

1.5. Растојања и углови

Посматрајмо тродимензиони простор у којем имамо раван τ задату општом једначином $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$.

Занима нас колико износи растојање тачке $P(p_1, p_2, p_3)$ од равни τ .

Π — права кроз тачку P нормална на раван τ

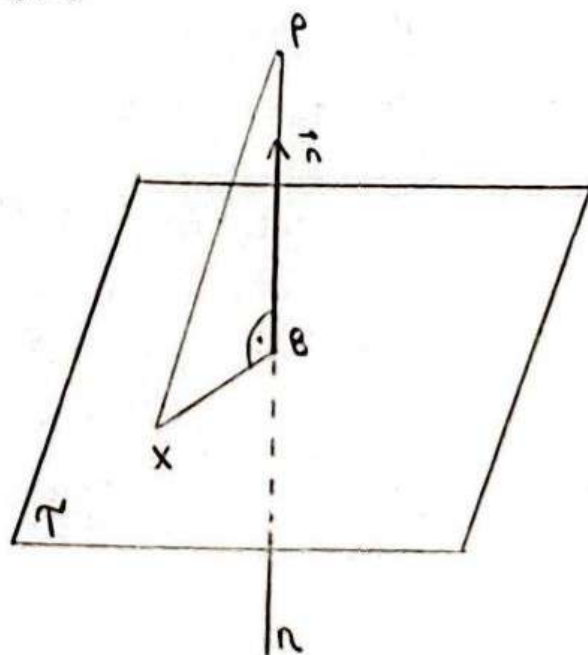
$\{B\} = \Pi \cap \tau$, односно B је подножије нормале Π на раван τ

$$d(P, \tau) = \inf_{X \in \tau} d(P, X) = \inf_{X \in \tau} \|\vec{PX}\|$$

↑
растојање
тачке P
од равни τ

↑
инфимум скупа
растојања тачака
 P и X , где је
 $X \in \tau$ произволна
тачка

↑
Растојање $d(P, X)$ између тачака P и X
једнако је норми вектора $\vec{PX}$ који је
одређен почетном тачком P и крајњом
тачком X



$$\vec{PX} = \vec{PB} + \vec{BX}$$

(1.10)

$$\|\vec{PX}\|^2 = \vec{PX} \cdot \vec{PX} = (\vec{PB} + \vec{BX}) \cdot (\vec{PB} + \vec{BX}) = \vec{PB} \cdot \vec{PB} + \vec{PB} \cdot \vec{BX} + \vec{BX} \cdot \vec{PB} + \vec{BX} \cdot \vec{BX} =$$

$$= \underbrace{\|\vec{PB}\|^2}_{(1.9)} + 2\vec{PB} \cdot \vec{BX} + \|\vec{BX}\|^2 = \|\vec{PB}\|^2 + \|\vec{BX}\|^2 \geq \|\vec{PB}\|^2 \Rightarrow \inf_{X \in \tau} \|\vec{PX}\| = \|\vec{PB}\|, \text{ односно}$$

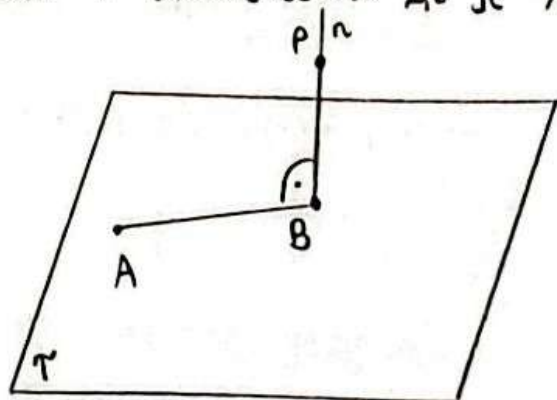
$\vec{PB} \perp \vec{BX} \Rightarrow \vec{PB} \cdot \vec{BX} = 0$
↑
 $\|\vec{BX}\|^2 \geq 0$
инфимум се достиже у тачки B

$$\Rightarrow \boxed{d(P, \tau) = \|\vec{PB}\| = \|\vec{BP}\|}, \text{ где је } B \text{ подножије нормале из тачке } P \text{ на раван } \tau$$

Нека је $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ вектор правца праве π ($\vec{n} = \vec{u}_\pi$) и вектор нормале равни τ , односно $\vec{n} = \vec{n}_\tau$.

$B \in \pi, P \in \pi \Rightarrow \vec{BP}$ и $\vec{n}$ су колинеарни вектори $\Rightarrow \angle(\vec{BP}, \vec{n}) = 0$ или $\angle(\vec{BP}, \vec{n}) = \pi$
 $\Rightarrow \cos \angle(\vec{BP}, \vec{n}) = 1$ или $\cos \angle(\vec{BP}, \vec{n}) = -1 \Rightarrow |\vec{BP} \cdot \vec{n}| = \|\vec{BP}\| \cdot \|\vec{n}\| \cos \angle(\vec{BP}, \vec{n}) = \|\vec{BP}\| \cdot \|\vec{n}\|$

$B \in \tau$, те ако је $A(a_1, a_2, a_3)$ нека тачка равни τ , из векторске једначине равни τ закључујемо да је $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$.



$$\vec{BP} \cdot \vec{n} = (\vec{AP} - \vec{AB}) \cdot \vec{n} \stackrel{(1.10)}{=} \vec{AP} \cdot \vec{n} - \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{n}}_{=0} = \vec{AP} \cdot \vec{n} = (\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot \vec{n} = \vec{OP} \cdot \vec{n} - \vec{OA} \cdot \vec{n} =$$

$$= p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 - a_1 n_1 - a_2 n_2 - a_3 n_3 = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 + n_4$$

↑
скаларни производ
преко координата

$$A \in \tau: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 = 0$$

$$\Rightarrow n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + n_4 = 0$$

$$\Rightarrow n_4 = -a_1 n_1 - a_2 n_2 - a_3 n_3$$

$$\Rightarrow \|\vec{BP}\| \cdot \|\vec{n}\| = |\vec{BP} \cdot \vec{n}| = |p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 + n_4|$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{\|\vec{n}\|^2} = \sqrt{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$\uparrow$$

$$[\vec{n}]_e = (n_1, n_2, n_3)$$

$$\text{те је } d(P, \tau) = \|\vec{BP}\| = \frac{|p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 + n_4|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad (\vec{n} \neq \vec{0} \text{ јер вектор}$$

нормале равни τ не може бити $\vec{0}$, те смо делили са $\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \neq 0$)

чиме смо доказали следећу теорему.

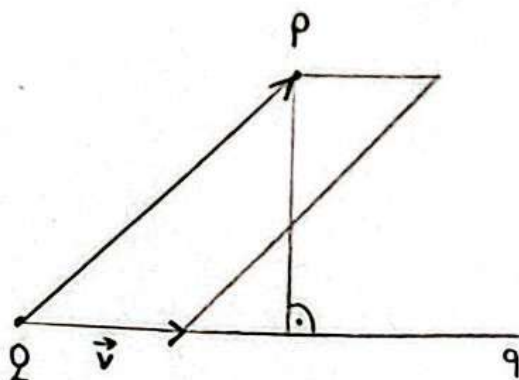
Теорема 1.12 Растојање тачке $P(p_1, p_2, p_3)$ од равни $\tau: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 = 0$

износи

$$d(P, \tau) = \frac{|p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 + n_4|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

Претпоставимо да је права q одређена тачком Q и правцем $\vec{v} = \vec{u}_q$.

Ако је тачка P ван праве q можемо посматрати паралелограм који разлику вектори $\vec{QP}$ и $\vec{v}$.



Означимо са $S(\vec{QP}, \vec{v})$ површину тог паралелограма.

На основу познате формуле за површину паралелограма из геометрије је $S(\vec{QP}, \vec{v}) = \underbrace{\|\vec{v}\|}_{\text{дужина}} \cdot \underbrace{d(P, q)}_{\text{дужина одговарајуће висине паралелограма}}.$

дужина
странице
паралелограма

дужина одговарајуће висине паралелограма

Са друге стране, на основу дефиниције векторског производа вектора имамо да је $S(\vec{QP}, \vec{v}) = \|\vec{QP} \times \vec{v}\|$.

Зато је $d(P, q) \cdot \|\vec{v}\| = S(\vec{QP}, \vec{v}) = \|\vec{QP} \times \vec{v}\|$, односно $d(P, q) = \frac{\|\vec{QP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$

(смели смо да поделимо са $\|\vec{v}\|$ јер је то ненула број зато што вектор правца $\vec{v}$ праве q не може бити нула вектор). Тиме је доказана следећа теорема.

Теорема 1.13 Растојање тачке P од праве q која има вектор правца $\vec{v}$ и садржи тачку Q износи $d(P, q) = \frac{\|\vec{QP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$

Ако су тачке P и Q дате помоћу координата $P(p_1, p_2, p_3)$ и $Q(q_1, q_2, q_3)$, а вектор $\vec{v}$ координате $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ у ортонормираној бази $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, тада на основу формуле за векторски производ вектора преко координата из лекције 1.3. Координате имамо да је

$$d(P, q) = \frac{\|\vec{QP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{\|\vec{v}\|^2}} =$$

$\uparrow$
 $[\vec{QP}]_e = (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3)$

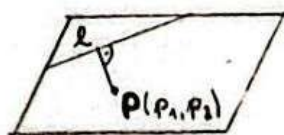
$$= \frac{\| \begin{vmatrix} p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} p_1 - q_1 & p_3 - q_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} p_1 - q_1 & p_2 - q_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left| \begin{vmatrix} p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} p_1 - q_1 & p_3 - q_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} p_1 - q_1 & p_2 - q_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right|^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Растојање тачке $P(p_1, p_2)$ од праве $\ell: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 = 0$ у равни поистовекујемо са растојањем тачке $P(p_1, p_2, 0)$ од равни $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 = 0$ у простору димензије 3 јер се оба растојања реализују дуж исте нормале и зато можемо применити Теорему 1.12 што нам директно даје доказ следеће теореме.

Теорема 1.14. Растојање тачке $P(p_1, p_2)$ од праве $\ell: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 = 0$ у равни износи $d(P, \ell) = \frac{|p_1 n_1 + p_2 n_2 + n_3|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$.

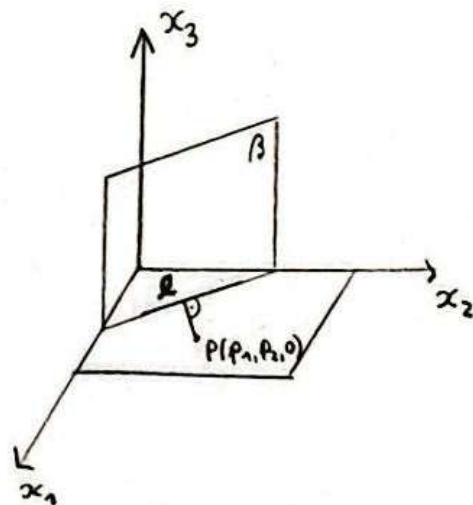
✦ Доказ:



$$\ell: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 = 0$$

$\Rightarrow (n_1, n_2)$ је вектор нормале на праву ℓ , те је $(-n_2, n_1)$ вектор правца праве ℓ

Посматрају почетну раван поистовекујемо са равни $x_3 = 0$ у простору димензије 3. Тада тачка P постаје тачка $P(p_1, p_2, 0)$, а тражено растојање једнако је растојању тачке $P(p_1, p_2, 0)$ од равни β која садржи праву ℓ и која је нормална на равни $x_3 = 0$, односно на $Ox_1 x_2$ равни.



Раван $\beta: \tilde{n}_1 x_1 + \tilde{n}_2 x_2 + \tilde{n}_3 x_3 + \tilde{n}_4 = 0$ има вектор нормале $(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \tilde{n}_3)$ који је нормалан на вектор правца праве ℓ , а то је $(-n_2, n_1, 0)$ и на вектор $(0, 0, 1)$ јер је ос Ox_3 паралелна са равни β , те можемо сматрати да је вектор нормале равни β вектор $(-n_2, n_1, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} -n_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} -n_2 & n_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = n_1 \vec{e}_1 - (-n_2) \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2$, тј. $(n_1, n_2, 0)$

Те је равн β са једначином $n_1 x_1 + n_2 x_2 + 0 \cdot x_3 + \tilde{n}_4 = 0$

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \tilde{n}_4 = 0$$

За тачку $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ са праве $\ell: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 = 0$ важи да је $n_1 \tilde{x}_1 + n_2 \tilde{x}_2 + n_3 = 0 \Rightarrow$ Тачка $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 0)$ припада равни β која садржи ℓ .



$$\Rightarrow n_1 \tilde{x}_1 + n_2 \tilde{x}_2 + \tilde{n}_4 = 0$$

$$\tilde{n}_4 = -n_1 \tilde{x}_1 - n_2 \tilde{x}_2 = n_3$$

$\uparrow$
из $\otimes$

Зато равн β има једначину $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 = 0$,

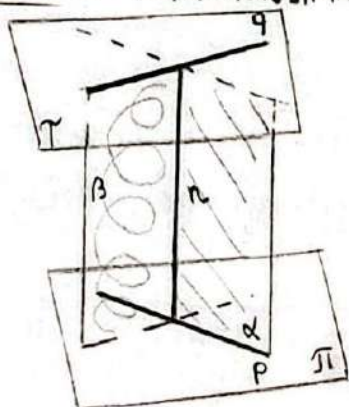
$$\text{Те је } d(P, \ell) = d(P, \beta) = \frac{|P_1 n_1 + P_2 n_2 + n_3|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}.$$

Теорема 1.12.

+

Мимоилазне праве су праве у простору за које не постоји раван која их садржи, односно које се не секу и нису паралелне.

Из еуклидске геометрије знамо да за две мимоилазне праве постоји тачно једна права која их сече и нормална је на њих. Она се зове заједничка нормала мимоилазних правах.

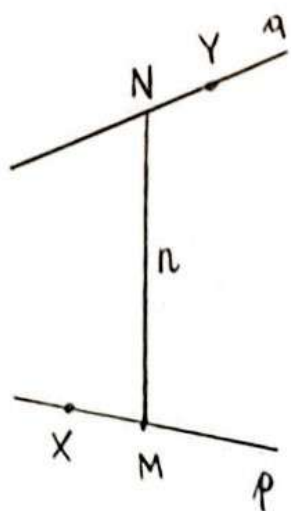


Опишимо како се конструише заједничка нормала n мимоилазних правах p и q . Из $n \perp p$ и $n \perp q$ следи да права n мора бити нормална на раван π која садржи праву p и паралелна је са q и на раван τ која садржи q , а паралелна је са p . Све могуће нормале налазике се у равни α која садржи p и нормална је на раван π , као и у равни β која садржи q и нормална је на раван τ и зато је права n пресек тих двеју равни.

Растојање између мимоилазних правих остварује се заш дуж заједничке нормале n .

$$\{M\} = n \cap p$$

$$\{N\} = n \cap q$$



Замета, $d(p, q) = \inf_{x \in p, y \in q} d(x, y) = \inf_{x \in p, y \in q} \|\vec{xy}\| = \|\vec{MN}\|$

$$\vec{XY} = \vec{XM} + \vec{MN} + \vec{NY} = \vec{XM} + \vec{NY} + \vec{MN} = (\vec{XM} + \vec{NY}) + \vec{MN}$$

↑
↑

правило
(1.2)
(1.10)

35 нрз

$$\begin{aligned} \|\vec{XY}\|^2 &= \vec{XY} \cdot \vec{XY} = ((\vec{XM} + \vec{NY}) + \vec{MN}) \cdot ((\vec{XM} + \vec{NY}) + \vec{MN}) \stackrel{(1.10)}{=} (\vec{XM} + \vec{NY}) \cdot (\vec{XM} + \vec{NY}) + (\vec{XM} + \vec{NY}) \cdot \vec{MN} \\ &+ \vec{MN} \cdot (\vec{XM} + \vec{NY}) + \vec{MN} \cdot \vec{MN} \stackrel{(1.9)}{=} \|\vec{XM} + \vec{NY}\|^2 + 2(\vec{XM} + \vec{NY}) \cdot \vec{MN} + \|\vec{MN}\|^2 = \\ &= \|\vec{XM} + \vec{NY}\|^2 + 2\vec{XM} \cdot \vec{MN} + 2\vec{NY} \cdot \vec{MN} + \|\vec{MN}\|^2 \stackrel{\uparrow}{=} \|\vec{XM} + \vec{NY}\|^2 + \|\vec{MN}\|^2 \geq \|\vec{MN}\|^2 \end{aligned}$$

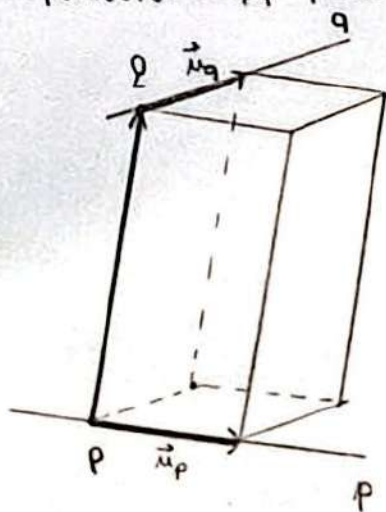
Једнакост се
достигне
када је
 $X=M$ и $Y=N$.

$$\begin{aligned} p \perp n &\Rightarrow XM \perp MN \Rightarrow \vec{XM} \cdot \vec{MN} = 0 \\ q \perp n &\Rightarrow NY \perp MN \Rightarrow \vec{NY} \cdot \vec{MN} = 0 \end{aligned}$$

$$\|\vec{XM} + \vec{NY}\|^2 \geq 0$$

Сада нас занима како да израчунамо $d(p, q)$, ако је права p одређена тачком P и вектором правца $\vec{u}_p$, а права q је одређена тачком Q и правцем $\vec{u}_q$, при чему су нам познате координате тих датих елемената.

Посматрајмо паралелепипед разапет векторима $\vec{PQ}$, $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$.



Како заједничка нормала π за праве p и q мора бити нормална на правце правих p и q , то на основу Кошијеве теореме из еуклидске геометрије следи да π мора бити нормална и на горњу и на доњу основу посматраног паралелепипеда, те је растојање између мимоилазних правих p и q једнако висини тог паралелепипеда која је нормална на основу разапету векторима $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$. Зато је

$$V(\vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q) = V \cdot H = \underbrace{\|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\|}_{\text{површина базе}} \cdot d(p, q)$$

запремина паралелепипеда
разапетог векторима $\vec{PQ}$, $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$

по дефиницији векторског производа
ова дужина је једнака мерном
броју површине паралелограма
разапетог векторима $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$.

Са друге стране, на основу Теореме 1.9 важи да је $V(\vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q) = |[\vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q]|$

$$\Rightarrow \|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\| \cdot d(p, q) = V(\vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q) = |[\vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q]| \Rightarrow d(p, q) = \frac{|[\vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q]|}{\|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\|}$$

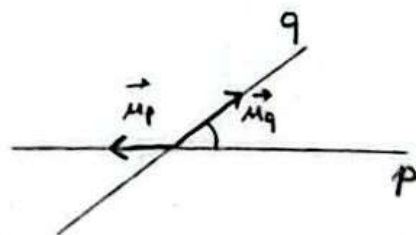
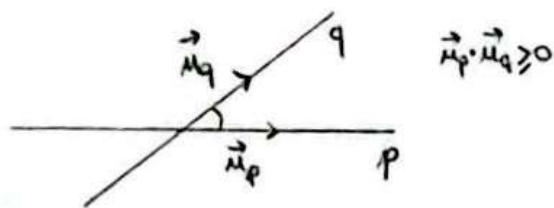
чиме смо доказали следећу теорему.

Теорема Растојање мимоилазних правих p и q одређених тачкама P и Q , редом и векторима правца $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$, редом, једнако је

$$d(p, q) = \frac{|[\vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q]|}{\|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\|}.$$

Углови

Угао између две праве p и q је не већи од углова које одређују њихове полуправе, те је $\angle(p, q) \in [0, \frac{\pi}{2}]$.



$\vec{m}_p \cdot \vec{m}_q < 0$ јер је $\angle(\vec{m}_p, \vec{m}_q) > \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}\vec{m}_p \cdot \vec{m}_q &= \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{m}_q\| \cos \angle(\vec{m}_p, \vec{m}_q) \\ &= \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{m}_q\| \cos \angle(p, q)\end{aligned}$$

$\angle(p, q)$ и $\angle(\vec{m}_p, \vec{m}_q)$ су

једнаки

$$\Rightarrow \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{m}_q\| \cos \angle(p, q) = \vec{m}_p \cdot \vec{m}_q = |\vec{m}_p \cdot \vec{m}_q|$$

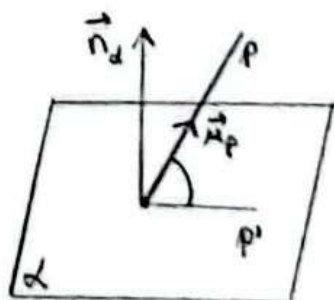
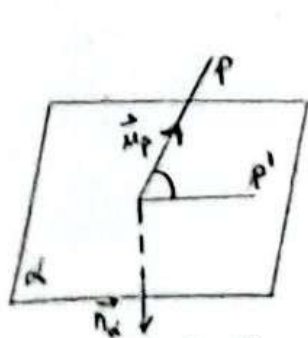
$$\begin{aligned}\vec{m}_p \cdot \vec{m}_q &= \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{m}_q\| \cos \angle(\vec{m}_p, \vec{m}_q) \\ &= \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{m}_q\| \cos (\pi - \angle(p, q)) \\ &= -\|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{m}_q\| \cos \angle(p, q)\end{aligned}$$

$\angle(p, q)$ и $\angle(\vec{m}_p, \vec{m}_q)$ су суплементни

$$\Rightarrow \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{m}_q\| \cos \angle(p, q) = -\vec{m}_p \cdot \vec{m}_q = |\vec{m}_p \cdot \vec{m}_q|$$

У сваком случају важи да је $|\vec{m}_p \cdot \vec{m}_q| = \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{m}_q\| \cdot \cos \angle(p, q)$

Угао између праве p и равни α је угао између праве p и њене ортогоналне пројекције на раван α .



p' - ортогонална пројекција
праве p на раван α

$\vec{n}_\alpha$ - вектор нормале на раван α

$$|\vec{m}_p \cdot \vec{n}_\alpha| = \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\| \cdot \cos \angle(\vec{m}_p, \vec{n}_\alpha) = \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\| \cdot |\cos \angle(\vec{m}_p, \vec{n}_\alpha)| =$$

$$= \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\| \cdot |\sin \angle(p, p')| = \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\| \sin \angle(p, \alpha)$$

$$\angle(p, p') = \angle(p, \alpha) \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\angle(p, p') = \frac{\pi}{2} - \angle(\vec{m}_p, \vec{n}_\alpha) \quad \text{тј.} \quad \sin \angle(p, p') = \cos \angle(\vec{m}_p, \vec{n}_\alpha) \quad \text{или}$$

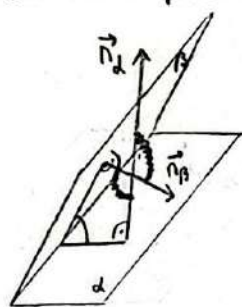
$$\angle(p, p') = \angle(\vec{m}_p, \vec{n}_\alpha) - \frac{\pi}{2} \quad \text{тј.} \quad \sin \angle(p, p') = \sin (\angle(\vec{m}_p, \vec{n}_\alpha) - \frac{\pi}{2})$$

$$= \sin \angle(\vec{m}_p, \vec{n}_\alpha) \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \cos \angle(\vec{m}_p, \vec{n}_\alpha) \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -\cos \angle(\vec{m}_p, \vec{n}_\alpha),$$

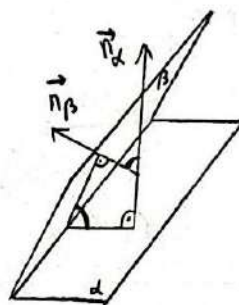
а у сваком случају је $|\cos \angle(\vec{m}_p, \vec{n}_\alpha)| = |\sin \angle(p, p')|$

Дакле, $|\vec{m}_p \cdot \vec{n}_\alpha| = \|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\| \sin \angle(p, \alpha)$

Угао између две равни α и β једнак је углу између нормала на те равни (углови са нормалним крацима су једнаки или су суплементни).



$$\varphi(\alpha, \beta) = \pi - \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$$



$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$$

$$|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta| = |\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\| \cdot \cos \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)| = \|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\| \cdot |\cos \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)|$$

$$= \|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\| \cdot \cos(\alpha, \beta)$$

↑ $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$, те је $\cos \varphi(\alpha, \beta) = \cos \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$ или

$\varphi(\alpha, \beta) = \pi - \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$, те је $\cos \varphi(\alpha, \beta) = -\cos \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$

У сваком случају је $|\cos \varphi(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)| = \cos \varphi(\alpha, \beta)$.

≥ 0 јер је $\varphi(\alpha, \beta) \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(по дефиницији угао између правих (нормала) је оштар или прав)

Дакле, $\boxed{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta| = \|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\| \cdot \cos \varphi(\alpha, \beta)}$