

1.6. Поларне координате

Посматрамо равн, односно дводимензиони простор.

Круг је скуп свих тачака равни подједнако удаљених од неке тачке.

$k(S, r) \leftarrow$ круг чије су тачке на растојању r од тачке S

S зовемо центар круга k , а r полупречник круга.

Тачке X са круга k се могу описати једначином $\|\vec{SX}\| = r$.

Ако је произволна тачка круга $X(x_1, x_2)$, а центар $S(s_1, s_2)$, тада је

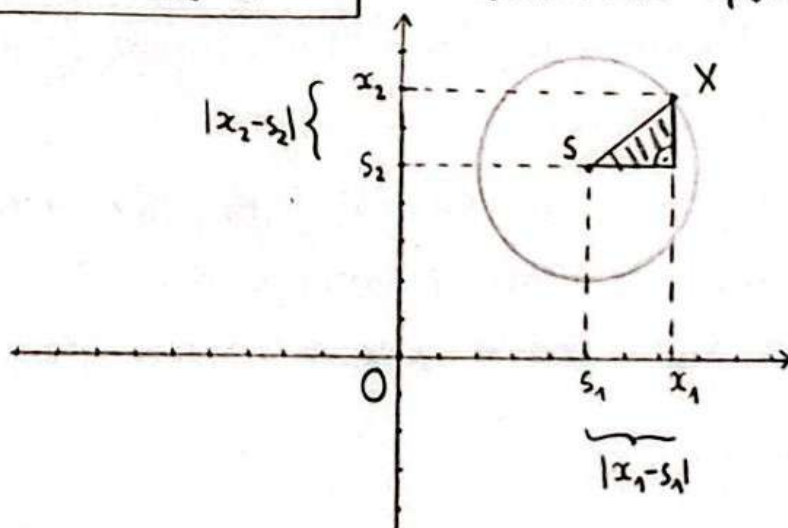
$$\|\vec{SX}\| = r$$

$$\|(x_1 - s_1, x_2 - s_2)\| = r$$

$$\sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2} = r \quad |()^2$$

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 = r^2$$

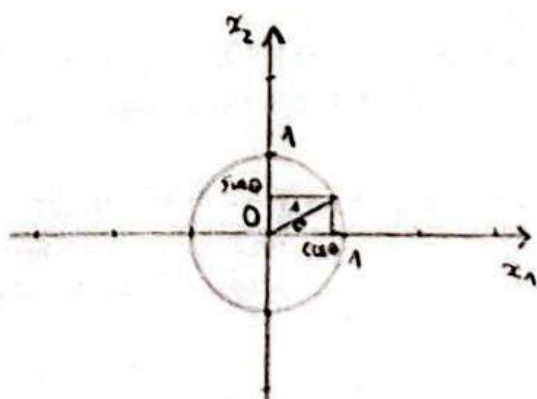
једначина круга



Пример Јединични центрирани круг (центар му је у координатном

почетку) $k(0, 1)$ има једначину $(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 = 1^2$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$



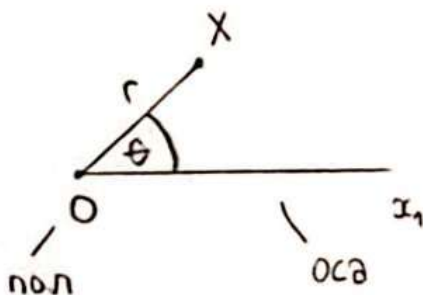
Круг $k(0, 1)$ можемо записати и у параметарском

облику: $x_1 = \cos \theta$

$$x_2 = \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

До сада коришћени правоугли Декартов координатни систем је нај-погоднији за изражавање линеарних елемената (права, раван), а за неке квадратне елементе (као што је круг) погоднији је другачији координатни систем.

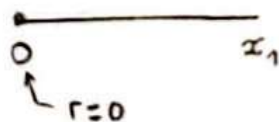
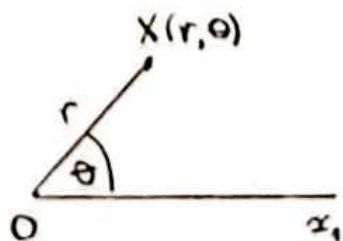
Поларни координатни систем је координатни систем у равни ($\dim E = 2$) који карактерише тачка $O \in E$ коју зовемо пол и полупрва $[Ox_1)$ са почетком у O коју зовемо оса.



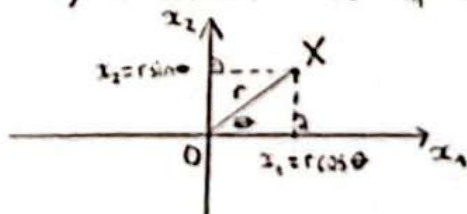
Тачка $X \in E$ различита од O једнозначно је одређена растојањем $r > 0$ од пола ($r = d(O, X)$) и оријентисаним углом θ који полупрва $[Ox_1)$ заклапа са осом $[Ox_1)$.

Поларне координате чини уређен пар (r, θ) , при чему угао θ одговара било ком од углова $\theta + 2n\pi$ за цео број n .

тачку O описује само $r=0$ и у том случају угао θ не постоји.



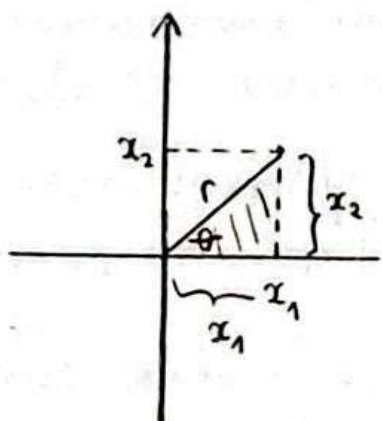
Веза поларног координатног система са правоуглим Декартовим координатним системом добијамо тако што поклопимо пол O са координатним почетком, а поларну осу поклопимо са x_1 осом:



$X(x_1, x_2) \leftarrow$ координате у Декартовом правоуглом координатном систему
 $x(r, \theta) \leftarrow$ поларне координате

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

Сада нас занимају обратне везе, односно како се поларне координате изражавају помоћу координата у Декартовом правоуглом координатном систему.



$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Ако је $x_1 \neq 0$ тада је $\operatorname{tg} \theta = \frac{x_2}{x_1}$,

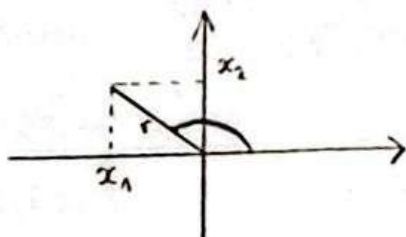
а ако је $x_2 \neq 0$ тада је $\operatorname{ctg} \theta = \frac{x_1}{x_2}$.

У супротном је $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, тј. тачка се поклапа са координатним почетком, те је $r = 0$, док угао θ није дефинисан.

Запишимо експлицитну формулу за угао θ у случају да је $x_1 \neq 0$.

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} + \frac{\pi}{2} \cdot (1 - \operatorname{sgn}(x_1))$$

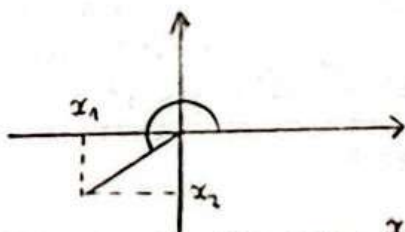
за $x_1 < 0$ је $\operatorname{sgn} x_1 = -1$ те је $\theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} + \frac{\pi}{2} \cdot (1 - (-1)) = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} + \pi$



← слика за $x_2 > 0$

$$\frac{x_2}{x_1} \leq 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$$

$$\Rightarrow \theta = \pi + \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$$

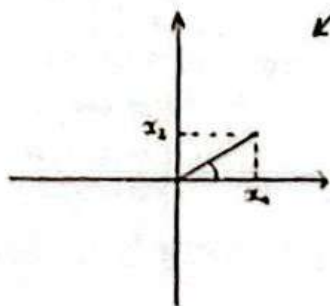


← слика за $x_2 < 0$

$$\frac{x_2}{x_1} > 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \theta = \pi + \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$$

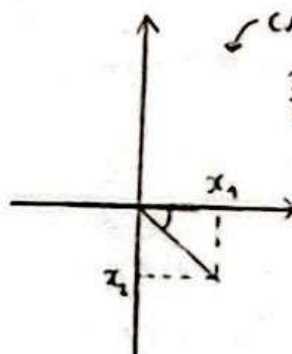
за $x_1 > 0$ је $\operatorname{sgn} x_1 = 1$ те је $\theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} + \frac{\pi}{2} \cdot (1 - 1) = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}$



← слика за $x_2 > 0$

$$\frac{x_2}{x_1} > 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \in [0, \frac{\pi}{2})$$

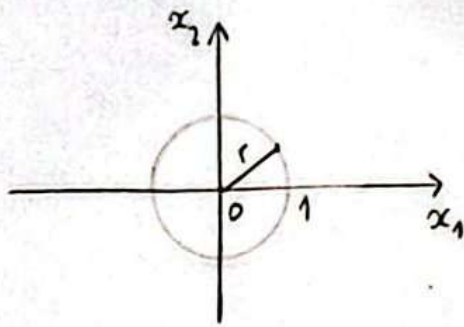
$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}$$



← слика за $x_2 < 0$

$$\frac{x_2}{x_1} < 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

Пример

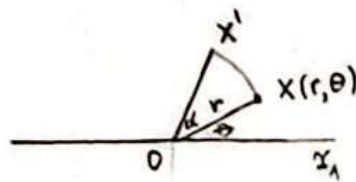


Већ смо видели да центрирани јединични круг у Декартовом правоуглом координатном систему има једначину $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

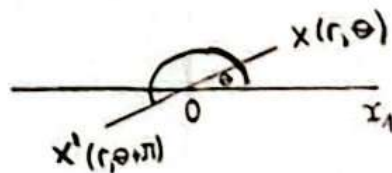
У поларном координатном систему тај круг има једначину $r = 1$.

Геометријске трансформације равни су пресликавања равни $\mathbb{E}$ на саму себе. Оне геометријске трансформације које не померају тачку O могу се једноставно изразити у поларном координатном систему са полом O . Погледајмо шта су слике неке тачке (r, θ) при неким познатим трансформацијама.

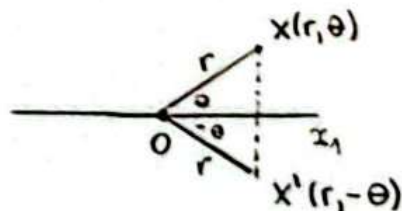
Слика при ротацији око тачке O за угао α је тачка $(r, \theta + \alpha)$.



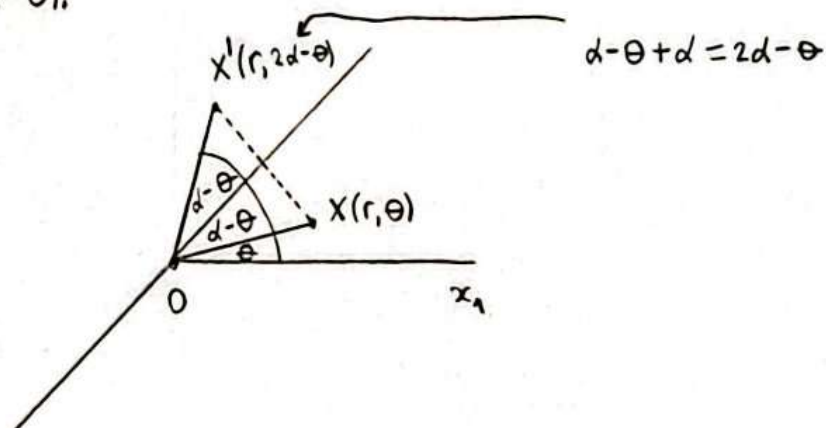
Централна симетрија са центром O даје слику $(r, \theta + \pi)$.



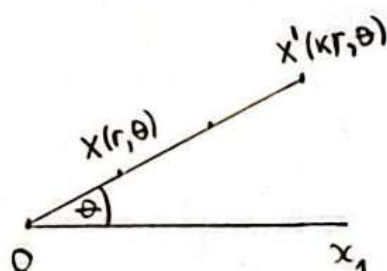
Осна симетрија у односу на x_1 даје слику $(r, -\theta)$.



Осна симетрија у односу на праву кроз O која је под углом α у односу на x_1 даје слику $(r, 2\alpha - \theta)$.



Хомотетија са центром O и коефицијентом k то даје слику (kr, θ) .



Поларне координате могу нам олакшати извођење једначина неких трансформација у правоуглим Декартовим координатама.

Пример Већ смо видели да ротација око тачке O за угао α представља пресликавање $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \alpha)$ у поларним координатама.

Ако је то пресликавање у правоуглим Декартовим координатама записано помоћу $(x_1, x_2) \mapsto (x'_1, x'_2)$, тада је

$$x'_1 = r' \cos \theta' = \overset{r'=r \quad \theta'=\theta+\alpha}{r \cos(\theta+\alpha)} = r \cdot (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) = r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha$$

$$= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{array} \right. \leftarrow \text{веза између Декартових правоуглих координата и поларних координата}$$

$$x'_2 = r' \sin \theta' = \overset{r'=r \quad \theta'=\theta+\alpha}{r \sin(\theta+\alpha)} = r \cdot (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) = r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha$$

$$= x_2 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{array} \right.$$

и тако добијемо једначине ротације

$$\boxed{\begin{array}{l} x'_1 = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x'_2 = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{array}}$$

(1.31)