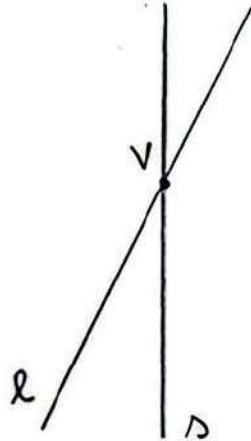
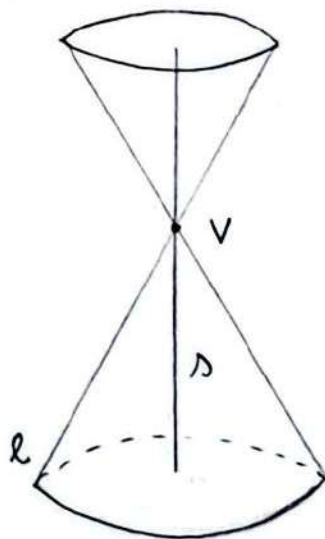


1.7. Конике

Нека су праве ℓ и Δ праве у простору које се секу под оштрим углом у тачки V .



Прави кружни конус добија се ротацијом праве ℓ око Δ и он је унија правих кроз V које са Δ заклајају саш онолики (оштар) угао колики угао права ℓ заклапа са правом Δ .



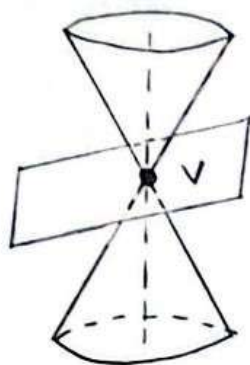
Δ - оса

V - врх

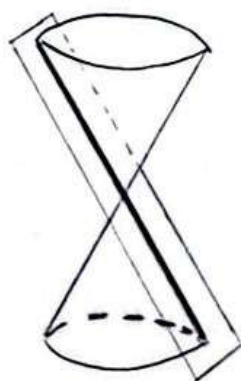
ℓ и њене слике при ротацији око Δ су изводнице правог кружног конуса

Конусни пресек је пресек правог кружног конуса и неке равни.

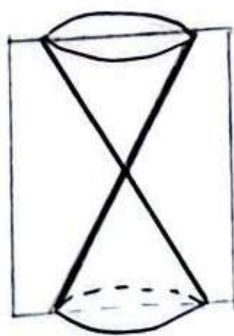
Случај кад раван садржи врх V је дегенерисан и тада конусни пресек може бити:



тачка V



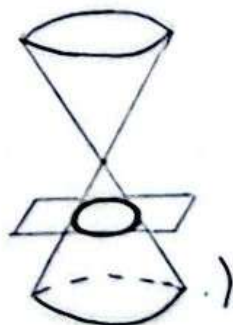
једна изводница



две изводнице

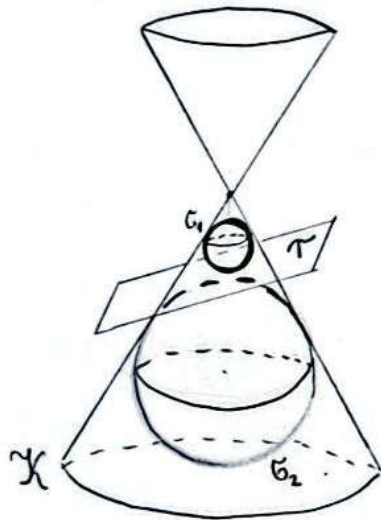
Нас посебно занима случај када раван не пролази кроз врх нити је нормална на осу и такви пресеци се зову конике.

(У случају да је раван нормална на осу у пресеку се добија круг

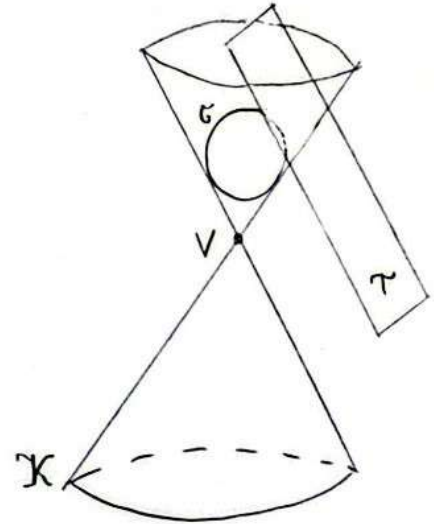
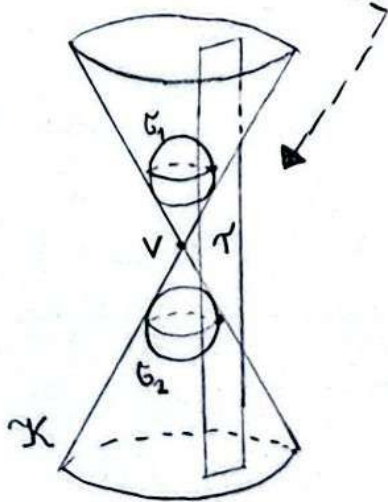


Нека је $\mathcal{K}$ прави кружни конус са осом Δ , врхом V и изводницом ℓ , а τ произвољна раван која не садржи тачку V и није нормална на осу Δ .

У еуклидској геометрији се испоставља да постоји сфера ζ која је уписана у $\mathcal{K}$ и која додирује раван τ .



Испоставља се да ако раван τ није паралелна ни са једном изводницом посматраног правог кружног конуса постоје две такве сфере и тада је посматрана коника елипса или хипербола.



Испоставља се да ако је раван τ паралелна са неком изводницом посматраног правог кружног конуса постоји само једна таква сфера и тада је посматрана коника парабола.

Germain Pierre Dandelin (1794-1847),
Француски математичар.

Поменуте сфере се зову Данделинове сфере и помоћи ће нам да докажемо неке битне особине коника.

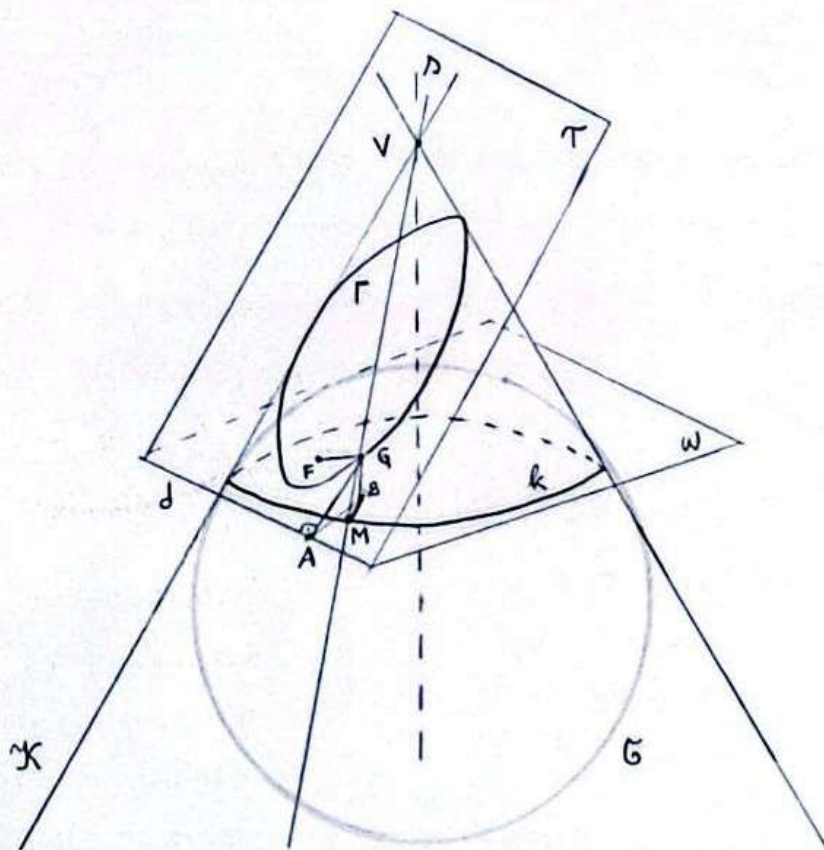
Сфера σ додирује конус $\mathcal{K}$ по неком кругу k и нека је ω равн у којој се тај круг налази.

$$\omega \perp l$$

$\neg(\tau \perp l)$ јер смо рекли да нас занима случај када равн τ није нормална на осу l



Равни ω и τ нису паралелне те се секу по правој d , односно $d = \omega \cap \tau$.



Посматрамо конику $\Gamma = \mathcal{K} \cap \tau$ и нека је $G \in \Gamma$ произвољна тачка са ње.

A - подножје нормале из тачке G на d

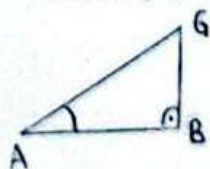
B - подножје нормале из тачке G на $\omega \Rightarrow B \in \omega$

$$VG \cap \omega = \{M\}$$

$\uparrow$ V је врх посматраног конуса $\mathcal{K}$, а $G \in \Gamma = \mathcal{K} \cap \tau \subset \mathcal{K}$, те $G \in \mathcal{K}$, односно права VG је једна изводница конуса $\mathcal{K}$, те њен пресек M са равни ω припада пресеку $\mathcal{K} \cap \omega$, а то је круг k . Дакле, $M \in k$.

$$\angle(\omega, \tau) = \angle(BA, AG) = \angle BAG$$

$\uparrow$ $\angle(\omega, \tau)$ је угао диедра којег граде полуравни $d\omega$ и $d\tau$, а он се по дефиницији угла диедра може гледати као угао између нормала BA и AG на d у равнима ω и τ , редом (на основу Обратне теореме о три нормале из еуклидске геометрије из $BG \perp \omega$, $d \subset \omega$, $AG \perp d$ следи да је $BA \perp d$)



$$d(G, d) = \|\vec{GA}\| = \frac{\|\vec{GB}\|}{\sin \angle BAG} = \frac{\|\vec{GB}\|}{\sin \angle(\omega, \tau)}$$

$\uparrow$
расстојање тачке G од праве d

$\triangle ABG: \sin \angle BAG = \frac{\|\vec{BG}\|}{\|\vec{AG}\|}$



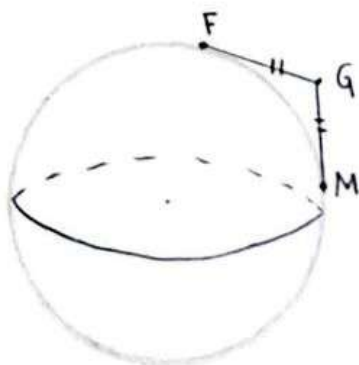
$$\left. \begin{array}{l} GB \perp w \text{ по дефиницији тачке } B \\ \Delta \perp w \end{array} \right\} \Rightarrow GB \parallel \Delta \Rightarrow \angle BGM = \angle(BG, MG) = \angle(\Delta, \ell) \quad \uparrow \quad BG \parallel \Delta$$

Правда MG је изводница конуса $\mathcal{K}$ и са осом Δ заклапа исти угао који и било која друга изводница конуса $\mathcal{K}$ заклапа са осом Δ

Нека је $\{F\} = \mathcal{T} \cap \mathcal{B}$, односно тачка F је додирна тачка равни $\mathcal{T}$ и сфере $\mathcal{B}$.

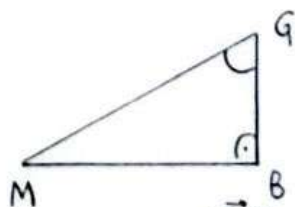
$M \in k = \mathcal{K} \cap \mathcal{B}$, те $M \in \mathcal{B}$ и изводница GM је тангента сфере $\mathcal{B}$

$\Rightarrow GF$ и GM су тангентни одсечци из тачке G на сферу $\mathcal{B}$, а из еуклидске геометрије знамо да су они једнаки.



$$\|\vec{GF}\| = \|\vec{GM}\|$$

Како је $GB \perp w$ и $M \in w$, то је $GB \perp BM$, те је $\triangle BGM$ правоугли.



$$d(G, F) = \|\vec{GF}\| = \|\vec{GM}\| = \frac{\|\vec{GB}\|}{\cos \angle BGM} \stackrel{BG \parallel \Delta}{=} \frac{\|\vec{GB}\|}{\cos \angle(\Delta, \ell)}$$

$$\triangle BGM: \cos \angle BGM = \frac{\|\vec{GB}\|}{\|\vec{GM}\|}$$

$$\Rightarrow \frac{d(G, F)}{d(G, \Delta)} = \frac{\frac{\|\vec{GB}\|}{\cos \angle(\Delta, \ell)}}{\frac{\|\vec{GB}\|}{\sin \angle(w, \mathcal{T})}} = \frac{\sin \angle(w, \mathcal{T})}{\cos \angle(\Delta, \ell)} \leftarrow \text{Означимо } e = \frac{\sin \angle(w, \mathcal{T})}{\cos \angle(\Delta, \ell)}.$$

Посматрани однос не зависи од избора тачке G са конике Γ јер фиксирањем конуса $\mathcal{K}$ и равни $\mathcal{T}$ фиксирали су и углови $\angle(w, \mathcal{T})$ и $\angle(\Delta, \ell)$ и тиме смо доказали следећу теорему.

Теорема 1.15 За сваку конику Γ у равни постоји тачка F и права d таква да је константан однос растојања произвољне тачке са конике од тачке F и њеног растојања од праве d .

Тачка F зове се жижна (или фокус), права d зове се водила (или директриса) а број e је ексцентрицитет конике.

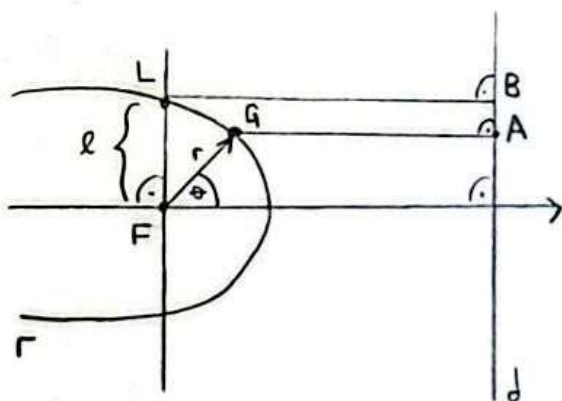
$e > 0$ по својој дефиницији

Ако је $0 < e < 1$ коника је елипса.

Ако је $e = 1$ коника је парабола.

Ако је $e > 1$ коника је хипербола.

Иако смо конике дефинисали као објекте у простору димензије 3, по својој дефиницији оне се налазе у равни. Користећи Теорему 1.15 изводимо једначине коника у равни и то без употребе треће димензије. Искористимо раније уведени поларни координатни систем чији је пол жижна F , а поларна оса је полуправа са почетком F која је нормална на директрису d и сече је.



L — једна од пресечних татака конике Γ и праве која садржи тачку F и паралелна је директриси d

$$l = d(F, L)$$

$G \in \Gamma$ произволна тачка са конике која је са исте стране праве d као и тачка F

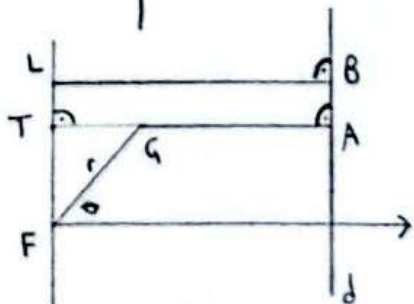
A — подножје нормале из G на праву d

B — подножје нормале из L на праву d

Ако су (r, θ) поларне координате тачке G , тада је

$$r = d(G, F) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Теорема 1.15}}}{=} e \cdot d(G, d) = e \cdot d(G, A) = e \cdot (d(L, B) - r \cos \theta) = e \cdot d(L, B) - e r \cos \theta = d(F, L) - e r \cos \theta = l - e r \cos \theta$$

Теорема 1.15



$$\{T\} = AG \cap FL$$

$FL \perp$ поларну осу $\Rightarrow$

$$\angle TFG = 90^\circ - \theta$$

$$\Delta GFT: \sin \angle TFG = \frac{\| \vec{TG} \|}{\| \vec{FG} \|} = \frac{\| \vec{TG} \|}{r}$$

$$\Rightarrow \| \vec{TG} \| = r \cdot \sin \angle TFG = r \sin (90^\circ - \theta) = r \cos \theta$$

$$d(G, A) = \| \vec{TA} \| - \| \vec{TG} \|$$

$$= d(L, B) - r \cos \theta$$

Тако добијамо поларну једначину конике $r = \ell - e r \cos \theta$.

(1.26)

$$\Rightarrow r + e r \cos \theta = \ell$$

$$r \cdot (1 + e \cos \theta) = \ell$$

$/ : (1 + e \cos \theta) \neq 0 \leftarrow$ Не може бити $1 + e \cos \theta = 0$ иначе би $\ell = 0$,
односно $F = L$, али $L \in \Gamma$, а $F \notin \Gamma$

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}$$

Сада поставимо одговарајући правоугли Декартов координатни систем (који има почетак у полу, а поларна оса се преклапа са осом x_1) и изведимо једначине конике.

$$\rightarrow (1.26) \quad r = \ell - e r \cos \theta \quad / ()^2$$

$$r^2 = (\ell - e r \cos \theta)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (\ell - e x_1)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \ell^2 - 2e\ell x_1 + e^2 x_1^2$$

$$(1 - e^2)x_1^2 + 2e\ell x_1 + x_2^2 = \ell^2$$

Веза између Декартових и поларних координата је $x_1 = r \cos \theta$ и $x_2 = r \sin \theta$, а важи и $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

(1.27)

Разликујемо два случаја.

1° случај $1 - e^2 \neq 0$, односно $e^2 \neq 1 \Leftrightarrow e \neq 1$

$\uparrow$
 $e > 0$ по дефиницији

$$(1 - e^2)x_1^2 + 2e\ell x_1 + x_2^2 = \ell^2 \quad / : (1 - e^2) \neq 0$$

$$\underbrace{x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{e\ell}{1 - e^2} + \frac{x_2^2}{1 - e^2}}_{\left(x_1 + \frac{e\ell}{1 - e^2}\right)^2} = \frac{\ell^2}{1 - e^2}$$

$$\underbrace{\left(x_1 + \frac{e\ell}{1 - e^2}\right)^2 - \frac{e^2 \ell^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{x_2^2}{1 - e^2}}_{\left(x_1 + \frac{e\ell}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{x_2^2}{1 - e^2}} = \frac{\ell^2}{1 - e^2}$$

$$\left(x_1 + \frac{e\ell}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{x_2^2}{1 - e^2} = \frac{\ell^2}{1 - e^2} + \frac{e^2 \ell^2}{(1 - e^2)^2}$$

$$\left(x_1 + \frac{e\ell}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{x_2^2}{1 - e^2} = \frac{\ell^2 \cdot (1 - e^2) + e^2 \ell^2}{(1 - e^2)^2}$$

$$\left(x_1 + \frac{e\ell}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{x_2^2}{1 - e^2} = \frac{\ell^2 - \cancel{\ell^2 e^2} + e^2 \ell^2}{(1 - e^2)^2}$$

$$\left(x_1 + \frac{e\ell}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{x_2^2}{1 - e^2} = \frac{\ell^2}{(1 - e^2)^2}$$



Претходна једначина нас мотивише да уведемо нови координатни систем који добијамо транслацијом за вектор $\left(-\frac{e\ell}{1 - e^2}, 0\right)$, односно

$$x_1' = x_1 + \frac{e\ell}{1 - e^2}$$

$$x_2' = x_2.$$

Ради лакшег записа уместо x_1' и x_2' ћемо користити x_1 и x_2 имајући на уму да то нису стари x_1 и x_2 из $\mathcal{O}$. У том новом координатном систему једначина конике је

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{1 - e^2} = \frac{\ell^2}{(1 - e^2)^2} \quad / : \frac{\ell^2}{(1 - e^2)^2}$$

$$\frac{x_1^2}{\frac{\ell^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{\frac{x_2^2}{1-e^2}}{\frac{\ell^2}{(1-e^2)^2}} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{\ell}{1-e^2}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\frac{\ell^2}{1-e^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1^2}{\left(\frac{\ell}{|1-e^2|}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\operatorname{sgn}(1-e^2) \cdot \frac{\ell^2}{|1-e^2|}} = 1$$

Уведимо ознаке $a = \frac{\ell}{|1-e^2|}$ и $b = \frac{\ell}{\sqrt{|1-e^2|}}$. Тако долазимо до

канонске једначине конике

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \operatorname{sgn}(1-e^2) \cdot \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

За $e < 1$ добијамо канонску једначину елипсе

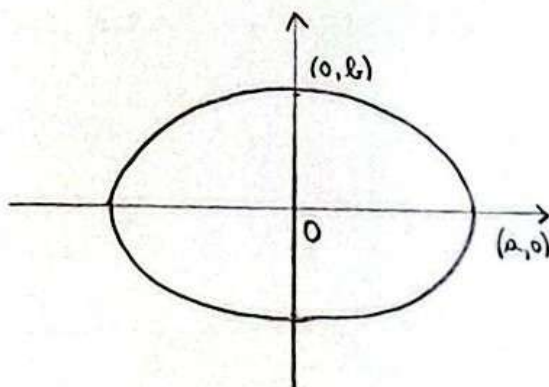
$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1} \quad \text{јер је } 1-e^2 > 0,$$

те је $\operatorname{sgn}(1-e^2) = 1$.

За $e > 1$ добијамо канонску једначину хиперболе

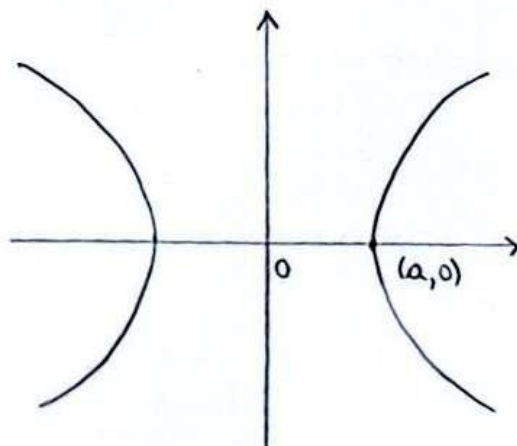
$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1} \quad \text{јер је } 1-e^2 < 0,$$

те је $\operatorname{sgn}(1-e^2) = -1$.



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

елипса



$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

хипербола

2° случај $1-e^2 = 0 \Leftrightarrow 1=e^2 \Leftrightarrow e=1$
 $\uparrow$
 $e > 0$

$$\leadsto (1.27) \quad (1-e^2)x_1^2 + 2e\ell x_1 + x_2^2 = \ell^2$$

$$2\ell x_1 + x_2^2 = \ell^2$$

$$x_2^2 = \ell^2 - 2\ell x_1$$

$$x_2^2 = 2\ell \cdot \left(\frac{\ell}{2} - x_1\right)$$

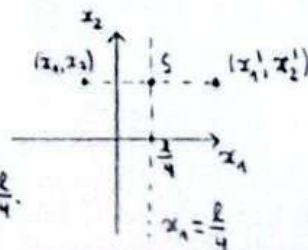
Применом осне симетрије равни у односу на праву $x_1 = \frac{\ell}{4}$ мења се $\frac{\ell}{2} - x_1$ у ново x_1 , док се x_2 не мења.

$$\neq \quad x_2' = x_2$$

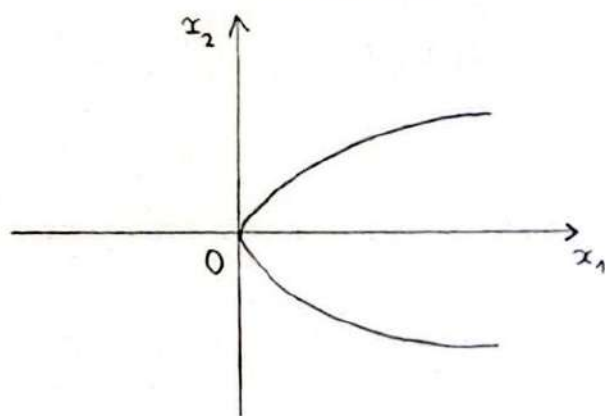
$$\frac{x_1' + x_1}{2} = \frac{\ell}{4} \quad \text{јер средиште } S \text{ дужи чије су крајње тачке}$$

$$x_1' = \frac{\ell}{2} - x_1$$

(x_1, x_2) и (x_1', x_2') припада правој $x_1 = \frac{\ell}{4}$.



У новом координатном систему једначина параболе (радимо случај када је $e=1$) има свој канонски облик $x_2^2 = 2lx_1$.

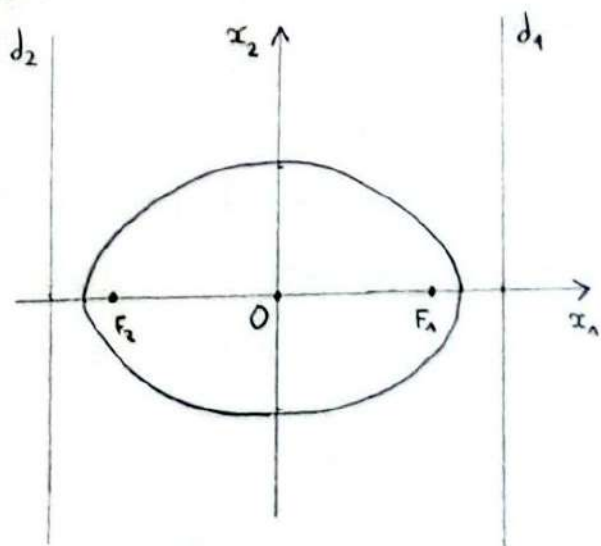


$$x_2^2 = 2lx_1$$

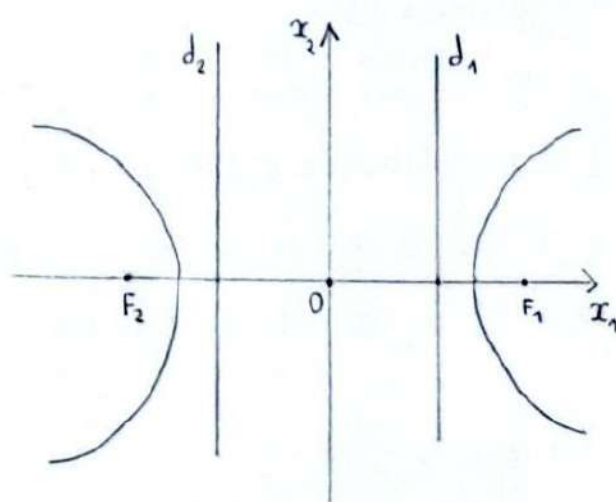
парабола

Елипсе и хиперболе имају две жиже и две директрисе (раније смо видели да у случају да је посматрана коника елипса или хипербола имамо две Денделинове сфере, а самим тим и две жиже јер смо F дефинисали као додирну тачку сфере $\mathcal{S}$ и равни $\mathcal{T}$, а директриса d је пресек равни $\mathcal{W}$ и $\mathcal{T}$).

Жиже елипсе су између директриса, док су код хиперболе директрисе између жижа.

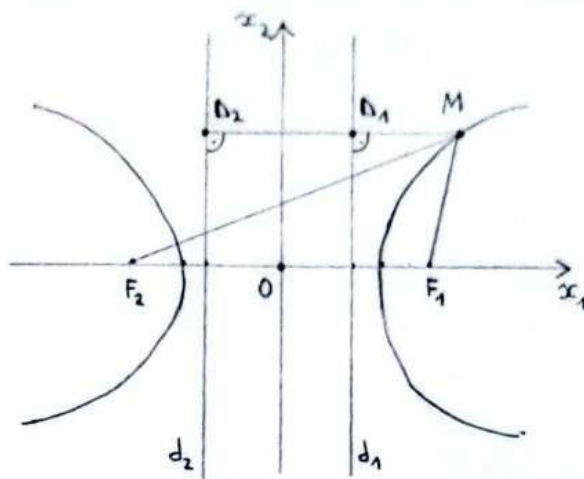
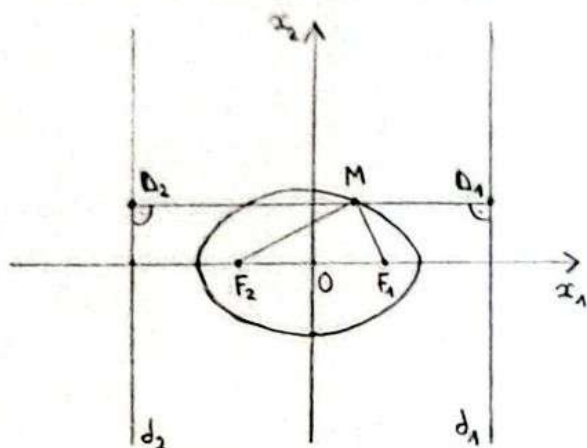


Жиже и директрисе елипсе



Жиже и директрисе хиперболе

По Теорему 1.15 За сваку од жижа важи да је однос растојања тачке од жиже и од одговарајуће директрисе једнак ексцентрицитету.



M - произвольна тачка са елипсе (хиперболе) чије су жиже F_1 и F_2 , а одговарајуће директрисе d_1 и d_2

D_1 - подножје нормале из M на d_1

D_2 - подножје нормале из M на d_2

$$d(M, F_1) = e \cdot d(M, d_1) = e \cdot d(M, D_1)$$

Теорема 1.15

$$d(M, F_2) = e \cdot d(M, d_2) = e \cdot d(M, D_2)$$

Теорема 1.15

Ако је коника елипса ова растојања сабирамо и добијамо

$$d(M, F_1) + d(M, F_2) = e \cdot d(M, D_1) + e \cdot d(M, D_2) = e \cdot (d(M, D_1) + d(M, D_2)) = e \cdot d(D_1, D_2) = e \cdot d(d_1, d_2),$$

а у случају да је коника хипербола посматрана растојања одузимамо и добијамо

$$|d(M, F_1) - d(M, F_2)| = |e \cdot d(M, D_1) - e \cdot d(M, D_2)| = |e \cdot (d(M, D_1) - d(M, D_2))| = e \cdot |d(M, D_1) - d(M, D_2)| = e \cdot d(D_1, D_2) = e \cdot d(d_1, d_2)$$

Израз $e \cdot d(d_1, d_2)$ је константан јер не зависи од избора тачке $M \in \Gamma$, чиме смо доказали следећу теорему.

Теорема 1.16 Збир растојања сваке тачке елипсе до њених жижа је константа.

Апсолутна вредност разлике растојања сваке тачке хиперболе до њених жижа је константа.

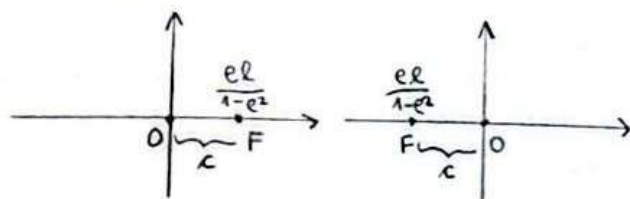
Користећи ову теорему можемо изразити ексцентрицитет e преко основних параметара конике који се виде у канонској једначини.

Линеарни ексцентрицитет је растојање (било које) жиже од центра конике и најчешће се обележава са c .

Када смо изводили канонске једначине коника користили смо трансформацију за вектор $(-\frac{e\ell}{1-e^2}, 0)$ која је померила жижу F из координатног почетка у тачку $(\frac{e\ell}{1-e^2}, 0)$ и то нам даје везу између линеарног ексцентрицитета $\mathcal{L}$ и ексцентрицитета e .

$$\mathcal{L} = \left| \frac{e\ell}{1-e^2} \right| = \frac{e\ell}{|1-e^2|} = e \cdot \frac{\ell}{|1-e^2|} = e \cdot a$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ e > 0 \\ \ell \geq 0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \uparrow \\ a = \frac{\ell}{|1-e^2|} \\ \text{по дефиницији} \end{matrix}$

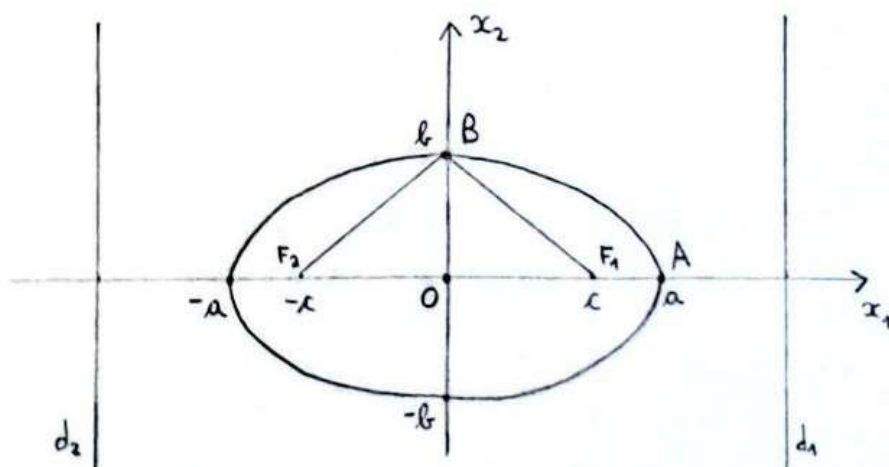


$$\Rightarrow e = \frac{\mathcal{L}}{a}$$

Сада нас занима веза између бројева a и b из канонске једначине конике (називамо их велики и мали полупречник) и броја $\mathcal{L}$.

Разликујемо два случаја.

1^о Посматрања коника је елипса која има канонску једначину $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ и постављена је тако да важи $a > b$. Тада су њене жиже $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$.



Нека су $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ темена елипсе, односно тачке са конике које се налазе на осамма. Тачке $A(a, 0)$, $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ су на Ox_1 оси.

$$d(A, F_1) + d(A, F_2) \stackrel{\downarrow}{=} (a - c) + (a - (-c)) = a - c + a + c = 2a$$

$$d(B, F_1) + d(B, F_2) \stackrel{\uparrow}{=} 2 \cdot \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\Delta BOF_1 \stackrel{\text{н.т.}}{\Rightarrow} BF_1 = \sqrt{OB^2 + OF_1^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\Delta BOF_2 \stackrel{\text{н.т.}}{\Rightarrow} BF_2 = \sqrt{OB^2 + OF_2^2} = \sqrt{b^2 + (-c)^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

На основу Теореме 1.16 је збир растојања сваке тачке елипсе до њених жижа константа, те је $d(A, F_1) + d(A, F_2) = d(B, F_1) + d(B, F_2)$.

$$\begin{aligned} 2a &= 2\sqrt{b^2 + c^2} \\ a &= \sqrt{b^2 + c^2} \quad / (*)^2 \end{aligned}$$

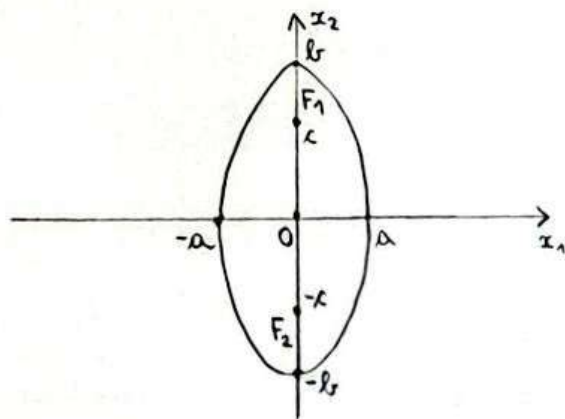
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} c > 0 \text{ по дефиницији}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

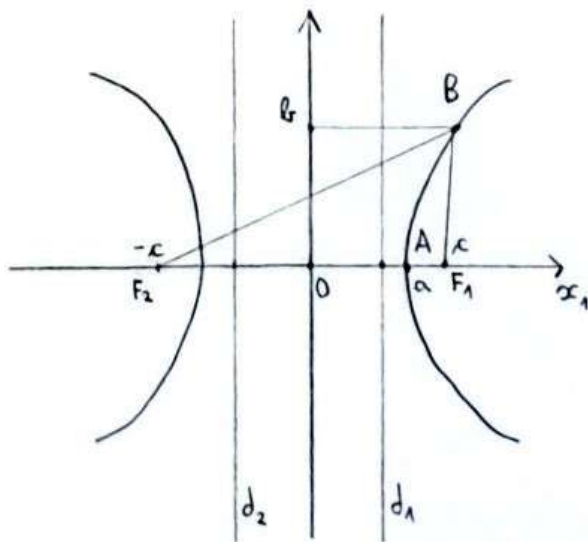
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Напомена: У случају да је $a < b$ жиже се налазе на x_2 -оси, а не на x_1 -оси и њихове координате су $(0, -c)$ и $(0, c)$, док је $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.



Ове случајеве можемо објединити помоћу $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$ и $e = \frac{c}{a}$.

2° случај Посматрана коника је хипербола са канонском једначином $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$.



Посматрајмо тачку $A(a, 0)$ хиперболе и тачку $B(a\sqrt{2}, b)$

$$|d(A, F_1) - d(A, F_2)| = |(c-a) - (c+a)| = |c-a-c-a| = |-2a| = -(-2a) = 2a$$

Тачке $A(a, 0)$, $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ су на Ox_1 осн. $-2a < 0$ за $a > 0$

$$|d(B, F_1) - d(B, F_2)| = |\sqrt{(a\sqrt{2}-c)^2 + b^2} - \sqrt{(a\sqrt{2}+c)^2 + b^2}|$$

$$BF_1 = \sqrt{(a\sqrt{2}-c)^2 + b^2}$$

$$BF_2 = \sqrt{(a\sqrt{2}+c)^2 + b^2}$$

Применом Теореме 1.16 на тачке А и В са хиперболе добијамо да је

$$|d(A, F_1) - d(A, F_2)| = |d(B, F_1) - d(B, F_2)|$$

$$2a = |\sqrt{(a\sqrt{2}-c)^2 + b^2} - \sqrt{(a\sqrt{2}+c)^2 + b^2}| \quad / (1)^2$$

$$4a^2 = (a\sqrt{2}-c)^2 + b^2 + (a\sqrt{2}+c)^2 + b^2 - 2\sqrt{(a\sqrt{2}-c)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(a\sqrt{2}+c)^2 + b^2}$$

$$4a^2 = \cancel{2a^2} - 2\sqrt{2}ac + c^2 + b^2 + \cancel{2a^2} + 2\sqrt{2}ac + c^2 + b^2 - 2\sqrt{2a^2 - 2\sqrt{2}ac + c^2 + b^2} \cdot \sqrt{2a^2 + 2\sqrt{2}ac + c^2 + b^2}$$

$$2\sqrt{(2a^2 + c^2 + b^2 - 2ac\sqrt{2}) \cdot (2a^2 + c^2 + b^2 + 2ac\sqrt{2})} = 2 \cdot (b^2 + c^2)$$

$$\sqrt{(2a^2 + c^2 + b^2)^2 - (2ac\sqrt{2})^2} = b^2 + c^2 \quad / (1)^2$$

$$(2a^2 + c^2 + b^2)^2 - (2ac\sqrt{2})^2 = (b^2 + c^2)^2$$

$$4a^4 + \cancel{c^4} + \cancel{b^4} + 4a^2c^2 + 4a^2b^2 + 2\cancel{b^2c^2} - 8a^2c^2 = \cancel{b^4} + 2\cancel{b^2c^2} + \cancel{c^4}$$

$$4a^4 - 4a^2c^2 + 4a^2b^2 = 0 \quad / : 4a^2 \neq 0$$

$$a^2 - c^2 + b^2 = 0$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

$$\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}}$$