}) = \frac{1}{2} (-\alpha \cdot \vec{AB} + \beta \cdot \vec{AD} + \gamma \cdot \vec{AB} + (1-\beta) \cdot \vec{AD}) = \\ &= \frac{\gamma-\alpha}{2} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{AS_1} = \vec{AA_1} + \vec{A_1S_1} = \alpha \cdot \vec{AB} + \frac{\gamma-\alpha}{2} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} = \frac{\gamma+\alpha}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} \quad \text{а имамо и } \vec{AS} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD}$$

$$\square A_1B_1C_1D_1 \text{ је паралелограм} \Rightarrow \vec{D_1C_1} = \vec{A_1B_1}$$

$$\vec{D_1C_1} = \gamma \cdot \vec{AB} + (1-\beta) \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{A_1B_1} = \vec{A_1B} + \vec{BB_1} = \vec{AB} - \alpha \cdot \vec{AB} + \delta \cdot \vec{AD} = \vec{AB} - \alpha \cdot \vec{AB} + \delta \cdot \vec{AD} = (1-\alpha) \vec{AB} + \delta \vec{AD}$$

$$\vec{BB_1} \text{ и } \vec{BC} \text{ су колинеарни вектори} \Rightarrow \vec{BB_1} = \delta \cdot \vec{BC} = \delta \cdot \vec{AD}$$

$\square ABCD$ је паралелограм

$$\gamma \cdot \vec{AB} + (1-\beta) \cdot \vec{AD} = (1-\alpha) \vec{AB} + \delta \vec{AD}$$

$$(\gamma+\alpha-1) \cdot \vec{AB} + (1-\beta-\delta) \cdot \vec{AD} = \vec{0} \Rightarrow$$

$\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ су линеарно независни

$$\gamma+\alpha-1=0$$

$$1-\beta-\delta=0$$

$$\gamma+\alpha=1$$

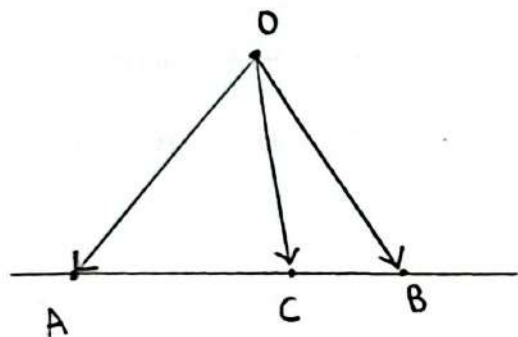
$$\beta+\delta=1$$

$$\vec{AS_1} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} = \vec{AS} \Rightarrow S_1 = S$$

$\Rightarrow$ Пресечна тачка AS и BD се поклапа са пресечном тачком A_1C_1 и $B_1D_1 \Rightarrow$ Праве AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 се секу у једној тачки.

1.4. У односу на тачку O дати су вектори положаја $\vec{OA}, \vec{OB}$ тачака A и B ($A \neq B$). Изразити вектор положаја $\vec{OC}$ тачке C за коју је $\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{CB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Решење



правило надовезивања

$$\vec{OC} \stackrel{\downarrow}{=} \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{CB} = \vec{OA} + \lambda \cdot (\vec{CO} + \vec{OB}) = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{CO} + \lambda \cdot \vec{OB}$$

$\uparrow$ $\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{CB}$
 $\uparrow$ $\vec{CB} = \vec{CO} + \vec{OB}$
по правилу надовезивања

$$\vec{OC} - \lambda \cdot \vec{CO} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB}$$

$$\Downarrow -\vec{CO} = \vec{OC}$$

$$\vec{OC} + \lambda \cdot \vec{OC} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB}$$

$$(1 + \lambda) \cdot \vec{OC} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB}$$

Ако би $1 + \lambda = 0$, онда би $\lambda = -1$, те би $\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{CB} = -\vec{CB} = \vec{BC}$, што би значило да се тачке A и B поклапају, али то је у контрадикцији са условом задатка $A \neq B$.

Дакле, $1 + \lambda \neq 0$, те смо делимо са $1 + \lambda$.

$$(1 + \lambda) \vec{OC} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB} \quad / : (1 + \lambda)$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{1 + \lambda} \cdot \vec{OA} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot \vec{OB} \quad \text{је тражено изражавање}$$

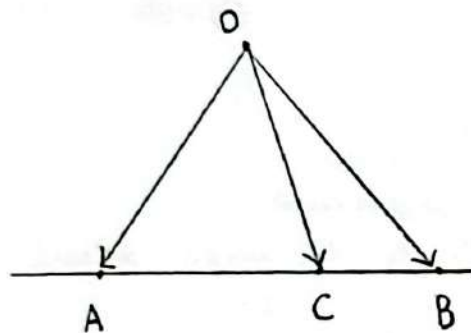
вектора положаја $\vec{OC}$ тачке C

Пример C - средиште дужи AB , тј. $\vec{AC} = 1 \cdot \vec{CB}$

Тада би било $\vec{OC} = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB}$.

- 1.5. Дате су неколинеарне тачке A, B и O . Тачка C одређена са $\vec{OC} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB}$ припада правој AB ако и само ако важи $\alpha + \beta = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, тада тачка C припада дужи AB . Доказати.

Решење:



Тачка C припада правој $AB \Leftrightarrow$ Тачке A, B и C су колинеарне.

$\Leftrightarrow$ Вектори $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ су колинеарни, односно линеарно зависни.

$\Leftrightarrow \vec{AC} = \gamma \cdot \vec{AB}, \gamma \in \mathbb{R}$

$\vec{AB} \neq \vec{0}$ јер су тачке A и B различите (зато што су тачке A, B и O неколинеарне, те све три морају бити међусобно различите)

Тачка C је одређена са $\vec{OC} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB}$.

$\Rightarrow$ Претпостављамо да тачка C припада правој AB , односно да је $\vec{AC} = \gamma \cdot \vec{AB}$, за неко $\gamma \in \mathbb{R}$.

Доказујемо да је $\alpha + \beta = 1$.

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \gamma \cdot \vec{AB} = \vec{OA} + \gamma \cdot (\vec{AO} + \vec{OB}) = \vec{OA} + \gamma \cdot \vec{AO} + \gamma \cdot \vec{OB} = \vec{OA} - \gamma \cdot \vec{OA} + \gamma \cdot \vec{OB} = (1-\gamma) \cdot \vec{OA} + \gamma \cdot \vec{OB} \\ &\quad \uparrow \text{правило} \quad \uparrow \vec{AC} = \gamma \cdot \vec{AB} \quad \uparrow \vec{AO} = -\vec{OA} \\ &\quad \text{надовезивања} \end{aligned}$$

Тачке A, B и O су неколинеарне тачке. $\Rightarrow$ Вектори $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ нису колинеарни, односно вектори $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ су линеарно независни.

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} &= \vec{OC} = (1-\gamma) \cdot \vec{OA} + \gamma \cdot \vec{OB} \Rightarrow (\alpha + \gamma - 1) \cdot \vec{OA} + (\beta - \gamma) \cdot \vec{OB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha + \gamma - 1 &= 0 & \beta - \gamma &= 0 \\ \alpha + \gamma &= 1 & \beta &= \gamma \end{aligned} \\ &\quad \swarrow \\ &\quad \alpha + \beta = 1 \text{ што се} \\ &\quad \text{и тражило} \end{aligned}$$

⊆ Претпостављамо да важи $\alpha + \beta = 1$, а доказујемо да тачка C одређена са $\vec{OC} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB}$ припада правој AB , односно да је $\vec{AC} = \gamma \cdot \vec{AB}$, за неко $\gamma \in \mathbb{R}$.

$$\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC} = \underbrace{-\vec{OA}}_{\vec{AO} = -\vec{OA}} + \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} = (\alpha - 1) \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} \stackrel{\substack{\alpha + \beta = 1 \\ \alpha - 1 = -\beta}}{=} -\beta \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} = \beta \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = \beta \cdot \vec{AB} \quad \text{и } \beta \in \mathbb{R}$$

Дакле, важи да је $\vec{AC} = \gamma \cdot \vec{AB}$ за $\gamma = \beta \in \mathbb{R}$.

Овим смо доказали: Тачка C одређена са $\vec{OC} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB}$ припада правој AB ако и само ако важи $\alpha + \beta = 1$.

Сада доказујемо да ако је $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, онда тачка C припада дужи AB .

Из доказа ⊆ видимо да из $\alpha + \beta = 1$ следи $\vec{AC} = \beta \cdot \vec{AB}$.

Како је $\beta \geq 0$, то су вектори $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$ истог смера, односно тачка C је на полуправој AB .

$$\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0 \Rightarrow \beta = 1 - \alpha \leq 1$$

$$\vec{AC} = \beta \cdot \vec{AB}$$

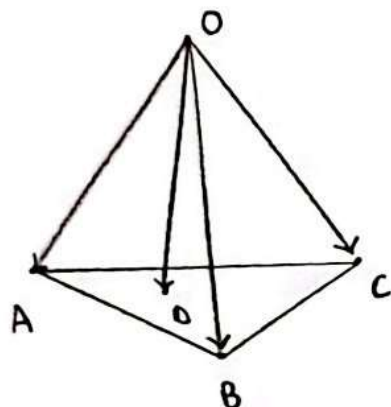
Како је $\beta \leq 1$, то је дужина дужи AC мања или једнака од дужине дужи AB .

⇓

Тачка C припада дужи AB ако је $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\vec{OC} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB}$.

1.6. Нека су O, A, B и C четири некомпланарне тачке. Да би тачка D одређена са $\vec{OD} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC}$ припадала равни троугла ABC , потребно је и довољно да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ и $\gamma \geq 0$, тада тачка D припада троуглу ABC . Доказати.

Решење:



Тачка D припада равни троугла $ABC \Leftrightarrow A, B, C$ и D су компланарне тачке
 $\Leftrightarrow$ Вектори $\vec{AB}, \vec{AC}$ и $\vec{AD}$ су компланарни вектори.

$\Leftrightarrow \vec{AD} = \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC}$, за неке $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

↑
 Како су тачке O, A, B и C некомпланарне тачке, онда су тачке A, B и C неколинеарне, те су вектори $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ линеарно независни.

Тачка D је одређена са $\vec{OD} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC}$.

$\Rightarrow$ Претпостављамо да тачка D припада равни троугла ABC , односно да је $\vec{AD} = \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC}$, за неке $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Доказујемо да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC} = \vec{OA} + \lambda \cdot (\vec{AO} + \vec{OB}) + \mu \cdot (\vec{AO} + \vec{OC}) = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{AO} + \lambda \cdot \vec{OB} + \mu \cdot \vec{AO} + \mu \cdot \vec{OC} =$$

↑
правило
надовезивања

↑
 $\vec{AD} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$

$$= \vec{OA} - \lambda \cdot \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{OB} - \mu \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OC} = (1 - \lambda - \mu) \cdot \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{OB} + \mu \cdot \vec{OC}$$

↑
 $\vec{AO} = -\vec{OA}$

По услови задатка, тачке O, A, B и C су некомпланарне, те су вектори $\vec{OA}, \vec{OB}$ и $\vec{OC}$ линеарно независни.

$$\alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} = \vec{OD} = (1 - \lambda - \mu) \cdot \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{OB} + \mu \cdot \vec{OC} \Rightarrow \alpha = 1 - \lambda - \mu \quad \beta = \lambda \quad \gamma = \mu$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 - \beta - \gamma \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ што се и тражило.}$$

⊆ Претпостављамо да важи $\alpha + \beta + \gamma = 1$, а доказујемо да тачка D припада равни троугла ABC, односно да је $\vec{AD} = \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC}$, за неке $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\vec{AD} = \vec{AO} + \vec{OD} = -\vec{OA} + \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} = (\alpha - 1) \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} = (-\beta - \gamma) \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} =$$

$$\vec{AO} = -\vec{OA}$$

$$\vec{OD} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\alpha - 1 = -\beta - \gamma$$

$$= -\beta \cdot \vec{OA} - \gamma \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} = \beta \cdot (-\vec{OA} + \vec{OB}) + \gamma \cdot (-\vec{OA} + \vec{OC}) = \beta \cdot (\vec{AO} + \vec{OB}) + \gamma \cdot (\vec{AO} + \vec{OC}) =$$

$$\vec{AO} = \vec{AO}$$

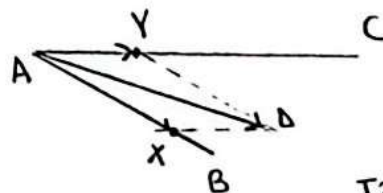
$$= \beta \cdot \vec{AB} + \gamma \cdot \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \vec{AD} = \beta \cdot \vec{AB} + \gamma \cdot \vec{AC} \text{ те је } \vec{AD} = \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC} \text{ за } \lambda = \beta \text{ и } \mu = \gamma, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Овим смо доказали: Да би тачка D одређена са $\vec{OD} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC}$ припала равни троугла ABC, потребно је и довољно да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Сада доказујемо да ако је $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\gamma \geq 0$, онда тачка D припада троуглу ABC.

У доказу ⊆ смо из $\alpha + \beta + \gamma = 1$ закључили да је $\vec{AD} = \beta \cdot \vec{AB} + \gamma \cdot \vec{AC}$, а како је $\beta \geq 0$ и $\gamma \geq 0$, то тачка D припада углу BAC.



$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\vec{AX} = \beta \cdot \vec{AB} \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

$$\vec{AY} = \gamma \cdot \vec{AC} \quad 0 \leq \gamma \leq 1$$

$$\vec{AD} = \beta \cdot \vec{AB} + \gamma \cdot \vec{AC} = \vec{AX} + \vec{AY}$$

Тачка D је таква да је четвороугао AXDY паралелограм $\Rightarrow D \in$ угла BAC

Слично се изводе једнакости $\vec{BD} = \alpha \cdot \vec{BA} + \gamma \cdot \vec{BC}$ и $\vec{CD} = \alpha \cdot \vec{CA} + \beta \cdot \vec{CB}$.

$$\begin{aligned}\vec{BD} &= \vec{BO} + \vec{OD} = -\vec{OB} + \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} \\ &= \alpha \cdot \vec{OA} + (\beta - 1) \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} \\ &= \alpha \cdot \vec{OA} + (-\alpha - \gamma) \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} \\ &= \alpha \cdot \vec{OA} - \alpha \cdot \vec{OB} - \gamma \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} \\ &= \alpha \cdot (\vec{OA} - \vec{OB}) + \gamma \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) \\ &= \alpha \cdot \vec{BA} + \gamma \cdot \vec{BC}\end{aligned}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\beta - 1 = -\alpha - \gamma$$

$$\begin{aligned}\vec{CD} &= \vec{CO} + \vec{OD} = -\vec{OC} + \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} \\ &= \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + (\gamma - 1) \cdot \vec{OC} \\ &= \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + (-\alpha - \beta) \cdot \vec{OC} \\ &= \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} - \alpha \cdot \vec{OC} - \beta \cdot \vec{OC} \\ &= \alpha \cdot (\vec{OA} - \vec{OC}) + \beta \cdot (\vec{OB} - \vec{OC}) \\ &= \alpha \cdot \vec{CA} + \beta \cdot \vec{CB}\end{aligned}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\gamma - 1 = -\alpha - \beta$$

$$\left. \begin{aligned}\vec{BD} &= \alpha \cdot \vec{BA} + \gamma \cdot \vec{BC} \\ \alpha \geq 0, \gamma \geq 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Тачка } D \text{ мора бити у углу } ABC.$$

$$\left. \begin{aligned}\vec{CD} &= \alpha \cdot \vec{CA} + \beta \cdot \vec{CB} \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Тачка } D \text{ мора бити у углу } ACB.$$

Како је тачка D у сваком од унутрашњих углова троугла ABC , то она припада троуглу ABC (у овом задатку се под појмом троугао подразумева унија троугаоне линије и унутрашње области коју та троугаона линија ограничава).

1.7. У простору је dato n тачака $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) и тачка O . Тежиште тог скупа тачака је тачка T дефинисана са $\vec{OT} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{OA_i}$.

а) Доказати да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O .

Са T_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ означимо тежиште скупа тачака који настаје из датог скупа избацивањем тачке A_i .

б) Доказати да се све дужи $A_i T_i$ ($1 \leq i \leq n$) секу у тачки T и да је $\overline{A_i T} : \overline{T T_i} = (n-1) : 1$.

Решење: а) Да бисмо доказали да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O довољно је доказати да ако се уместо тачке O узме било која друга тачка O_1 , онда важи једнакост $\vec{O_1 T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{O_1 A_i}$.

$$\vec{O_1 T} = \vec{O_1 O} + \vec{OT} = \vec{O_1 O} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{OA_i} = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \vec{O_1 O} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{OA_i} = \frac{1}{n} \cdot (n \cdot \vec{O_1 O} + \sum_{i=1}^n \vec{OA_i}) =$$

↑
правило
надовезивања

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \vec{O_1 O} + \sum_{i=1}^n \vec{OA_i} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\vec{O_1 O} + \vec{OA_i}) \overset{\substack{\text{правило} \\ \text{надовезивања}}}{=} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{O_1 A_i}$$

Тиме смо доказали да је $\vec{O_1 T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{O_1 A_i}$, односно да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O .

б) По тексту задатка, тачка T_i је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n\}$.

(из скупа тачака $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ избацили смо тачку A_i)

O - произволна тачка простора

По дефиницији тежишта је $\vec{OT}_i = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{OA}_j$.

$$\begin{aligned} \vec{OT} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \vec{OA}_j = \frac{1}{n} \cdot (\vec{OA}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{OA}_j) = \frac{1}{n} \cdot \vec{OA}_i + \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{OA}_j = \frac{1}{n} \cdot \vec{OA}_i + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{OA}_j = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \vec{OA}_i + \frac{n-1}{n} \cdot \vec{OT}_i \quad (*) \end{aligned}$$

Како је $\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = \frac{1+n-1}{n} = \frac{n}{n} = 1$, $\frac{1}{n} \geq 0$ и $\frac{n-1}{n} \geq 0$

за $n \geq 2$, то на основу задатка (1.5.) важи да тачка T припада дужи $A_i T_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$\Rightarrow$ Све дужи $A_i T_i$ ($1 \leq i \leq n$) се секу у тачки T .

$$\begin{aligned} \vec{A_i T} &= \vec{OT} - \vec{OA_i} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{n} \cdot \vec{OA_i} + \frac{n-1}{n} \cdot \vec{OT}_i - \vec{OA_i} = (\frac{1}{n} - 1) \cdot \vec{OA_i} + \frac{n-1}{n} \cdot \vec{OT}_i = \\ &= \frac{1-n}{n} \cdot \vec{OA_i} + \frac{n-1}{n} \cdot \vec{OT}_i = -\frac{n-1}{n} \cdot \vec{OA_i} + \frac{n-1}{n} \cdot \vec{OT}_i = \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot (\vec{OT}_i - \vec{OA_i}) = \frac{n-1}{n} \cdot \vec{A_i T_i} \end{aligned}$$

$$\vec{TT_i} = \vec{A_i T_i} - \vec{A_i T} = \vec{A_i T_i} - \frac{n-1}{n} \cdot \vec{A_i T_i} = (1 - \frac{n-1}{n}) \cdot \vec{A_i T_i} = \frac{1}{n} \cdot \vec{A_i T_i}$$

$$\Rightarrow \vec{A_i T} : \vec{TT_i} = (\frac{n-1}{n} \vec{A_i T_i}) : (\frac{1}{n} \vec{A_i T_i}) = (n-1) : 1$$

Подсетник (задаток (1.5))

.0

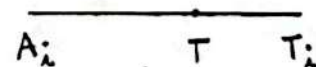
O, A_i, T_i су

неколинеарне тачке

(тачку O смо на

почетку бирали

да је произволна, а нека сада $O \in A_i T_i$)



тачка T одређена са $\vec{OT} = \alpha \cdot \vec{OA_i} + \beta \cdot \vec{OT_i}$

припада правој $A_i T_i$ ако и само ако

важи $\alpha + \beta = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0$ и

$\beta \geq 0$, тада тачка T припада дужи $A_i T_i$.

$$\alpha = \frac{1}{n} \quad \beta = \frac{n-1}{n} \quad \alpha + \beta = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{n} \geq 0 \quad \beta = \frac{n-1}{n} \geq 0 \text{ јер је } n \geq 2$$

+

1.8. Скицирати и доказати Задатак 1.7. за $n=2,3$ у равни и $n=4$ у простору.

Решење: Присетимо се текста задатка 1.7.

У простору је дато n тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) и тачка O . Тежиште тог скупа тачака је тачка T дефинисана са

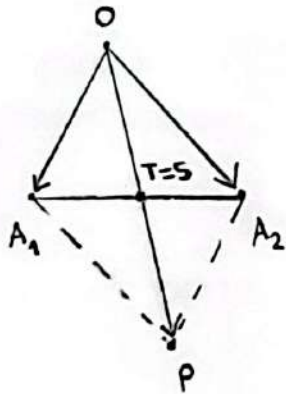
$$\vec{OT} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{OA_i}.$$

Доказати да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O .

Са T_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ означимо тежиште скупа тачака који настаје из датог скупа избацавањем тачке A_i .

Доказати да се све дужи $A_i T_i$ ($1 \leq i \leq n$) секу у тачки T и да је $\vec{A_i T} : \vec{T T_i} = (n-1):1$.

$n=2$



У простору су дате 2 тачке A_1 и A_2 . Дата је и тачка O . Оне су у равни.

Тежиште скупа $\{A_1, A_2\}$ је тачка T дефинисана са $\vec{OT} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \vec{OA_i} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2})$. Векторе $\vec{OA_1}$ и $\vec{OA_2}$ који имају заједничку почетну тачку

можемо сабрати помоћу правила паралелограма. По том правилу је $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} = \vec{OP}$ при чему је $\square O A_1 P A_2$ паралелограм.

$$\frac{1}{2} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2}) = \frac{1}{2} \cdot \vec{OP}$$

Означимо пресечну тачку дијагонала $A_1 A_2$ и OP са S .

Како је четвороугао $O A_1 P A_2$ паралелограм, онда је тачка S заједничко средиште дијагонала OP и $A_1 A_2$. $\Rightarrow OS = \frac{1}{2} OP$

$$\vec{OS} = \frac{1}{2} \cdot \vec{OP} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2}) = \vec{OT} \Rightarrow S = T$$

Дакле, тежиште T скупа $\{A_1, A_2\}$ је заправо средиште дужи $A_1 A_2$.

Доказујемо да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O . Нека је O_1 произвољна тачка различита од тачке O . Желимо да докажемо да је $\vec{O_1T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \vec{O_1A_i} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{O_1A_1} + \vec{O_1A_2})$.

$$\vec{O_1T} = \vec{O_1O} + \vec{OT} = \vec{O_1O} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2}) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \vec{O_1O} + \vec{OA_1} + \vec{OA_2}) = \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\vec{O_1O} + \vec{O_1O}}_{\substack{\uparrow \\ \text{правило} \\ \text{надовезивања}}} + \underbrace{\vec{OA_1} + \vec{OA_2}}_{\substack{\uparrow \\ \vec{OT} = \frac{1}{2}(\vec{OA_1} + \vec{OA_2})}})$$

$$= \frac{1}{2} (\underbrace{\vec{O_1O} + \vec{OA_1}}_{\vec{O_1A_1}} + \underbrace{\vec{O_1O} + \vec{OA_2}}_{\vec{O_1A_2}}) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{O_1A_1} + \vec{O_1A_2})$$

$\uparrow$
 правило
 надовезивања

Дакле, дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O .

Са T_1 означавамо тежиште скупа тачака $\{A_2\}$.

$$\vec{OT_1} = \frac{1}{1} \cdot \sum_{i=1}^1 \vec{OA_i} = 1 \cdot \vec{OA_2} = \vec{OA_2} \Rightarrow T_1 = A_2$$

$\nwarrow$ из скупа $\{A_1, A_2\}$ избацујемо тачку A_1

Са T_2 означавамо тежиште скупа тачака $\{A_1\}$.

$$\vec{OT_2} = \frac{1}{1} \cdot \sum_{i=1}^1 \vec{OA_i} = 1 \cdot \vec{OA_1} = \vec{OA_1} \Rightarrow T_2 = A_1$$

$\nwarrow$ из скупа $\{A_1, A_2\}$ избацујемо тачку A_2

Приметимо да су све дужи A_iT_i ($i \in \{1, 2\}$), тј. дужи A_1T_1 и A_2T_2 заправо дуж A_1A_2 , а она садржи тачку T јер смо већ доказали да је тачка T средиште дужи A_1A_2 .

$$i=1 \quad \vec{A_1T} : \vec{TT_1} = \vec{A_1T} : \vec{TA_2} = 1:1 = (2-1):1 \qquad i=2 \quad \vec{A_2T} : \vec{TT_2} = \vec{A_2T} : \vec{TA_1} = 1:1 = (2-1):1$$

$$n=3$$

У равни дате су три тачке A_1, A_2, A_3 и тачка O . Тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, A_3\}$ је тачка T дефинисана са $\vec{OT} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \vec{OA_i} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3})$.

Доказујемо да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O . Да бисмо то доказали довољно је да докажемо да за произвољну тачку O_1 различиту од тачке O важи $\vec{O_1T} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{O_1A_1} + \vec{O_1A_2} + \vec{O_1A_3})$.

$$\vec{O_1T} = \vec{O_1O} + \vec{OT} = \vec{O_1O} + \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \vec{O_1O} + \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}) =$$

↑
правило
надовезивања

$$= \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot \vec{O_1O} + \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}) = \frac{1}{3} \cdot (\underbrace{\vec{O_1O} + \vec{O_1O} + \vec{O_1O}}_{\vec{O_1O} + \vec{O_1O} + \vec{O_1O}} + \underbrace{\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}}_{\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}}) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\underbrace{\vec{O_1O} + \vec{OA_1}}_{\vec{O_1A_1}} + \underbrace{\vec{O_1O} + \vec{OA_2}}_{\vec{O_1A_2}} + \underbrace{\vec{O_1O} + \vec{OA_3}}_{\vec{O_1A_3}}) = \frac{1}{3} \cdot (\vec{O_1A_1} + \vec{O_1A_2} + \vec{O_1A_3})$$

$$\Rightarrow \vec{O_1T} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{O_1A_1} + \vec{O_1A_2} + \vec{O_1A_3}) \Rightarrow \text{Дефиниција тачке } T \text{ не зависи од избора тачке } O.$$

Са T_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) означавамо тежиште скупа тачака који настаје из датог скупа тачака избацавањем тачке A_i .

T_1 је тежиште скупа тачака који настаје из скупа тачака $\{A_1, A_2, A_3\}$ избацавањем тачке A_1 , односно тачка T_1 је тежиште скупа тачака $\{A_2, A_3\}$. $\Rightarrow \vec{OT_1} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA_2} + \vec{OA_3})$
 $\Rightarrow \vec{OA_2} + \vec{OA_3} = 2 \cdot \vec{OT_1} \quad \#$

У случају $n=2$ смо већ доказали да је тежиште скупа од две различите тачке геометријски гледано средиште дужи коју одређују те две тачке.

Дакле, тачка T_1 је средиште дужи A_2A_3 .

T_2 је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_3\} \Rightarrow \vec{OT_2} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_3}) \Rightarrow \vec{OA_1} + \vec{OA_3} = 2 \cdot \vec{OT_2}$ ★
↖ настао је од датог скупа $\{A_1, A_2, A_3\}$ издвајањем тачке A_2 .

Дакле, тачка T_2 је средиште дужи A_1A_3 .

T_3 је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2\} \Rightarrow \vec{OT_3} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2}) \Rightarrow \vec{OA_1} + \vec{OA_2} = 2 \cdot \vec{OT_3}$?
↖ настао је од датог скупа $\{A_1, A_2, A_3\}$ издвајањем тачке A_3 .

Доказујемо да се све дужи A_iT_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ секу у тачки T и да је

$$\vec{A_iT} : \vec{TT_i} = (n-1):1 = (3-1):1 = 2:1$$

За $i=1$ доказујемо да тачка T припада дужи A_1T_1 и да је $\vec{A_1T} : \vec{TT_1} = 2:1$.

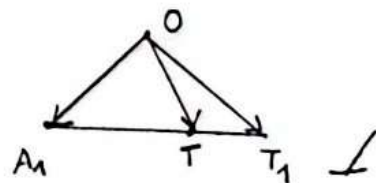
$$\vec{OT} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}) = \frac{1}{3} \cdot \vec{OA_1} + \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_2} + \vec{OA_3}) \stackrel{\#}{=} \frac{1}{3} \cdot \vec{OA_1} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \vec{OT_1} = \frac{1}{3} \vec{OA_1} + \frac{2}{3} \cdot \vec{OT_1}$$

* Подсетник (задатак (1.5.))

O, A_1 и T_1 су неколинеарне тачке и тачка T је одређена са $\vec{OT} = \alpha \cdot \vec{OA_1} + \beta \cdot \vec{OT_1}$.

Важи: тачка T припада правој $A_1T_1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$.

Ако важи $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, онда тачка T припада дужи A_1T_1 .

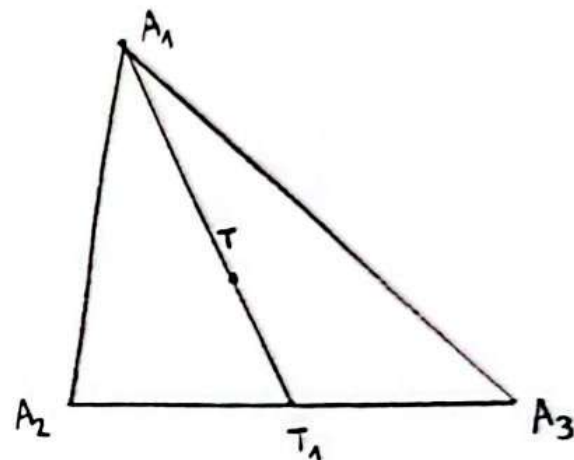


Како тачку O можемо изабрати произвољно, онда можемо узети да су тачке O, A_1 и T_1 неколинеарне.

$$\vec{OT} = \frac{1}{3} \vec{OA_1} + \frac{2}{3} \vec{OT_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{1}{3} \geq 0 \quad \frac{2}{3} \geq 0$$

$\Rightarrow$ тачка T припада дужи A_1T_1 .



Докажимо сада да је $\vec{A_1T} : \vec{TT_1} = 2:1$.

$$\vec{A_1T} = \vec{OT} - \vec{OA_1} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}) - \vec{OA_1} = \frac{1}{3} \cdot \vec{OA_1} + \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_2} + \vec{OA_3}) - \vec{OA_1} =$$

јер је $\vec{OA_1} + \vec{A_1T} = \vec{OT}$

$$\stackrel{\#}{=} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \cdot \vec{OA_1} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \vec{OT_1} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{OA_1} + \frac{2}{3} \cdot \vec{OT_1} = \frac{2}{3} \cdot (\vec{OT_1} - \vec{OA_1}) = \frac{2}{3} \cdot (\vec{OT_1} + \vec{A_1O}) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (\vec{A_1O} + \vec{OT_1}) = \frac{2}{3} \cdot \vec{A_1T_1}$$

$$\vec{TT_1} = \vec{A_1T_1} - \vec{A_1T} = \vec{A_1T_1} - \frac{2}{3} \cdot \vec{A_1T_1} = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \vec{A_1T_1} = \frac{1}{3} \cdot \vec{A_1T_1}$$

јер је $\vec{A_1T} + \vec{TT_1} = \vec{A_1T_1}$

$$\Rightarrow \vec{A_1T} : \vec{TT_1} = \left(\frac{2}{3} \cdot \vec{A_1T_1}\right) : \left(\frac{1}{3} \vec{A_1T_1}\right) = 2:1 \quad \text{што смо и желели да докажемо.}$$

Слично се доказује и да дужи A_2T_2 и A_3T_3 садрже тачку T и да је $\vec{A_2T} : \vec{TT_2} = 2:1$ и $\vec{A_3T} : \vec{TT_3} = 2:1$. Приметимо да тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, A_3\}$ геометријски представља тежиште троугла ABC .

Доказујемо да тачка Т припада дужи A_2T_2 .

$$\vec{OT} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}) = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_3}) + \frac{1}{3} \cdot \vec{OA_2} \stackrel{*}{=} \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \vec{OT_2} + \frac{1}{3} \cdot \vec{OA_2} = \frac{1}{3} \cdot \vec{OA_2} + \frac{2}{3} \vec{OT_2}$$

Како је тачка О произвољна, онда можемо изабрати О тако да су О, A_2 и T_2 неколинеарне тачке.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \frac{1}{3} \geq 0 \quad \frac{2}{3} \geq 0 \quad \Rightarrow \text{Тачка Т припада дужи } A_2T_2.$$

Докажимо сада да је $\vec{A_2T} : \vec{TT_2} = 2:1$.

$$\begin{aligned} \vec{A_2T} &= \vec{OT} - \vec{OA_2} = \frac{1}{3} \cdot \vec{OA_2} + \frac{2}{3} \vec{OT_2} - \vec{OA_2} = \frac{2}{3} \cdot \vec{OT_2} + \left(\frac{1}{3} - 1\right) \cdot \vec{OA_2} = \frac{2}{3} \cdot \vec{OT_2} - \frac{2}{3} \cdot \vec{OA_2} = \frac{2}{3} \cdot (\vec{OT_2} - \vec{OA_2}) = \\ &= \frac{2}{3} (\vec{OT_2} + \vec{A_2O}) = \frac{2}{3} \cdot (\vec{A_2O} + \vec{OT_2}) = \frac{2}{3} \cdot \vec{A_2T_2} \end{aligned}$$

$$\vec{TT_2} = \vec{TA_2} + \vec{A_2T_2} = \vec{A_2T_2} + \vec{TA_2} = \vec{A_2T_2} - \vec{A_2T} = \vec{A_2T_2} - \frac{2}{3} \cdot \vec{A_2T_2} = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \vec{A_2T_2} = \frac{1}{3} \vec{A_2T_2}$$

$$\Rightarrow \vec{A_2T} : \vec{TT_2} = \left(\frac{2}{3} \vec{A_2T_2}\right) : \left(\frac{1}{3} \vec{A_2T_2}\right) = 2:1$$

$\Rightarrow$ Тиме је доказано да тачка Т припада дужи A_2T_2 и да је $\vec{A_2T} : \vec{TT_2} = 2:1$.

Доказујемо да тачка Т припада дужи A_3T_3 .

$$\vec{OT} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}) = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2}) + \frac{1}{3} \vec{OA_3} \stackrel{**}{=} \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \vec{OT_3} + \frac{1}{3} \cdot \vec{OA_3} = \frac{1}{3} \cdot \vec{OA_3} + \frac{2}{3} \cdot \vec{OT_3}$$

Можемо изабрати тачку О тако да тачке О, A_3 и T_3 нису колинеарне.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \frac{1}{3} \geq 0 \quad \frac{2}{3} \geq 0 \quad \Rightarrow \text{Тачка Т припада дужи } A_3T_3.$$

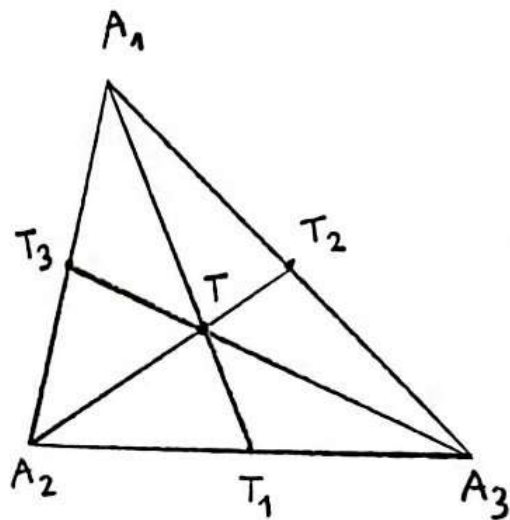
Докажимо сада да је $\vec{A_3T} : \vec{TT_3} = 2:1$.

$$\begin{aligned}\vec{A_3T} &= \vec{OT} - \vec{OA_3} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}) - \vec{OA_3} = \frac{1}{3} \cdot \vec{OA_3} + \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2}) - \vec{OA_3} \stackrel{Q}{=} (\frac{1}{3} - 1) \cdot \vec{OA_3} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \vec{OT_3} = \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \vec{OA_3} + \frac{2}{3} \cdot \vec{OT_3} = \frac{2}{3} \cdot (\vec{OT_3} - \vec{OA_3}) = \frac{2}{3} \cdot (\vec{OT_3} + \vec{A_3O}) = \frac{2}{3} \cdot (\vec{A_3O} + \vec{OT_3}) = \frac{2}{3} \cdot \vec{A_3T_3}\end{aligned}$$

$$\vec{TT_3} = \vec{TA_3} + \vec{A_3T_3} = -\vec{A_3T} + \vec{A_3T_3} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{A_3T_3} + \vec{A_3T_3} = (-\frac{2}{3} + 1) \cdot \vec{A_3T_3} = \frac{1}{3} \cdot \vec{A_3T_3}$$

$$\Rightarrow \vec{A_3T} : \vec{TT_3} = (\frac{2}{3} \vec{A_3T_3}) : (\frac{1}{3} \vec{A_3T_3}) = 2:1$$

$\Rightarrow$ Тиме смо доказали да тачка T припада A_3T_3 и да је $\vec{A_3T} : \vec{TT_3} = 2:1$.



$n=4$

У простору су дате 4 тачке A_1, A_2, A_3 и A_4 и тачка O . Тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ је тачка T дефинисана са $\vec{OT} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 \vec{OA_i} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4})$.

Доказујемо да дефиниције тачке T не зависи од избора тачке O . Да бисмо то доказали довољно је да докажемо да за произвољну тачку O_1 различиту од тачке O важи $\vec{O_1T} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{O_1A_1} + \vec{O_1A_2} + \vec{O_1A_3} + \vec{O_1A_4})$.

$$\vec{O_1T} = \vec{O_1O} + \vec{OT} = \vec{O_1O} + \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4}) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \vec{O_1O} + \frac{1}{4} (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4}) =$$

Правило

Надрезивања

$$= \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot \vec{OA_0} + \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4}) = \frac{1}{4} \cdot (\underbrace{\vec{OA_0}} + \underbrace{\vec{OA_0}} + \underbrace{\vec{OA_0}} + \underbrace{\vec{OA_0}} + \underbrace{\vec{OA_1}} + \underbrace{\vec{OA_2}} + \underbrace{\vec{OA_3}} + \underbrace{\vec{OA_4}})$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4})$$

$$\Rightarrow \vec{OA_T} = \frac{1}{4} (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4}) \Rightarrow \text{Дефиниција тачке Т не зависи од избора тачке О.}$$

Са T_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ означавамо тежиште скупа тачака који настаје из датог

скупна тачка $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ избацивањем тачке A_i .

(I)

T_1 је тежиште скупа тачака $\{A_2, A_3, A_4\}$ $\Rightarrow \vec{OT_1} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4}) \Rightarrow \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4} = 3 \cdot \vec{OT_1}$
 $\nwarrow$ из $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ се избацује тачка A_1

T_2 је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_3, A_4\} \Rightarrow \vec{OT}_2 = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA}_1 + \vec{OA}_3 + \vec{OA}_4) \Rightarrow \vec{OA}_1 + \vec{OA}_3 + \vec{OA}_4 = 3 \cdot \vec{OT}_2$
 $\nwarrow$ из $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ се избацује тачка A_2 (II)

T_3 је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, A_4\} \Rightarrow \vec{OT}_3 = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_4) \Rightarrow \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_4 = 3 \cdot \vec{OT}_3$
 $\nwarrow$ из $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ се избацује тачка A_3 (III)

T_4 је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, A_3\} \Rightarrow \vec{OT}_4 = \frac{1}{3} (\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3) \Rightarrow \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 = 3 \cdot \vec{OT}_4$
 $\nwarrow$ из $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ се избацује тачка A_4 (IV)

Доказујемо да се све дужи $A_i T_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ секу у тачки T и да је

$$\vec{A_i T} : \vec{T T_i} = (n-1) : 1 = (4-1) : 1 = 3 : 1.$$

За $i=1$ доказујемо да тачка T припада дужи $A_1 T_1$ и да је $\vec{A_1 T} : \vec{T T_1} = 3 : 1$.

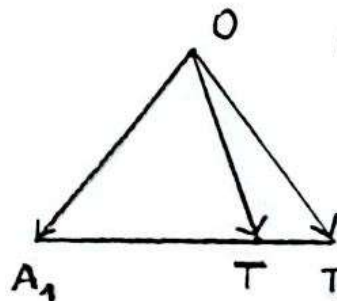
$$\begin{aligned} \vec{OT} &= \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 + \vec{OA}_4) = \frac{1}{4} \cdot \vec{OA}_1 + \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 + \vec{OA}_4) \stackrel{(I)}{=} \frac{1}{4} \cdot \vec{OA}_1 + \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \vec{OT}_1 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \vec{OA}_1 + \frac{3}{4} \cdot \vec{OT}_1 \end{aligned}$$



Како је тачка O на почетку могла бити произвољна, то је сада можемо изабрати тако да тачке O, A_1 и T_1 буду неколинеарне. За тачку T је $\vec{OT} = \frac{1}{4} \cdot \vec{OA}_1 + \frac{3}{4} \vec{OT}_1$ и важи $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$, а и $\frac{1}{4} \geq 0$ и $\frac{3}{4} \geq 0$, те на основу задатка

(1.5) следи да тачка T припада дужи $A_1 T_1$.

* Подсетник (задатак (1.5))



O, A_1 и T_1 су неколинеарне
 $\vec{OT} = \alpha \cdot \vec{OA}_1 + \beta \cdot \vec{OT}_1$
 важи: тачка T припада

правој $A_1 T_1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$

Ако важи $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, онда тачка T припада дужи $A_1 T_1$.

Докажимо да је $\vec{A_1T} : \vec{TT_1} = 3:1$.

$$\vec{A_1T} = \vec{OT} - \vec{OA_1} = \frac{1}{4}\vec{OA_1} + \frac{3}{4}\vec{OT_1} - \vec{OA_1} = (\frac{1}{4} - 1) \cdot \vec{OA_1} + \frac{3}{4}\vec{OT_1} = -\frac{3}{4} \cdot \vec{OA_1} + \frac{3}{4}\vec{OT_1} = \frac{3}{4} \cdot (\vec{OT_1} - \vec{OA_1})$$

јер је $\vec{OA_1} + \vec{A_1T} = \vec{OT}$

$$= \frac{3}{4} \cdot (\vec{OT_1} + \vec{A_1O}) = \frac{3}{4} \cdot (\vec{A_1O} + \vec{OT_1}) = \frac{3}{4} \cdot \vec{A_1T_1}$$

$$\vec{TT_1} = \vec{A_1T_1} - \vec{A_1T} = \vec{A_1T_1} - \frac{3}{4}\vec{A_1T_1} = (1 - \frac{3}{4}) \cdot \vec{A_1T_1} = \frac{1}{4} \cdot \vec{A_1T_1}$$

јер је $\vec{A_1T} + \vec{TT_1} = \vec{A_1T_1}$

$$\Rightarrow \vec{A_1T} : \vec{TT_1} = (\frac{3}{4} \vec{A_1T_1}) : (\frac{1}{4} \vec{A_1T_1}) = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3:1.$$

За $i=2$ доказујемо да тачка T припада дужи A_2T_2 и да је $\vec{A_2T} : \vec{TT_2} = 3:1$.

$$\vec{OT} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4}) = \frac{1}{4} \cdot \vec{OA_2} + \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4}) \stackrel{(\text{II})}{=} \frac{1}{4} \cdot \vec{OA_2} + \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \vec{OT_2} = \frac{1}{4} \cdot \vec{OA_2} + \frac{3}{4} \cdot \vec{OT_2}$$

Тачку O можемо изабрати тако да тачке O, A_2 и T_2 буду неколинеарне.

$$\vec{OT} = \frac{1}{4} \vec{OA_2} + \frac{3}{4} \vec{OT_2}, \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1, \quad \frac{1}{4} \geq 0 \text{ и } \frac{3}{4} \geq 0, \text{ те на основу задатка}$$

(1.5) следи да тачка T припада дужи A_2T_2 .

Докажимо да је $\vec{A_2T} : \vec{TT_2} = 3:1$.

$$\vec{A_2T} = \vec{OT} - \vec{OA_2} = \frac{1}{4} \cdot \vec{OA_2} + \frac{3}{4} \cdot \vec{OT_2} - \vec{OA_2} = (\frac{1}{4} - 1) \cdot \vec{OA_2} + \frac{3}{4} \cdot \vec{OT_2} = -\frac{3}{4} \cdot \vec{OA_2} + \frac{3}{4} \cdot \vec{OT_2} = \frac{3}{4} \cdot (\vec{OT_2} - \vec{OA_2}) = \frac{3}{4} \cdot \vec{A_2T_2}$$

$$\vec{TT_2} = \vec{A_2T_2} - \vec{A_2T} = \vec{A_2T_2} - \frac{3}{4} \cdot \vec{A_2T_2} = (1 - \frac{3}{4}) \cdot \vec{A_2T_2} = \frac{1}{4} \cdot \vec{A_2T_2} \Rightarrow \vec{A_2T} : \vec{TT_2} = (\frac{3}{4} \vec{A_2T_2}) : (\frac{1}{4} \vec{A_2T_2}) = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3:1.$$

За $i=3$ доказујемо да тачка T припада дужи A_3T_3 и да је $\vec{A_3T} : \vec{TT_3} = 3:1$.

$$\vec{OT} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4}) = \frac{1}{4} \cdot \vec{OA_3} + \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_4}) \stackrel{(III)}{=} \frac{1}{4} \cdot \vec{OA_3} + \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \vec{OT_3} = \frac{1}{4} \cdot \vec{OA_3} + \frac{3}{4} \cdot \vec{OT_3}$$

Тачку O можемо изабрати тако да тачке O, A_3 и T_3 не буду колинеарне.

$$\vec{OT} = \frac{1}{4} \cdot \vec{OA_3} + \frac{3}{4} \cdot \vec{OT_3}, \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1, \quad \frac{1}{4} \geq 0 \text{ и } \frac{3}{4} \geq 0, \text{ те на основу задатка } (1.5)$$

Следи да тачка T припада дужи A_3T_3 .

Докажимо да је $\vec{A_3T} : \vec{TT_3} = 3:1$.

$$\begin{aligned} \vec{A_3T} &= \vec{OT} - \vec{OA_3} = \frac{1}{4} \cdot \vec{OA_3} + \frac{3}{4} \cdot \vec{OT_3} - \vec{OA_3} = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \vec{OA_3} + \frac{3}{4} \cdot \vec{OT_3} = -\frac{3}{4} \cdot \vec{OA_3} + \frac{3}{4} \cdot \vec{OT_3} = \frac{3}{4} \cdot (\vec{OT_3} - \vec{OA_3}) = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \vec{A_3T_3} \end{aligned}$$

$$\vec{TT_3} = \vec{A_3T_3} - \vec{A_3T} = \vec{A_3T_3} - \frac{3}{4} \cdot \vec{A_3T_3} = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \vec{A_3T_3} = \frac{1}{4} \vec{A_3T_3}$$

$$\Rightarrow \vec{A_3T} : \vec{TT_3} = \left(\frac{3}{4} \vec{A_3T_3}\right) : \left(\frac{1}{4} \vec{A_3T_3}\right) = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3:1.$$

За $i=4$ доказујемо да тачка T припада дужи A_4T_4 и да је $\vec{A_4T} : \vec{TT_4} = 3:1$.

$$\vec{OT} = \frac{1}{4} (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4}) = \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}) + \frac{1}{4} \vec{OA_4} \stackrel{(IV)}{=} \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \vec{OT_4} + \frac{1}{4} \vec{OA_4} = \frac{1}{4} \vec{OA_4} + \frac{3}{4} \vec{OT_4} \quad \text{☺}$$

Тачку O можемо изабрати тако да тачке O, A_4 и T_4 не буде колинеарне.

$$\vec{OT} = \frac{1}{4} \cdot \vec{OA_4} + \frac{3}{4} \vec{OT_4}, \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1, \quad \frac{1}{4} \geq 0, \quad \frac{3}{4} \geq 0, \text{ те на основу задатка } (1.5) \text{ следи}$$

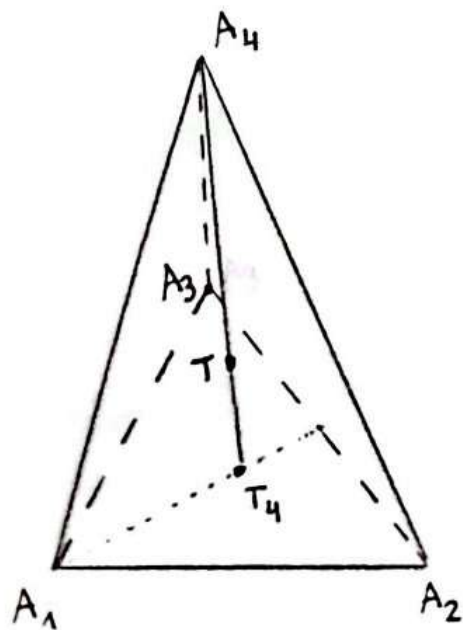
да тачка T припада дужи A_4T_4 .

Докажимо сада да је $\vec{A_4T} : \vec{TT_4} = 3:1$.

$$\begin{aligned}\vec{A_4T} &= \vec{OT} - \vec{OA_4} \stackrel{\odot}{=} \frac{1}{4}\vec{OA_4} + \frac{3}{4}\vec{OT_4} - \vec{OA_4} = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \vec{OA_4} + \frac{3}{4} \cdot \vec{OT_4} = -\frac{3}{4} \cdot \vec{OA_4} + \frac{3}{4} \vec{OT_4} = \frac{3}{4} \cdot (\vec{OT_4} - \vec{OA_4}) = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \vec{A_4T_4}\end{aligned}$$

$$\vec{TT_4} = \vec{A_4T_4} - \vec{A_4T} = \vec{A_4T_4} - \frac{3}{4} \vec{A_4T_4} = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \vec{A_4T_4} = \frac{1}{4} \cdot \vec{A_4T_4}$$

$$\Rightarrow \vec{A_4T} : \vec{TT_4} = \left(\frac{3}{4} \vec{A_4T_4}\right) : \left(\frac{1}{4} \vec{A_4T_4}\right) = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3:1.$$



19. Доказати да се тежиште тетраедра $ABCD$ поклапа са тежиштем тетраедра $A'B'C'D'$ коме су темена A', B', C' и D' редом тежишта троуглова BCD, ACD, ABD и ABC .

Решење:

Нека је O произволна тачка.

T - тежиште тетраедра $ABCD$

Тачка T је тежиште скупа тачака $\{A, B, C, D\}$ и одређена је са $\vec{OT} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.

Тачка A' је тежиште троугла BCD , те је $\vec{OA'} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.

Тачка B' је тежиште троугла ACD , те је $\vec{OB'} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD})$.

Тачка C' је тежиште троугла ABD , те је $\vec{OC'} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD})$.

Тачка D' је тежиште троугла ABC , те је $\vec{OD'} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$.

T' - тежиште тетраедра $A'B'C'D'$

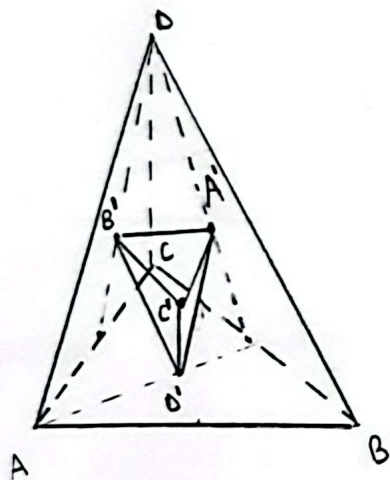
Да бисмо доказали да се тежишта T и T' тетраедара $ABCD$ и $A'B'C'D'$ поклапају, довољно је доказати да је $\vec{OT} = \vec{OT'}$.

Како је T' тежиште тетраедра $A'B'C'D'$, то је $\vec{OT'} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \vec{OD'})$.

$$\vec{OT'} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \vec{OD'}) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) + \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD}) + \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}) + \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \right)$$

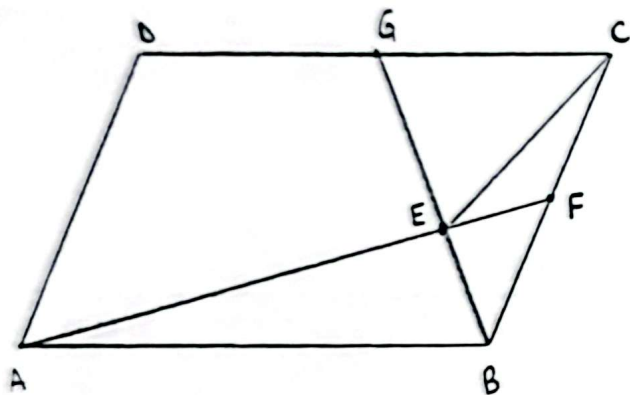
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot (\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{12} \cdot (3 \cdot \vec{OA} + 3 \cdot \vec{OB} + 3 \cdot \vec{OC} + 3 \cdot \vec{OD}) =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) = \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) = \vec{OT} \Rightarrow \vec{OT'} = \vec{OT} \Rightarrow T' = T \Rightarrow \text{Тежишта тетраедара } ABCD \text{ и } A'B'C'D' \text{ се поклапају.}$$

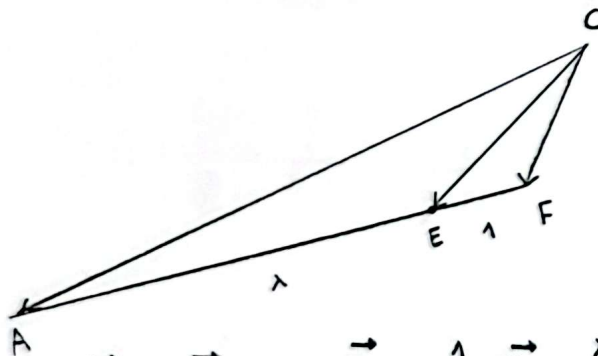


- 1.10. Дат је паралелограм $ABCD$. Ако је тачка F средиште странице BC , тачка G средиште странице CD , а тачка E пресек дужи AF и BG , одредити односе $\frac{AE}{EF}$ и $\frac{BE}{EG}$.

Решење:



✂ Подсетник (задатак 1.4)



$$\vec{AE} = \lambda \cdot \vec{EF} \Rightarrow \vec{CE} = \frac{1}{\lambda+1} \vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{CF}$$

$$\lambda \neq -1 \text{ јер је } \lambda = \frac{AE}{EF} > 0$$

$$\text{Означимо } \frac{AE}{EF} = \frac{\vec{AE}}{\vec{EF}} = \lambda \text{ и } \frac{BE}{EG} = \frac{\vec{BE}}{\vec{EG}} = \mu.$$

количник два вектора истог смера једнак је количнику њихових интензитета

Тачке B, C и D су неколинеарне $\Rightarrow \vec{CB}$ и $\vec{CD}$ су линеарно независни.

На основу задатка (1.4) имамо да из $\vec{AE} = \lambda \cdot \vec{EF}$ следи

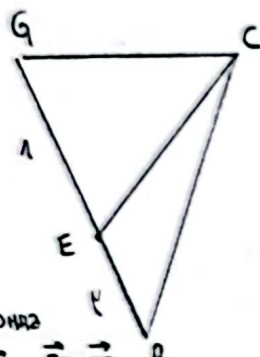
$$\vec{CE} = \frac{1}{\lambda+1} \cdot \vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \vec{CF}.$$

$$\vec{CA} = \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{CD} + \vec{CB} = \vec{CB} + \vec{CD}$$

$\vec{DA} = \vec{CB}$ јер дужи DB и AC имају заједничко средиште

$$\vec{CF} = \frac{1}{2} \vec{CB} \text{ јер је } F \text{ средиште дужи } CB$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{CE} &= \frac{1}{\lambda+1} \vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \vec{CF} = \frac{1}{\lambda+1} \cdot (\vec{CB} + \vec{CD}) + \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{2} \vec{CB} = \\ &= \frac{1}{\lambda+1} \vec{CB} + \frac{1}{\lambda+1} \cdot \vec{CD} + \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} \cdot \vec{CB} = \\ &= \left(\frac{1}{\lambda+1} + \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} \right) \cdot \vec{CB} + \frac{1}{\lambda+1} \cdot \vec{CD} = \\ &= \frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)} \cdot \vec{CB} + \frac{1}{\lambda+1} \cdot \vec{CD} \end{aligned}$$



$$\mu = -1$$

јер ако

би $\mu = -1$, онда

$$\text{би } \vec{BE} = \mu \vec{EG} = -\vec{EG} = \vec{GE}$$

тј. би $B = G$

На основу задатка (1.4.) из $\vec{BE} = \mu \cdot \vec{EG}$ следи $\vec{CE} = \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \vec{CG} + \frac{1}{1+\mu} \cdot \vec{CB}$.

$\vec{CG} = \frac{1}{2} \vec{CB}$ јер је тачка G средиште дужи CB

$$\Rightarrow \vec{CE} = \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \vec{CG} + \frac{1}{1+\mu} \cdot \vec{CB} = \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{1}{2} \vec{CB} + \frac{1}{1+\mu} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{1+\mu} \cdot \vec{CB} + \frac{\mu}{2(1+\mu)} \vec{CB}$$

$$\frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)} \vec{CB} + \frac{1}{\lambda+1} \vec{CB} = \vec{CE} = \frac{1}{1+\mu} \cdot \vec{CB} + \frac{\mu}{2(1+\mu)} \cdot \vec{CB}$$

$$\left(\frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)} - \frac{1}{1+\mu} \right) \cdot \vec{CB} + \left(\frac{1}{\lambda+1} - \frac{\mu}{2(1+\mu)} \right) \cdot \vec{CB} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)} - \frac{1}{1+\mu} = 0 \quad \frac{1}{\lambda+1} - \frac{\mu}{2(1+\mu)} = 0$$

Вектори $\vec{CB}$ и $\vec{CB}$ су
линеарно независни.

$$\frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)} = \frac{1}{1+\mu} \quad \frac{1}{\lambda+1} = \frac{\mu}{2(1+\mu)}$$

$$\frac{1}{1+\mu} = \frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)} = \frac{\lambda+1+1}{2(\lambda+1)} = \frac{\lambda+1}{2(\lambda+1)} + \frac{1}{2(\lambda+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{2(1+\mu)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\mu} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{4(1+\mu)}$$

$$/ \cdot 4(1+\mu) \neq 0$$

$$4 = 2(1+\mu) + \mu$$

$$4 = 2 + 2\mu + \mu$$

$$4 - 2 = 3\mu$$

$$2 = 3\mu$$

$$\mu = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BE}{EG} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\lambda+1} = \frac{\mu}{2(1+\mu)} = \frac{\frac{2}{3}}{2(1+\frac{2}{3})} = \frac{\frac{2}{3}}{2 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\lambda+1=5$$

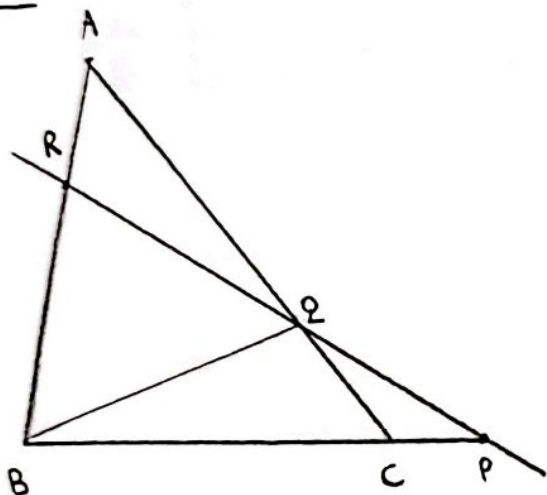
$$\lambda=5-1$$

$$\lambda=4 \Rightarrow \frac{AE}{EF} = 4$$

Тражени односи су $\frac{AE}{EF} = 4$ и $\frac{BE}{EG} = \frac{2}{3}$.

1.11. (Менелажева теорема, 1. век нове ере) Потребан и довољан услов да би тачке P, Q и R које леже редом на правима BC, CA и AB троугла ABC (и различите су од темена троугла) биле колинеарне, јесте да важи $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = -1$.

Решење:



Уведимо ознаке $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} = \alpha$, $\frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} = \beta$ и $\frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = \gamma$. Доказујемо да су тачке P, Q и R колинеарне ако и само ако важи $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = -1$, односно $\alpha\beta\gamma = -1$.

задатак
 $\frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} = \beta \Rightarrow \vec{CQ} = \beta \cdot \vec{QA}$ $\xrightarrow{(1.4)}$ $\vec{BQ} = \frac{1}{1+\beta} \cdot \vec{BC} + \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \vec{BA}$

$\beta \neq -1$ јер је $A \neq C$

Сада желимо да изразимо $\vec{BC}$ и $\vec{BA}$ помоћу $\vec{BP}$ и $\vec{BR}$.

$$\vec{BC} = \vec{BP} + \vec{PC} = \vec{BP} + \frac{1}{\alpha} \cdot \vec{BP} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \vec{BP} = \frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \vec{BP}$$

$$\vec{BP} = \alpha \cdot \vec{PC}$$

$$\vec{PC} = \frac{1}{\alpha} \vec{BP}$$

$\alpha \neq 0$ јер ако би $\alpha = 0$, онда би $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} = \alpha = 0$, те би се поклапале тачке B и P а то је у контрадикцији са тим да је P различита од темена троугла ABC

$$\vec{BA} = \vec{BR} + \vec{RA} = \vec{BR} + \gamma \cdot \vec{BR} = (1+\gamma) \cdot \vec{BR}$$

$$\gamma = \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = \frac{-\vec{RA}}{-\vec{RB}} = \frac{\vec{RA}}{\vec{BR}} \Rightarrow \vec{RA} = \gamma \cdot \vec{BR}$$

$$\Rightarrow \vec{BQ} = \frac{1}{1+\beta} \cdot \vec{BC} + \frac{\beta}{1+\beta} \vec{BA} = \frac{1}{1+\beta} \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \vec{BP} + \frac{\beta}{1+\beta} \cdot (1+\gamma) \cdot \vec{BR} = \frac{\alpha+1}{\alpha(1+\beta)} \cdot \vec{BP} + \frac{\beta(1+\gamma)}{1+\beta} \cdot \vec{BR}$$

На основу задатка (1.5) примењеног на неколинеарне тачке B, P и R (ако би тачке B, P и R биле колинеарне, онда би и тачке A, B и C биле колинеарне, а то је у контрадикцији са тим да је ABC троугао)

Тачка Q одређена са $\vec{BQ} = \frac{\alpha+1}{\alpha(1+\beta)} \cdot \vec{BP} + \frac{\beta(1+\gamma)}{1+\beta} \cdot \vec{BR}$ припада правој PR ако и само ако важи

$$\frac{\alpha+1}{\alpha(1+\beta)} + \frac{\beta(1+\gamma)}{1+\beta} = 1, \text{ односно } \alpha+1 + \alpha\beta(1+\gamma) = \alpha(1+\beta) \text{ након множења са } \alpha(1+\beta), \text{ тј.}$$

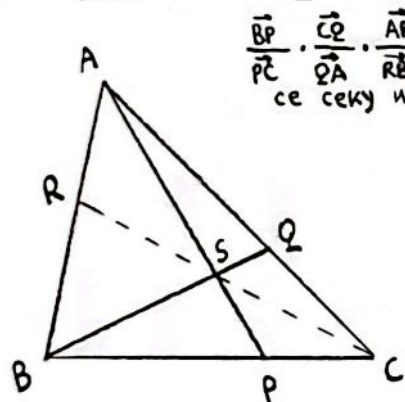
$$\alpha+1 + \alpha\beta + \alpha\beta\gamma = \alpha + \alpha\beta, \text{ односно } \alpha\beta\gamma = -1.$$

Дакле, тачке P, Q и R су колинеарне ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = -1$, тј. $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = -1$.

1.42. (Чеваова теорема) Нека су P, Q и R тачке редом на правима BC, AC и AB , троугла ABC , различите од темена A, B, C .
 Тада је $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = 1$ ако и само ако се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки или су паралелне. Доказати.

Решење: Означимо $\alpha = \frac{\vec{BP}}{\vec{PC}}$, $\beta = \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}}$ и $\gamma = \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}}$. Доказујемо да је $\alpha\beta\gamma = 1$ ако и само ако се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки или су паралелне. Посматрајмо праве AP и BQ у равни троугла ABC . Како су AP и BQ у истој равни, оне не могу бити мимоплазне. Праве AP и BQ се не могу поклапати јер би у супротном тачке A, B и C биле колинеарне (тачка C је на AQ јер је Q на AC) што је у контрадикцији са условом задатка да је ABC троугао. Остају две могућности.

1° Праве AP и BQ се секу у тачки S . Циљ је да докажемо да су тачке C, S и R колинеарне ($\Rightarrow$)



$\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = 1$ јер из тога следи да се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки ($\Rightarrow AP$ и BQ се секу и важи $\heartsuit$). Тачке B, Q и S су различите од темена P, C и A троугла PSC .

Тачке B, Q и S су колинеарне, а важи и да су тачке B, Q и S редом на правима PC, CA и AP троугла PSC . На основу Менелажеве теореме је $\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{\vec{AQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CB}}{\vec{BP}} = -1$.

$$\vec{CB} = \vec{CP} + \vec{PB} = \vec{CP} + \alpha \cdot \vec{CP} = (1+\alpha) \cdot \vec{CP} = \frac{1+\alpha}{\alpha} \cdot \vec{PB} = -\frac{1+\alpha}{\alpha} \cdot \vec{BP} \Rightarrow \frac{\vec{CB}}{\vec{BP}} = -\frac{1+\alpha}{\alpha} \quad (*)$$

$$\alpha = \frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} = \frac{-\vec{BP}}{-\vec{PC}} = \frac{\vec{PB}}{\vec{CP}} \Rightarrow \vec{PB} = \alpha \cdot \vec{CP} \Rightarrow \vec{CP} = \frac{1}{\alpha} \cdot \vec{PB} \quad (\alpha \neq 0 \text{ јер је } \vec{BP} \neq \vec{0} \text{ зато што је } B \neq P)$$

$$\vec{AQ} = \frac{1}{\beta} \cdot \vec{QC} \Rightarrow \frac{\vec{AQ}}{\vec{QC}} = \frac{1}{\beta} \quad (**)$$

$$\beta = \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \Rightarrow \vec{QA} = \frac{\vec{CQ}}{\beta} \Rightarrow -\vec{QA} = -\frac{\vec{CQ}}{\beta} \Rightarrow \vec{AQ} = \frac{\vec{QC}}{\beta} \quad (\beta \neq 0 \text{ јер је } C \neq Q)$$

$$\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{\vec{AQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CB}}{\vec{BP}} = -1 \quad \begin{matrix} (*) \\ \Rightarrow \\ (***) \end{matrix} \Rightarrow \frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \left(-\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \cdot \left(-\frac{1+\alpha}{\alpha\beta}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \alpha \neq -1 \text{ јер } B \neq C \end{matrix} \quad (***)$$

Тачке C, S и R су на правима BP, PA и AB , редом, троугла ABP и различите су од темена A, B и P .

Приметимо да уколико важи $\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CP}} = -1$, онда, на основу Менелажеве теореме, следи

да су тачке C, S и R колинеарне, а важи и обрнуто, тј. $\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CP}} = -1 \Leftrightarrow C, S$ и R су колинеарне.

$$\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \stackrel{(***)}{=} \frac{\alpha\beta}{1+\alpha}$$

$$\frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = \gamma$$

$$\frac{\vec{BC}}{\vec{CP}} \stackrel{\uparrow}{=} -(\alpha+1)$$

$$\vec{BC} = \vec{BP} + \vec{PC} \stackrel{\uparrow}{=} \alpha \cdot \vec{PC} + \vec{PC} = (\alpha+1) \cdot \vec{PC} = -(\alpha+1) \cdot \vec{CP}$$

$$\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} = \alpha \Rightarrow \vec{BP} = \alpha \cdot \vec{PC}$$

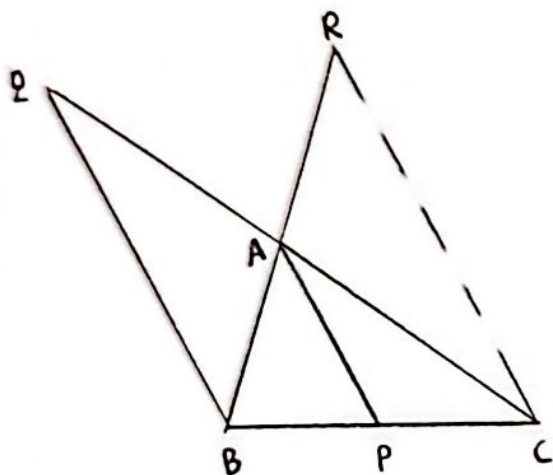
Тачке C, S и R су колинеарне. $\stackrel{\text{Менелажева}}{\Leftrightarrow} \frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CP}} = -1 \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{1+\alpha} \cdot \gamma \cdot (-(\alpha+1)) = -1$
теорема

$$\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = 1$$

Дакле, праве AP, BQ и CR се секу у једној тачки ако и само ако $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = 1$
и праве AP и BQ се секу.

2° Праве AP и BQ су паралелне и немају заједничких тачака.



$$AP \parallel BQ \xrightarrow[\text{Теорема}]{\text{Талесова}} \frac{CP}{PB} = \frac{CA}{AQ} \Rightarrow \frac{\vec{CP}}{\vec{PB}} = \frac{\vec{CA}}{\vec{AQ}} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = -(\beta+1) \quad \left(\begin{smallmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{smallmatrix} \right)$$

$$\alpha = \frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} = \frac{-\vec{PB}}{-\vec{CP}} = \frac{\vec{PB}}{\vec{CP}} \Rightarrow \frac{\vec{CP}}{\vec{PB}} = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0 \text{ јер је } B \neq P)$$

$$\beta = \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \Rightarrow \vec{CQ} = \beta \cdot \vec{QA} = -\beta \cdot \vec{AQ}$$

$$\vec{CA} = \vec{CQ} + \vec{QA} = -\beta \cdot \vec{AQ} - \vec{AQ} = -(\beta+1) \cdot \vec{AQ}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{CA}}{\vec{AQ}} = -(\beta+1)$$

Праве AP, BQ и CR су паралелне $\Leftrightarrow AP \parallel CR \xrightarrow[\text{Теорема}]{\text{Талесова}} \frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AR} \Leftrightarrow \frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} = \frac{\vec{BA}}{\vec{AR}} \Leftrightarrow \alpha = -(\frac{1}{\gamma} + 1)$

$$\gamma = \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} \Rightarrow \vec{RB} = \frac{1}{\gamma} \cdot \vec{AR} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \gamma \neq 0 \text{ јер је } A \neq R \end{matrix}$$

$$\vec{BA} = \vec{BR} + \vec{RA} = -\vec{RB} - \vec{AR} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \vec{AR} - \vec{AR} = -(\frac{1}{\gamma} + 1) \vec{AR}$$

$$\frac{\vec{BA}}{\vec{AR}} = -(\frac{1}{\gamma} + 1)$$

$$\left(\begin{smallmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{smallmatrix} \right) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = -(\beta+1) \Rightarrow 1 = -\alpha(\beta+1) \Rightarrow 1 = -\alpha\beta - \alpha \Rightarrow \alpha = -1 - \alpha\beta$$

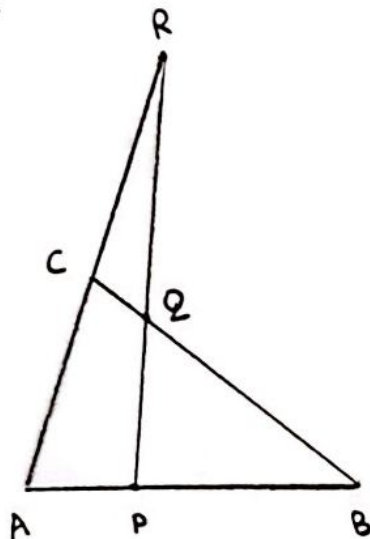
$$\text{Праве } AP, BQ \text{ и } CR \text{ су паралелне} \Leftrightarrow AP \parallel BQ \text{ и } \alpha = -(\frac{1}{\gamma} + 1) \Leftrightarrow AP \parallel BQ \text{ и } -1 - \alpha\beta = -\frac{1}{\gamma} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AP \parallel BQ \text{ и } \alpha\beta\gamma = 1 \Leftrightarrow AP \parallel BQ \text{ и } \frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = 1.$$

Помоћу случаја 1° и 2° смо доказали да је $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = 1 \Leftrightarrow$ праве AP, BQ и CR се секу у једној тачки или су паралелне.

- 1.13. Нека је ABC троугао и тачке P и Q такве да је $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{PB}$ и $\vec{BQ} = 4\vec{QC}$, а тачка R је пресек правих AC и PQ . Израчунати однос $\vec{CR}:\vec{RA}$.

Решење:



Посматрамо троугао ABC и приметимо да су тачке P, Q и R на правима одређеним странама AB, BC и AC , редом, троугла ABC .

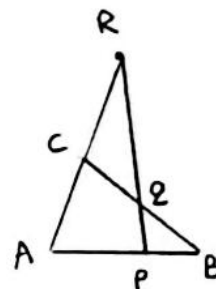
$$\text{Заиста, } \vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{PB} \Rightarrow P \in AB,$$

$$\vec{BQ} = 4\vec{QC} \Rightarrow Q \in BC, \text{ а тачка}$$

R је у пресеку правих AC и PQ , те је, специјално, на правој AC .

Из $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{PB}$ и $\vec{BQ} = 4\vec{QC}$ следи да су тачке P и Q различите од темена троугла ABC . Тачка R је различита од темена B јер је R на правој AC . Тачка R се не може поклапати са теменом A јер би у супротном $\vec{PR} = \vec{AB}$, те би $Q \in \vec{PR} = \vec{AB}$, а $Q \in BC$, те би $Q = B$, а већ смо доказали да је $Q \neq B$. Тачка R се не може поклапати са теменом C јер би у супротном $\vec{RQ} = \vec{BC}$, те би $P \in \vec{RQ} = \vec{BC}$, а $P \in AB$, те би $P = B$, а већ смо доказали да је $P \neq B$. Дакле, тачке P, Q и R су различите од темена троугла ABC . Како је тачка R у пресеку правих AC и PQ , то су тачке P, Q и R колинеарне, те на основу Менелажеве теореме важи $\frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} \cdot \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} = -1$, односно $4 \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} \cdot \frac{1}{2} = -1$, тј. $2 \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -1$, те је тражени однос $\vec{CR}:\vec{RA}$ једнак $-\frac{1}{2}$.

† Менелажева теорема:



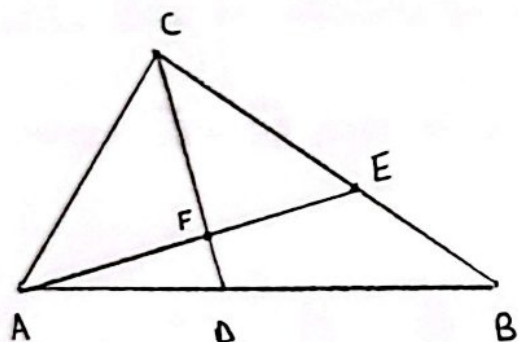
Тачке P, Q и R које су на правима одређеним странама AB, BC и AC , редом, троугла ABC (тачке P, Q и R су различите од темена троугла ABC) су колинеарне

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} \cdot \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} = -1$$

$$\frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} \cdot \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} = -1,$$

1.14. У равни је дат троугао ABC . Нека тачка D припада страници AB , а тачка E страници BC , тако да је $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$. Ако се дужи AE и CD секу у тачки F , одредити у ком односу тачка F дели дужи AE и CD .

Решење:



Посматрајмо троугао ABE и приметимо да тачке C, F и D припадају правима одређеним страницама BE, AE и AB , редом, троугла ABE . Тачке C, F и D су различите од темена A, B и E троугла ABE .

Како је $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$, то је тачка C различита од тачака B и E (у супротном разломак $\frac{BE}{EC}$ није $\frac{5}{7}$ јер је 1 или не постоји). Тачка C је различита од тачке A јер је ABC троугао. Дакле, тачка C је различита од темена троугла ABE .

Ако би $F=A$, онда би $CA=CF=CD$ као праве, а како $D \in AB$ и $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$, то није могуће.

Ако би $F=B$, онда би $CB=CF=CD$ као праве, а како $D \in AB$ и $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$, то није могуће.

Ако би $F=E$, онда би $CE=CF=CD$ као праве, а како $D \in AB$ и $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$, то није могуће.

Дакле, тачка F је различита од темена троугла ABE .

Како је $D \in AB$ и $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{4}$, то је тачка D различита од тачака A и B .

Ако је $D = E$, онда би $BA = BD = BE = BC$ као праве, што је у контрадикцији са условом задатка да је ABC троугао. Дакле, тачка D је различита од темена троугла ABE .

По услову задатка се дужи AE и CD секу у тачки F , те су тачке C, F и D колинеарне. На основу Менелажеве теореме онда следи да је $\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CE}} \cdot \frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = -1$.

Тачка D је на страници AB и $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} = \frac{3}{4}$ јер су вектори $\vec{AD}$ и $\vec{DB}$ истог смера.

Тачка E је на страници BC и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} = \frac{5}{7}$ јер су вектори $\vec{BE}$ и $\vec{EC}$ истог смера.

$$\leadsto \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CE}} \cdot \frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = -1$$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{12}{7}\right) \cdot \frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = -1$$

$$\frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{12}$$

$$\frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = \frac{7}{9}$$

$\Downarrow$

$$\frac{EF}{FA} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{FA}{EF} = \frac{9}{7} \Rightarrow \text{Тачка } F \text{ дели дуж } AE \text{ у односу } 9:7.$$

$$\Downarrow$$
$$\vec{BC} = \vec{BE} + \vec{EC}$$

$$\frac{\vec{BC}}{\vec{CE}} = \frac{\vec{BE} + \vec{EC}}{-\vec{EC}} = -\frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} - \frac{\vec{EC}}{\vec{EC}} = -\frac{5}{7} - 1 = -\frac{12}{7}$$

Посматрамо троугао $\triangle ABC$ и приметимо да тачке A, E и F припадају правима одређеним странама AB, BC и CA , редом, троугла $\triangle ABC$. Тачке A, E и F се разликују од темена троугла $\triangle ABC$. Тачка A се разликује од темена B и C , јер $A \in AB$ и $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$.

Тачка A се разликује од тачке C јер је $\triangle ABC$ троугао. Дакле, тачка A се разликује од темена троугла $\triangle ABC$. Тачка E се разликује од темена B и C , јер $E \in BC$ и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$.

Ако би $E=B$, онда би $BC=BE=BA=CA$ као праве, што је у контрадикцији са условом задатка да је $\triangle ABC$ троугао. Дакле, тачка E се разликује од темена троугла $\triangle ABC$.

Ако би $F=C$, онда би $AE=AF=AC=AB$ као праве, а како је $E \in BC$ и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$ то није могуће да се тачке E и C поклапају.

Ако би $F=B$, онда би $CA=CB=AB$ као ^{праве} $CA=CB=AB$, а како је $A \in AB$ и $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, то није могуће да се тачке B и C поклапају.

Ако би $F=C$, онда би $AE=AF=AC$, а како је $E \in BC$ и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$, то није могуће да се тачке E и C поклапају. Дакле, тачка F је различита од темена троугла $\triangle ABC$.

Како се по услову задатка дужи AE и CD секу у тачки F , то су тачке A, F и E колинеарне. Онда на основу Менелажеве теореме $\frac{\vec{DA}}{\vec{AB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FD}} = -1$.

Тачка D је на дужи AB и $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} = \frac{3}{4}$

$$\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB} = \vec{AD} + \frac{4}{3} \cdot \vec{AD} = \left(1 + \frac{4}{3}\right) \cdot \vec{AD} = \frac{7}{3} \vec{AD}$$

$$\frac{\vec{DA}}{\vec{AB}} = \frac{-\vec{AD}}{\frac{7}{3} \vec{AD}} = -\frac{3}{7}$$

Тачка Е је на дужи BC и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} = \frac{5}{7}$ јер су вектори $\vec{BE}$ и $\vec{EC}$ истог смера

$$\rightsquigarrow \frac{\vec{DA}}{\vec{AB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FD}} = -1$$

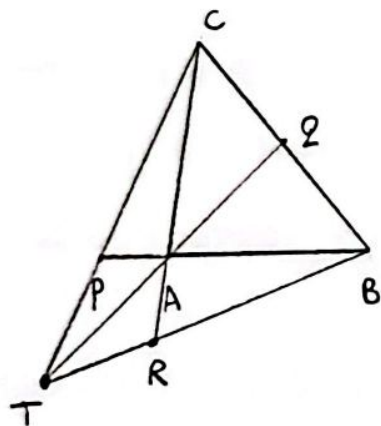
$$\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FD}} = -1$$

$$\frac{\vec{CF}}{\vec{FD}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{5}$$

$$\frac{\vec{CF}}{\vec{FD}} = \frac{49}{15} \Rightarrow \frac{CF}{FD} = \frac{49}{15} \Rightarrow \text{Тачка } F \text{ дели дужи } CD \text{ у односу } 49:15.$$

1.15. Нека је ABC троугао, P и Q тачке такве да је $3\vec{AP} = \vec{BA}$ и $2\vec{BQ} = \vec{BC}$. Ако је R тачка праве AC таква да се праве AQ , CP и BR секу у једној тачки, одредити однос $\vec{AR} : \vec{AC}$.

Решење:



Посматрамо троугао ABC .

Приметимо да су тачке

P, Q и R на правима

одређеним страницама

AB, BC и CA , редом,

троугла ABC . Заиста,

како је $3\vec{AP} = \vec{BA}$, то је

тачка P на правој AB .

Како је $2\vec{BQ} = \vec{BC}$, то је

тачка Q на правој BC .

По услови задатка је R

тачка праве AC .

Приметимо да се тачке P, Q и R разликују од темена троугла ABC .

Заиста, тачка P се разликује од темена A и B

јер је $3\vec{AP} = \vec{BA}$. Како је P на правој AB , то не може бити $P=A$ јер ABC не би био троугао. Дакле, тачка P се разликује од темена троугла ABC .

* Подсетник - Чевина теорема

Нека су P, Q и R тачке

на правима одређеним

страницама AB, BC, AC , редом,

троугла ABC и нека се тачке

P, Q и R разликују од

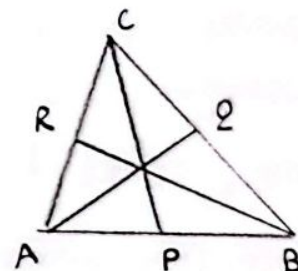
темена троугла ABC .

Тада важи:

Праве AQ, BR и CP се

секу у једној тачки или су

паралелне ако $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$.



Напомена: Праве AQ, BR и CP се могу сести у једној тачки која је у спољашњости троугла ABC . *

Тачка Q се разликује од темена B и C јер је $2\vec{BQ} = \vec{BC}$ (ако би $Q=B$ онда би $2\vec{BB} = \vec{BC} \Rightarrow \vec{0} = \vec{BC} \Rightarrow B=C$ $\nmid$, а ако би $Q=C$ онда би $2\vec{BC} = \vec{BC} \Rightarrow \vec{BC} = \vec{0} \Rightarrow B=C$ $\nmid$).

Тачка Q се разликује од темена A јер је тачка Q на правој BC , а тачка A не може бити на правој BC јер је ABC троугао. Дакле, тачка Q се разликује од темена троугла ABC .

$$\{T\} = A_Q \cap B_R \cap C_P$$

Ако би $R=A$, онда би $BT=BR=BA$ као праве, те би тачке A, B и T биле колинеарне, а како су и тачке A, Q и T колинеарне и важи $Q \in BC$, то би се тачке B и Q поклапале, што је у контрадикцији са тим да је $2\vec{BQ} = \vec{BC}$. Ако би $R=B$, онда како $R \in AC$, то би $B \in AC$ што је у контрадикцији са условом задатка да је ABC троугао.

Ако би $R=C$, онда би B, T и C биле колинеарне (јер су B, R и T колинеарне), а како су B, C и Q колинеарне, то би тачке B, T, C и Q биле колинеарне, а по услову задатка су и тачке A, T и Q колинеарне, те би B, T, C, Q и A биле колинеарне, што је у контрадикцији са условом задатка да је ABC троугао.

Дакле, тачка R се разликује од темена троугла ABC .

$\Rightarrow$ Овим смо доказали да се тачке P, Q и R разликују од темена троугла ABC .

По условию задатка се праве AP , BQ и CR секу у једној тачки, те на основу Чевије теореме следи да је $\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = 1$.

$$3\vec{AP} = \vec{BA}$$

$$3\vec{AP} = \vec{BP} + \vec{PA}$$

$$3\vec{AP} = -\vec{PB} - \vec{AP}$$

$$4\vec{AP} = -\vec{PB}$$

$$\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} = -\frac{1}{4}$$

$$2\vec{BQ} = \vec{BC}$$

$$2\vec{BQ} = \vec{BQ} + \vec{QC}$$

$$2\vec{BQ} - \vec{BQ} = \vec{QC}$$

$$\vec{BQ} = \vec{QC}$$

$$\frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} = 1$$

$$\leadsto \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = 1$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1 \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = 1$$

$$\frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -4 \Rightarrow \frac{\vec{AC}}{\vec{AR}} = \frac{\vec{AR} + \vec{RC}}{-\vec{RA}} = \frac{-\vec{RA} + 4\vec{RA}}{-\vec{RA}} = \frac{3\vec{RA}}{-\vec{RA}} = -3$$

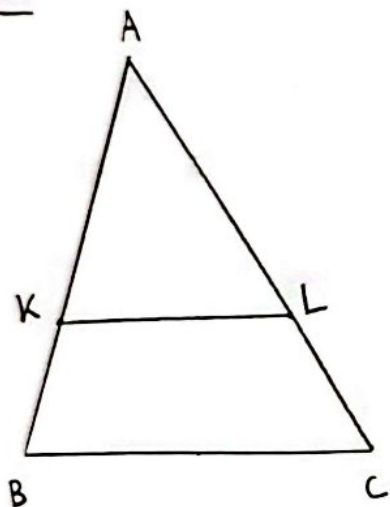
$$\vec{CR} = -4\vec{RA}$$

$$\Rightarrow \vec{RC} = -(-4\vec{RA}) = 4\vec{RA}$$

Тражени однос $\vec{AC} : \vec{AR}$ је -3 .

- 1.16. На страницама AB и AC троугла ABC дате су редом тачке K и L , такве да важи $\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1$.
Доказати да тежиште троугла ABC припада дужи KL .

Решење:



Тежиште T скупа тачака $\{A, B, C\}$ се дефинише помоћу $\vec{OT} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ и у задатку 1.7. смо доказали

да уместо тачке O можемо изабрати било коју тачку из те равни. Специјално, за $O=A$ добијамо

$$\vec{AT} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3} \cdot (\vec{0} + \vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}).$$

Тачка K је на дужи AB , те су вектори $\vec{KB}$ и $\vec{AK}$ истог смера, а одатле је $\frac{\vec{KB}}{\vec{AK}} = \frac{KB}{AK} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Тачка L је на дужи AC , те су вектори $\vec{LC}$ и $\vec{AL}$ истог смера, а одатле је $\frac{\vec{LC}}{\vec{AL}} = \frac{LC}{AL} = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Због услова задатка $\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1$ важи $\lambda + \mu = 1$. (*)

$\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ можемо изразити помоћу вектора $\vec{AK}$ и $\vec{AL}$, редом.

$$\vec{AB} = \vec{AK} + \vec{KB} = \vec{AK} + \lambda \cdot \vec{AK} = (1+\lambda) \cdot \vec{AK}$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{KB}}{\vec{AK}} &= \lambda \\ \vec{KB} &= \lambda \cdot \vec{AK} \end{aligned}$$

$$\vec{AC} = \vec{AL} + \vec{LC} = \vec{AL} + \mu \cdot \vec{AL} = (1+\mu) \cdot \vec{AL}$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{LC}}{\vec{AL}} &= \mu \\ \vec{LC} &= \mu \cdot \vec{AL} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3} ((1+\lambda)\vec{AK} + (1+\mu)\vec{AL}) = \frac{1}{3} (1+\lambda)\vec{AK} + \frac{1}{3} (1+\mu)\vec{AL}$$

Како је $\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1$ услов задатка, онда сматрамо

да је $A \neq K$ и $A \neq L$.

$K \in AB$ и $L \in AC$

$\Rightarrow$ Тачке A, K и L су неколинеарне (ако би биле колинеарне, онда би тачке A, B и C биле колинеарне што је у контрадикцији са тим да је ABC троугао).

Тачка T задовољава $\vec{AT} = \frac{1}{3}(1+\lambda)\vec{AK} + \frac{1}{3}(1+\mu)\vec{AL}$

$$\begin{aligned} \text{Како је } \frac{1}{3}(1+\lambda) + \frac{1}{3}(1+\mu) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mu = \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot (\lambda + \mu) \stackrel{(*)}{=} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1, \end{aligned}$$

то на основу задатка (1.5) следи да је тачка T на правој KL .

$$\frac{1}{3}(1+\lambda) \geq 0 \text{ јер је } \lambda = \frac{KB}{AK} \geq 0$$

$$\frac{1}{3}(1+\mu) \geq 0 \text{ јер је } \mu = \frac{LC}{AL} \geq 0$$

Како је $\frac{1}{3}(1+\lambda) \geq 0$ и $\frac{1}{3}(1+\mu) \geq 0$, онда на основу задатка (1.5) следи да тежиште T троугла ABC припада дужи KL .

+

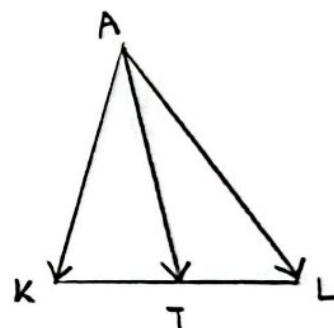
Подсетник (задатак (1.5))

A, K, L су три неколинеарне тачке

Тачка T је одређена са

$\vec{AT} = \alpha \cdot \vec{AK} + \beta \cdot \vec{AL}$. Тада важи:

T припада правој $KL \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$



Ако је при томе $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$,
тада тачка T припада дужи KL .

+

1.17. Дат је паралелограм $ABCD$ и у његовој унутрашњости тачка O . Две праве које садрже тачку O и паралелне су страницама паралелограма, секу странице паралелограма у тачкама $P \in AB$, $Q \in CD$, $U \in AD$ и $V \in BC$. Доказати да се праве PV , QU и AC секу у једној тачки или су паралелне.

Решење: Праве QU и AC припадају равни паралелограма $ABCD$, те оне не могу бити мимоилазне. Разликујемо два случаја за међусобни положај правих QU и AC , да су оне паралелне или да се секу у једној тачки.

1) случај Праве QU и AC су паралелне. Довољно би било доказати да је $PV \parallel AC$.

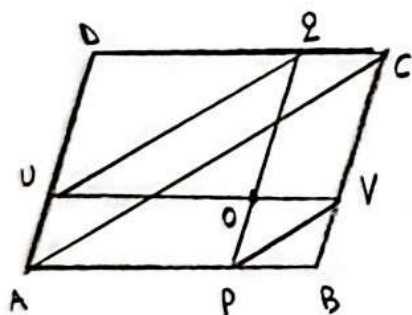
$QU \parallel AC \Rightarrow$ Вектори $\vec{UQ}$ и $\vec{AC}$ су колинеарни, што значи да постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $\vec{UQ} = \lambda \cdot \vec{AC}$.

Права која садржи тачку O и паралелна је страници AB паралелограма $ABCD$ сече AD у тачки U и сече BC у тачки V по услову задатка. $\Rightarrow$ $UV \parallel AB \parallel CD$
 $AD \parallel BC \Rightarrow UD \parallel VC$ } $\Rightarrow$ четвороугао $UVCD$ је паралелограм.

$$\stackrel{\Downarrow}{\vec{UD} = \vec{VC}}$$

Права која садржи тачку O и паралелна је страници BC паралелограма $ABCD$ сече AB у тачки P и сече CD у тачку Q по услову задатка. $\Rightarrow$ $PQ \parallel BC \parallel AD$
 $AB \parallel CD \Rightarrow AP \parallel DQ$ } $\Rightarrow$ четвороугао $APQD$ је паралелограм

$$\stackrel{\Downarrow}{\vec{DQ} = \vec{AP}}$$



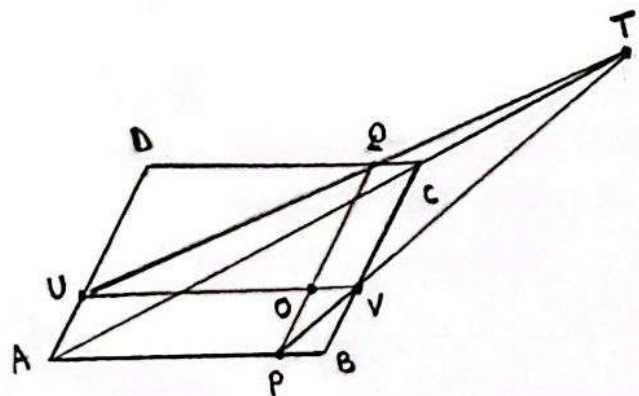
$$\begin{aligned} \vec{PV} &= \vec{PA} + \vec{AC} + \vec{CV} = -\vec{AP} + \vec{AC} - \vec{VC} = -\vec{DQ} + \vec{AC} - \vec{UD} = -(\vec{UD} + \vec{DQ}) + \vec{AC} = -\vec{UQ} + \vec{AC} = -\lambda \cdot \vec{AC} + \vec{AC} = \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\text{правило} \quad \quad \quad \vec{AP} = \vec{DQ} \quad \quad \quad \vec{UD} = \lambda \cdot \vec{AC} \\ &\text{надовезања \quad \quad \quad \vec{VC} = \vec{UD}} \end{aligned}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \vec{AC}$$

Како је $\vec{PV} = (1-\lambda)\vec{AC}$, то су вектори $\vec{PV}$ и $\vec{AC}$ колинеарни, те су праве PV и AC паралелне.

Дакле, ако су UQ и AC паралелне, онда су PV и AC паралелне, односно PV, QU и AC су паралелне.

2) случај Праве UQ и AC се секу у тачки T . Довољно је доказати да тачка T припада правој PV . Посматрамо троугао ACD . Тачке U, Q и T су на правима одређеним странама AD, DC и AC , редом, троугла ACD . Како је тачка O у унутрашњости паралелограма $ABCD$ по услову задатка, то за праве PQ и UV које су паралелне са AD и AB , редом, важи да морају сести CD и AD у тачкама



и U које припадају отвореним дужима CD и AD , редом. Дакле, тачке U и Q се разликују од темена A, C и D троугла ACD . Важи и да је тачка T различита од темена троугла ACD . Заиста, ако би $T=D$ онда би $DC=DQ=TD=TV=DU=DA$ као праве, али онда би тачке A, C и D биле колинеарне што је у контрадикцији са тим да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

Ако би $T=A$, онда би $AD=AU=TU=TQ$, те би тачке A, D и Q биле колинеарне, али то је



у контрадикцији са условом задатка да је $PQ \parallel AD$ и са тим да тачка Q припада отвореној дужи BC .

Ако би $T=C$, онда би $CD=CQ=TQ=QU$ као праве, те би тачке C, D и U биле колинеарне, али то је у контрадикцији са условом задатка да је $UV \parallel CD$ и са тим да тачка U припада отвореној дужи AD .

Дакле, тачке U, Q и T се разликују од темена троугла ACD .

Како се праве UQ и AC секу у тачки T , то су тачке U, Q, T колинеарне, те на основу Менелажеве теореме

$$\frac{\vec{AU}}{\vec{UD}} \cdot \frac{\vec{DQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CT}}{\vec{TA}} = -1 \quad \star$$

По услову задатка, права кроз тачку D паралелна са AB сече AD у тачки U , а BC у тачки V , $\Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} UV \parallel AB \\ AD \parallel BC \Rightarrow AU \parallel BV \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Четвороугао } ABVU \text{ је паралелограм.}$$

$$\Downarrow \\ \vec{AU} = \vec{BV} \quad (1)$$

$UV \parallel AB \parallel CD$
 $AD \parallel BC \Rightarrow UD \parallel VC$ $\} \Rightarrow$ Четвороугао $UVCD$ је паралелограм.

$$\vec{UD} = \vec{VC} \quad (2)$$

По условиу задатка, права кроз тачку O паралелна са BC сече AB у тачки P , а CD у тачки Q . $\Rightarrow PQ \parallel BC \parallel AD$

$$\left. \begin{array}{l} PQ \parallel AD \\ AB \parallel DC \Rightarrow AP \parallel DQ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{четвороугао } APQD \text{ је паралелограм.} \Rightarrow \vec{DQ} = \vec{AP} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} PQ \parallel BC \\ AB \parallel DC \Rightarrow PB \parallel QC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{четвороугао } PBQC \text{ је паралелограм.} \Rightarrow \vec{QC} = \vec{PB} \quad (4)$$

$$\begin{array}{l} \star \\ \Rightarrow \\ (1), (2), (3), (4) \end{array} \quad -1 = \frac{\vec{AU}}{\vec{UB}} \cdot \frac{\vec{DQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CT}}{\vec{TA}} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{\vec{BV}}{\vec{VC}} \cdot \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{CT}}{\vec{TA}} \quad \#$$

$$(1) \vec{AU} = \vec{BV}$$

$$(2) \vec{UB} = \vec{VC}$$

$$(3) \vec{DQ} = \vec{AP}$$

$$(4) \vec{QC} = \vec{PB}$$

Посматрамо троугао ABC . Приметимо да тачке P , V и T припадају правима одређеним странама AB , BC , CA , редом, троугла ABC . Како је тачка O у унутрашњости паралелограма $ABCD$ по условиу задатка, то за праве PQ и UV које су паралелне са AD и AB , редом, важи да морају сечи AB и BC у тачкама P и V које припадају отвореним дужицама AB и BC . Дакле, тачке P и V се разликују од темеља A , B и C троугла ABC .

Важи и да је тачка T различита од темена A, B и C троугла ABC . Заиста, ако би $T=B$ онда би тачка $B=T$ припадала правој AC (јер T припада правој AC зато што се праве UQ и AC секу у тачки T), али то је у контрадикцији са условом задатка да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

Ако би $T=A$, онда би $AD=AU=TV=TQ$ као праве, те би тачке A, D и Q биле колинеарне, али то је у контрадикцији са условом задатка да је $PQ \parallel AD$ и са тим да тачка Q припада отвореној дужи CD (доказано на почетку 2) случаја).

Ако би $T=C$, онда би $CD=CQ=TQ=QU$ као праве, те би тачке C, D и U биле колинеарне, али то је у контрадикцији са условом задатка да је $UV \parallel CD$ и са тим да тачка U припада отвореној дужи AD (доказано на почетку 2) случаја).

Дакле, тачке P, V и T се разликују од темена троугла ABC .

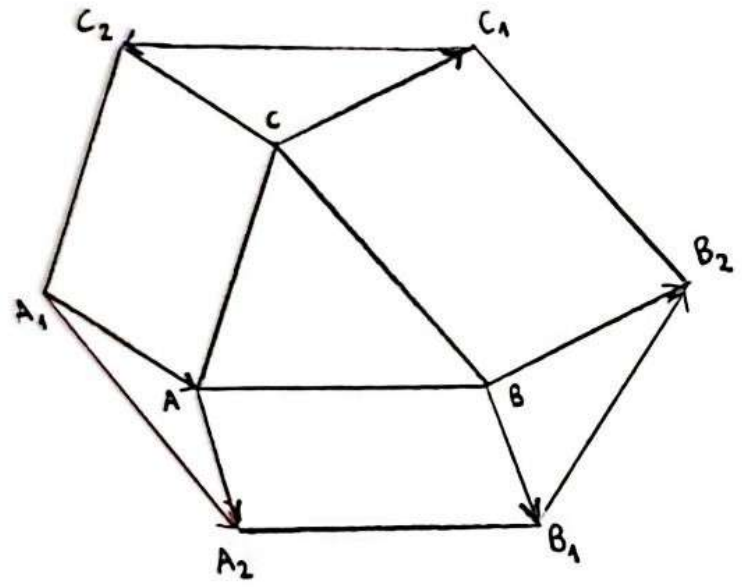
У # смо доказали да је $\frac{\vec{BV}}{\vec{VC}} \cdot \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{CT}}{\vec{TA}} = -1$, тј. $\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BV}}{\vec{VC}} \cdot \frac{\vec{CT}}{\vec{TA}} = -1$, те на основу

Менелажеве теореме следи да су тачке P, V и T колинеарне, те тачка T припада правој PV .

Дакле, ако се праве UQ и AC секу у тачки T , онда се праве PV, UQ и AC секу у тачки T .

1.18. Над страницама троугла ABC конструисани су паралелограми ABV_1A_2 , BCC_1V_2 , CAA_1C_2 . Доказати да је $\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2} = \vec{0}$.

Решење:



правило издезивања

$$\left. \begin{aligned} \vec{A_1A_2} &= \vec{A_1A} + \vec{AA_2} \\ \vec{B_1B_2} &= \vec{B_1B} + \vec{BB_2} \\ \vec{C_1C_2} &= \vec{C_1C} + \vec{CC_2} \end{aligned} \right\} \oplus$$

$$\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2} = \vec{A_1A} + \vec{AA_2} + \vec{B_1B} + \vec{BB_2} + \vec{C_1C} + \vec{CC_2}$$

$$= \vec{C_2C} + \vec{BB_1} - \vec{BB_1} + \vec{CC_1} - \vec{CC_1} + \vec{CC_2} = \vec{0}, \text{ што се и тражило}$$

$\vec{A_1A} = \vec{C_2C}$
јер дужи A_1C и AC_2 имају заједничко средиште као дијагонале паралелограма CAA_1C_2

$\vec{AA_2} = \vec{BB_1}$
јер дужи AB_1 и A_2B имају заједничко средиште као дијагонале паралелограма ABV_1A_2

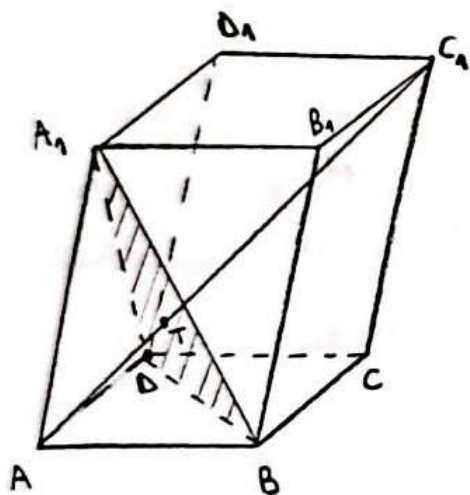
$\vec{B_1B} = -\vec{BB_1}$
јер је $\vec{B_1B}$ супротан вектор вектора $\vec{BB_1}$

$\vec{BB_2} = \vec{CC_1}$
јер дужи BC_1 и B_2C имају заједничко средиште као дијагонале паралелограма BCC_1V_2

$\vec{C_1C} = -\vec{CC_1}$
 $\vec{CC_2} = -\vec{C_2C}$

1.19. Дат је паралелепипед $ABCD, A_1, B_1, C_1, D_1$. Доказати да је продор T дијагонале AC_1 кроз раван одређену тачкама B, D и A_1 тежиште троугла BDA_1 .

Решење:



На основу задатка 1.7. да би тачка T била тежиште скупа тачака $\{B, D, A_1\}$, довољно је доказати да је $\vec{AT} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1})$.

Тачка T представља тачку продора дијагонале AC_1 у раван BDA_1 , те је тачка T на правој AC_1 , те су тачке A, T и C_1 колинеарне што значи да су вектори $\vec{AT}$ и $\vec{AC_1}$ колинеарни. То значи да је $\vec{AT} = \lambda \cdot \vec{AC_1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \vec{AC_1} &= \vec{AC} + \vec{CC_1} = \underbrace{\vec{AB} + \vec{BC}}_{\vec{AC}} + \vec{CC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1} \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \text{правило} \quad \quad \quad \vec{BC} = \vec{AD} \quad \quad \quad \vec{CC_1} = \vec{BB_1} = \vec{AA_1} \\ &\quad \text{надовезивања} \quad \quad \quad \begin{array}{l} \text{јер дужи } BD \\ \text{и } CA \text{ имају} \\ \text{заједничко} \\ \text{средиште} \\ \text{зато што је} \\ \text{четвороугао} \\ ABCD \text{ паралелограм} \end{array} \quad \quad \quad \begin{array}{l} \vec{BB_1} = \vec{AA_1} \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ \text{D}BCC_1B_1 \quad \text{D}ABB_1A_1 \\ \text{је} \quad \quad \text{је} \\ \text{паралелограм} \quad \text{паралелограм} \end{array} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{AT} = \lambda \cdot \vec{AC_1} = \lambda \cdot (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) = \lambda \cdot \vec{AB} + \lambda \cdot \vec{AD} + \lambda \cdot \vec{AA_1}$$

Како је $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ паралелепипед, то су тачке A, B, D и A_1 некомпланарне (у супротном би равнани $ABCD$ и $ADD_1 A_1$ припадале истој равни, што није могуће).

Тачка T задовољава $\vec{AT} = \lambda \cdot \vec{AB} + \lambda \cdot \vec{AD} + \lambda \cdot \vec{AA_1}$.

Како тачка T припада равни троугла $BD A_1$, то на основу задатка (1.6) следи да је $\lambda + \lambda + \lambda = 1$, тј. $3\lambda = 1$, односно $\lambda = \frac{1}{3}$.

$$\Rightarrow \vec{AT} = \lambda \cdot \vec{AB} + \lambda \cdot \vec{AD} + \lambda \cdot \vec{AA_1} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AD} + \frac{1}{3} \vec{AA_1} = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1})$$

$\Rightarrow$ Тачка T је тежиште троугла $BD A_1$, што је и требало доказати.

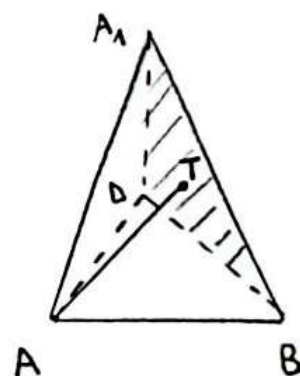
✂ Подсетник (задатак (1.6))

Тачке A, B, D и A_1 су некомпланарне.

Да би тачка T одређена са

$$\vec{AT} = \alpha \cdot \vec{AB} + \beta \cdot \vec{AD} + \gamma \cdot \vec{AA_1}$$

припадала равни троугла $BD A_1$, потребно је и довољно да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$.



✂