

1.8. Криве другог реда

Крива другог реда је скуп тачака равни $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ које задовољавају једначину

$$f(x_1, x_2) = 0, \quad (1.28)$$

где је f полином другог степена по x_1 и x_2 са реалним коефицијентима. Другим речима, важи $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}$, (1.29) где су $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$, при чему је $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$ (постоји барем један квадратни члан).

Желимо да класификујемо криве другог реда, односно да геометријски опишемо све могуће скупове тачака који задовољавају једначину (1.28), односно једначину

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0.$$

Испоставља се да ако постоји члан $a_{12} \neq 0$, то геометријски значи да је крива некако искошена у постојећем координатном систему. Идеја је да потражимо нови координатни систем у којем ће она бити исправљена, односно нема члан a_{12} .

То постижемо ротацијом координатног система око координатног почетка за неки угао $\theta \in \mathbb{R}$ (односно ротацијом тачака око координатног почетка за угао $-\theta$), а када искористимо раније изведене једначине ротације (1.25) за угао θ (тј. $x'_1 = x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta$ $x'_2 = x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta$)

и чињенице да се нама тачке ротирају око координатног почетка за угао $-\theta$, односно (x_1, x_2) се од (x'_1, x'_2) могу добити ротацијом за угао θ , те је

$$x_1 = x'_1 \cos \theta - x'_2 \sin \theta, \quad x_2 = x'_1 \sin \theta + x'_2 \cos \theta \quad (1.30)$$

На овај начин једначина криве $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$ се ротацијом трансформише у нову једначину

$$a_{11} \cdot (x'_1 \cos \theta - x'_2 \sin \theta)^2 + 2a_{12} \cdot (x'_1 \cos \theta - x'_2 \sin \theta) \cdot (x'_1 \sin \theta + x'_2 \cos \theta) + a_{22} (x'_1 \sin \theta + x'_2 \cos \theta)^2 + 2a_{13} \cdot (x'_1 \cos \theta - x'_2 \sin \theta) + 2a_{23} \cdot (x'_1 \sin \theta + x'_2 \cos \theta) + a_{33} = 0$$

$$\begin{aligned} & a_{11} \cdot x_1'^2 \cos^2 \theta - 2a_{11} \cos \theta \sin \theta x_1' x_2' + a_{11} x_2'^2 \sin^2 \theta + 2a_{12} x_1' \cos \theta \sin \theta + 2a_{12} \cos^2 \theta x_1' x_2' \\ & - 2a_{12} x_1' x_2' \sin^2 \theta - 2a_{12} x_2'^2 \sin \theta \cos \theta + a_{22} x_1'^2 \sin^2 \theta + 2a_{22} x_1' x_2' \sin \theta \cos \theta + a_{22} x_2'^2 \cos^2 \theta \\ & + 2a_{13} x_1' \cos \theta - 2a_{13} x_2' \sin \theta + 2a_{23} x_1' \sin \theta + 2a_{23} x_2' \cos \theta + a_{33} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a_{11} \cos^2 \theta + 2a_{12} \cos \theta \sin \theta + a_{22} \sin^2 \theta) x_1'^2 + 2 \cdot (-a_{11} \cos \theta \sin \theta + a_{12} \cos^2 \theta - a_{12} \sin^2 \theta + a_{22} \sin \theta \cos \theta) x_1' x_2' \\ & + (a_{11} \sin^2 \theta - 2a_{12} \sin \theta \cos \theta + a_{22} \cos^2 \theta) x_2'^2 + 2 \cdot (a_{13} \cos \theta + a_{23} \sin \theta) x_1' + 2 \cdot (-a_{13} \sin \theta + a_{23} \cos \theta) x_2' + a_{33} = 0 \end{aligned}$$

Тако добијемо нову једначину криве облика

$$a'_{11}x_1'^2 + 2a'_{12}x_1'x_2' + a'_{22}x_2'^2 + 2a'_{13}x_1' + 2a'_{23}x_2' + a'_{33} = 0 \quad (1.31)$$

при чему је $2a'_{12} = -2a_{11}\cos\theta\sin\theta + 2a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2a_{22}\sin\theta\cos\theta$

$$a'_{12} = a_{12} \cdot (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (a_{22} - a_{11})\cos\theta\sin\theta$$

$$a'_{12} = a_{12} \cdot \cos(2\theta) + (a_{22} - a_{11}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\theta).$$

тригонометријске формуле
 $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
 $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$

Тражимо угао θ који ће обезбедити да $a'_{12} = 0$, те користећи претходну једначину добијемо да је

$$0 = a_{12} \cdot \cos(2\theta) + (a_{22} - a_{11}) \cdot \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

$$(a_{11} - a_{22}) \cdot \frac{1}{2} \sin(2\theta) = a_{12} \cos(2\theta)$$

$$\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

$$\operatorname{ctg}(2\theta) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

$$/ : a_{12} \sin(2\theta) \neq 0$$

$a_{12} \neq 0$ јер ако је
 $a_{12} = 0$ крива је
 већ исправљена и
 не бисмо вршили
 ротацију, а
 $\sin(2\theta) \neq 0$ иначе
 би $a_{12} \cos(2\theta) = 0$
 те би $\cos(2\theta) = 0$
 (јер радимо случај
 када је $a_{12} \neq 0$)
 а то би било у
 контрадикцији са
 $\sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta) = 1$.

Дакле, ако координатни систем заротирамо за угао

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \quad (1.32)$$

око координатног почетка, једначина

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$$

прелази у једначину $a'_{11}x_1'^2 + 2a'_{12}x_1'x_2' + a'_{22}x_2'^2 + 2a'_{13}x_1' + 2a'_{23}x_2' + a'_{33} = 0$,
 при чему је $a'_{12} = 0$.

Ради лакшег записа, користећемо исте ознаке као на почетку,
 односно у наставку посматрамо криву чија једначина има општи облик

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0 \quad (1.33)$$

Како је коефицијент испред x_1x_2 једнак 0, то су променљиве x_1 и x_2
 раздвојене и за $i \in \{1, 2\}$ уколико је $a_{ii} \neq 0$, можемо посматрати израз
 $a_{ii}x_i^2 + 2a_{i3}x_i$.

$$a_{ii}x_i^2 + 2a_{i3}x_i = a_{ii} \cdot \left(x_i^2 + 2x_i \cdot \frac{a_{i3}}{a_{ii}} + \left(\frac{a_{i3}}{a_{ii}} \right)^2 \right) - \frac{a_{i3}^2}{a_{ii}} = a_{ii} \cdot \left(x_i + \frac{a_{i3}}{a_{ii}} \right)^2 - \frac{a_{i3}^2}{a_{ii}}.$$

Транслирамо x_i координату помоћу $x_i' = x_i + \frac{a_{i3}}{a_{ii}}$ и то ће елиминисати
 коефицијент уз x_i , односно анулирати a_{i3} .

Напомена: У претходном извођењу било је битно извући a_{ii} испред заграда јер нам је важно да трансформације које примењујемо буду изометријске трансформације, односно да чувају дужину дужи.

У досадашњем свођењу криве на канонски облик примењивали смо ротацију и транслацију, а оне јесу изометријске трансформације равни.

Посматрамо једначину криве $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$.

Разматрамо следеће случајеве.

1° случај $a_{11}a_{22} \neq 0$, односно оба квадратна коефицијента нису нула

Тада транслација $x_1 = x_1' - \frac{a_{13}}{a_{11}}$, $x_2 = x_2' - \frac{a_{23}}{a_{22}}$ елиминише линеарне коефицијенте из посматране једначине криве која постаје облика

$$a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33} = 0 \quad (1.34)$$

↑ није исти број као малопређашњи коефицијент али га исто означавамо ради једноставности записа

1.1° подслучај $a_{11}a_{22} > 0$

1.1.1° подподслучај $a_{11}a_{33} < 0$

$$a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 = -a_{33} \quad /: -a_{33} \neq 0$$

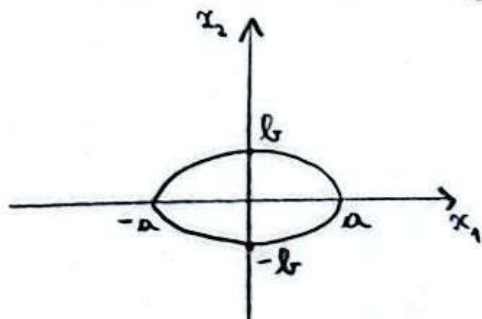
$$\frac{x_1'^2}{-\frac{a_{33}}{a_{11}}} + \frac{x_2'^2}{-\frac{a_{33}}{a_{22}}} = 1$$

$$\boxed{\frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} = 1}$$

елипса

Уводимо $a = \sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{11}}}$ и $b = \sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{22}}}$

Можемо захтевати услов $a \geq b > 0$ (за $a = b$ имамо круг као специјалан случај елипсе) јер иначе осна рефлексија у односу на праву $x_1 = x_2$ чије су одговарајуће једначине $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1'$ замењује координате x_1 и x_2 , те и бројеви a и b мењају места.



1.1.2° подподслучај $a_{11} a_{33} > 0$

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 = -a_{33}$$

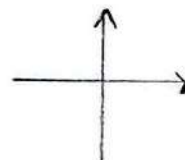
$$/: a_{33} \neq 0$$

$$\frac{x_1^2}{\frac{a_{33}}{a_{11}}} + \frac{x_2^2}{\frac{a_{33}}{a_{22}}} = -1$$

$$\underbrace{\frac{x_1^2}{a^2}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x_2^2}{b^2}}_{\geq 0} = \underbrace{-1}_{< 0}$$

$$a = \sqrt{\frac{a_{33}}{a_{11}}}, \quad b = \sqrt{\frac{a_{33}}{a_{22}}}$$

$\emptyset$
 празан skup



Ако проблем посматрамо у комплексној равни у питању је имагинарна елипса.

1.1.3° подподслучај $a_{33} = 0$

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 = 0$$

$$/: a_{11} \neq 0$$

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{\frac{a_{11}}{a_{22}}} = 0$$

$$\underbrace{\frac{x_1^2}{a^2}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x_2^2}{b^2}}_{\geq 0} = 0$$

$$a = 1, \quad b = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}$$

$(x_1, x_2) = (0, 0)$
 тачка

← координатни почетак



Ако проблем посматрамо у комплексној равни решење је пар имагинарних правах које се секу баш у тој реалној тачки.

1.2° подслучај $a_{11} a_{22} < 0$

1.2.1° подподслучај $a_{33} \neq 0$

Не умањујући општост можемо претпоставити да важи $a_{11} a_{33} < 0$

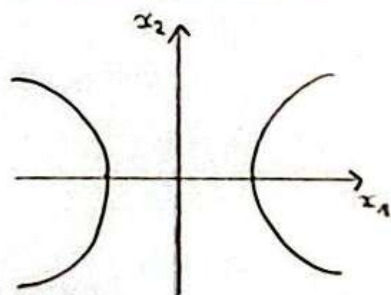
јер иначе примена већ поменуте осне рефлексије $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1'$ размењује координатне осе, а самим тим и коефицијенте a_{11} и a_{22} .

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 = -a_{33} \quad / : -a_{33} \neq 0$$

$$\frac{x_1^2}{\frac{-a_{33}}{a_{11}}} - \frac{x_2^2}{\frac{a_{33}}{a_{22}}} = 1$$

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1}$$

Хипербола



$$a = \sqrt{\frac{-a_{33}}{a_{11}}}$$

> 0

$$b = \sqrt{\frac{a_{33}}{a_{22}}}$$

> 0

јер су a_{22} и a_{33} супротног знака од a_{11}

1.2.2° подподслучај $a_{33} = 0$

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 = 0 \quad / : a_{11} \neq 0$$

$$x_1^2 + \frac{a_{22}}{a_{11}} x_2^2 = 0$$

$$x_1^2 - \frac{x_2^2}{\frac{a_{11}}{a_{22}}} = 0$$

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0}$$

$$a = 1$$

$$b = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}$$

> 0

јер је $a_{11} a_{22} < 0$

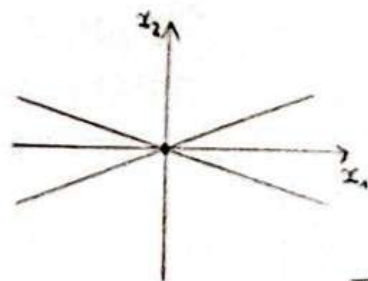
$$\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}\right) \cdot \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) = 0$$

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0$$

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0$$

Две праве које се секу

(у тачки $(0,0)$)



Тиме смо решили све могућности из 1^о случаја $a_{11} a_{22} \neq 0$.

2^о случај $a_{11} a_{22} = 0$

Како класификујемо криву другог реда, по дефиницији она мора имати бар један квадратни члан, те преостаје случај када је тачно један од квадратних коефицијената a_{11} и a_{22} различит од нуле.

Не умањујући општост, можемо претпоставити да је $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$ иначе бисмо коришћењем осне рефлексије разменили x_1 и x_2 .

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$$

$$a_{11} \cdot \left(x_1^2 + 2 \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}} x_1 + \frac{a_{13}^2}{a_{11}^2} \right) - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$$

$$a_{11} \cdot \left(x_1 + \frac{a_{13}}{a_{11}} \right)^2 + 2a_{23}x_2 + a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} = 0$$

Транслација $x_1 = x_1' - \frac{a_{13}}{a_{11}}$, $x_2 = x_2'$ елиминисае коефицијент a_{13}

и добијамо једначину $a_{11}x_1'^2 + 2a_{23}x_2' + a_{33}' = 0$, али ћемо ради лакшег записивања сматрати да у наставку класификујемо криву чија је једначина

$$a_{11}x_1'^2 + 2a_{23}x_2' + a_{33}' = 0 \quad (1.35)$$

2.1^о подслучај $a_{23} \neq 0$

$$a_{11}x_1'^2 + 2a_{23} \cdot \left(x_2' + \frac{a_{33}'}{2a_{23}} \right) = 0$$

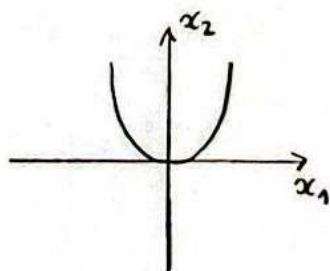
Транслација $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2' - \frac{a_{33}'}{2a_{23}}$ елиминисае слободан члан

a_{33}' и ради једноставнијег записа можемо сматрати да даље имамо једначину $a_{11}x_1'^2 + 2a_{23}x_2' = 0$.

$$a_{11}x_1'^2 = -2a_{23}x_2' \quad / : a_{11}$$

$$x_1'^2 = 2 \cdot \frac{-a_{23}}{a_{11}} x_2'$$

$$p = -\frac{a_{23}}{a_{11}}$$



$$x_1'^2 = 2px_2'$$

парабола

Ако је $p < 0$ помоћу изометријске трансформације $x_1 = x_1'$, $x_2 = -x_2'$ можемо обезбедити да је $p > 0$.

2.2° подслучај $a_{23} = 0$

$$a_{11}x_1^2 + a_{33} = 0$$

$$a_{11}x_1^2 = -a_{33} \quad / : a_{11} \neq 0$$

$$x_1^2 = -\frac{a_{33}}{a_{11}}$$

$$x_1^2 = \kappa$$

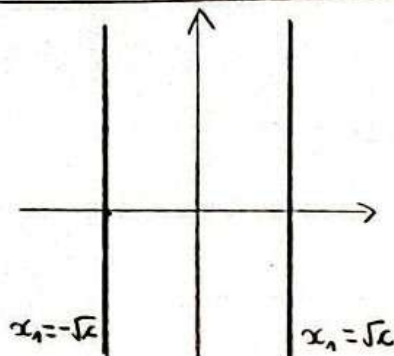
$$\kappa = -\frac{a_{33}}{a_{11}}$$

2.2.1° подподслучај $\kappa > 0$

$$x_1^2 = \kappa$$

$\kappa > 0$

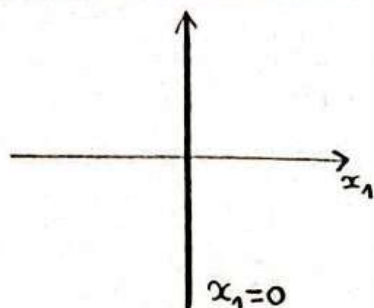
$$x_1 = -\sqrt{\kappa} \quad x_1 = \sqrt{\kappa} \quad \text{паралелне праве}$$



2.2.2° подподслучај $\kappa = 0$

$$x_1^2 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{једна права}$$

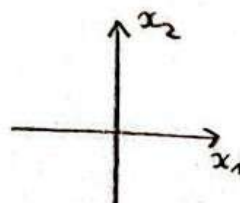


2.2.3° подподслучај $\kappa < 0$

$$x_1^2 = \kappa$$

$\kappa < 0$

$\varnothing$ празан скуп



У комплексној равни то су две паралелне имагинарне праве.

Тиме је завршена класификација кривих другог реда.