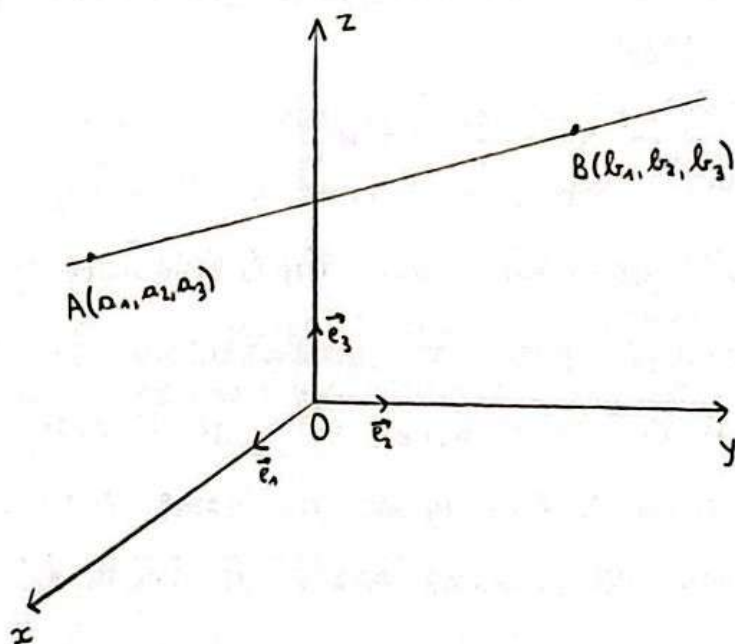


1.4. Прáva и равán

Нека је (O, e) координатни систем који се састоји од тачке O и неке базе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ простора U димензије 3.

Правá

Нека су $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ различите тачке које су дате својим координатама. На основу аксиоме инциденције еуклидске геометрије постоји тачно једна права која садржи две различите тачке, те нека је $p = AB$ права одређена тачкама A и B .



Тачка $X(x_1, x_2, x_3)$ је на правој $p = AB$, односно тачке A, B и X су колинеарне тачке ако су вектори $\vec{AX}$ и $\vec{AB}$ колинеарни, односно постоји скалар $k \in \mathbb{R}$ такав да је $\vec{AX} = k \cdot \vec{AB}$.

$$\vec{OX} - \vec{OA} = k \cdot (\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$[X]_{oe} - [A]_{oe} = k \cdot ([B]_{oe} - [A]_{oe})$$

$$(x_1, x_2, x_3) - (a_1, a_2, a_3) = k \cdot ((b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3))$$

$$(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) = k \cdot (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$x_1 - a_1 = k \cdot (b_1 - a_1) \quad x_2 - a_2 = k \cdot (b_2 - a_2) \quad x_3 - a_3 = k \cdot (b_3 - a_3)$$

Дакле, вектор $\vec{u}_p = \vec{AB}$ са координатама $(v_1, v_2, v_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ одређује правца праве p , те је права p једнозначно одређена неком својом тачком (нпр. $A \in p$) и вектором правца праве p , односно вектором $\vec{u}_p$.

Једначине $\boxed{x_1 = a_1 + kv_1, \quad x_2 = a_2 + kv_2, \quad x_3 = a_3 + kv_3}$, $k \in \mathbb{R}$ називамо

параметарске једначине праве.

Приметимо да вектор правца праве p може бити било који умножак вектора $\vec{AB}$ ненула скаларом и самим тим није једнозначно одређен.

Када параметар k прође скуп реалних бројева, једначине $x_1 = a_1 + kv_1$, $x_2 = a_2 + kv_2$, $x_3 = a_3 + kv_3$ описују све тачке $X(x_1, x_2, x_3)$ са праве p .

† Нпр. за $k=0$ је $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$, односно $X \equiv A$,

за $k=1$ је $x_1 = a_1 + v_1 = a_1 + b_1 - a_1 = b_1$, $x_2 = a_2 + v_2 = a_2 + b_2 - a_2 = b_2$,
 $x_3 = a_3 + v_3 = a_3 + b_3 - a_3 = b_3$, односно $X \equiv B$. /

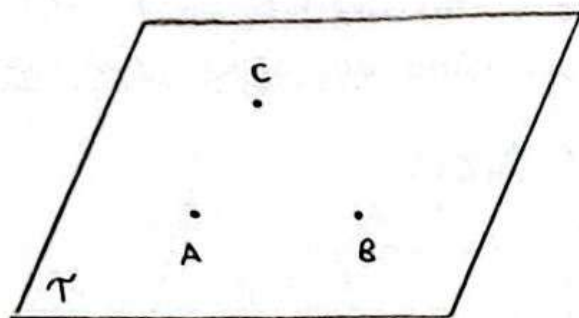
Изражавањем параметра k из параметарских једначина праве добијамо канонске једначине праве

$$\boxed{\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{v_3} (=k)}$$

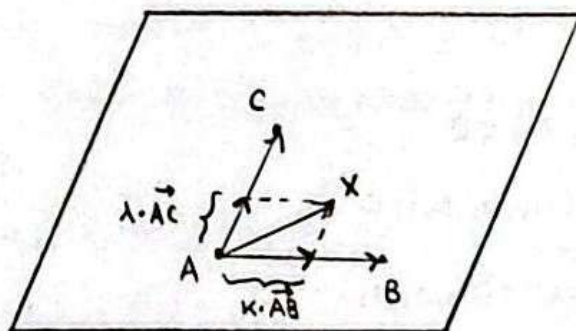
Напомена: Канонске једначине праве представљају скраћени запис параметарских једначина праве, те дозвољавамо да неки од именилаца v_1, v_2 и v_3 буде нула, али је забрањено да буде $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ јер вектор правца праве не може бити нула вектор. Дакле, у канонским једначинама праве је $(v_1, v_2, v_3) \neq (0, 0, 0)$.

Раван

На основу аксиоме инциденције еуклидске геометрије постоји јединствена раван τ која садржи три неколинеарне тачке A, B и C .



Како су тачке A, B и C неколинеарне, то су вектори $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ линеарно независни, а раван τ је одређена својом тачком A и векторима $\vec{u} = \vec{AB}$ и $\vec{v} = \vec{AC}$. Тачка X припада равни τ ако се њен вектор положаја у односу на тачку A може записати као линеарна комбинација вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, односно ако постоје скалари $k \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ такви да је $\vec{AX} = k\vec{u} + \lambda\vec{v}$.



Нека су $[\vec{u}]_e = (u_1, u_2, u_3)$ и $[\vec{v}]_e = (v_1, v_2, v_3)$ координате вектора $\vec{u} = \vec{AB}$ и $\vec{v} = \vec{AC}$ у бази e .

$$\vec{AX} = k\vec{u} + \lambda\vec{v}$$

$$(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) = k \cdot (u_1, u_2, u_3) + \lambda (v_1, v_2, v_3)$$

$$(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) = (ku_1 + \lambda v_1, ku_2 + \lambda v_2, ku_3 + \lambda v_3)$$

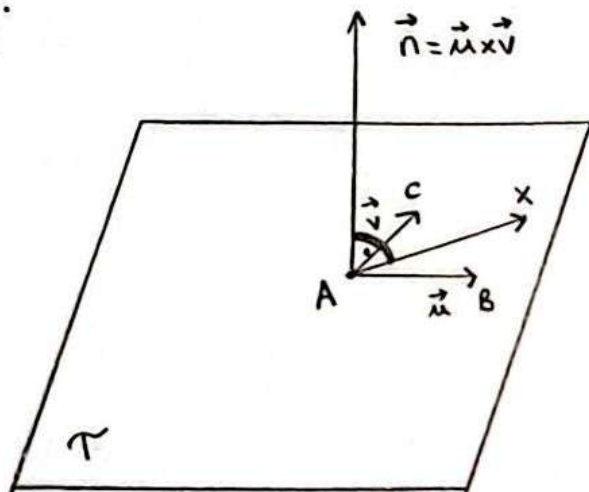
$$\begin{cases} x_1 = a_1 + ku_1 + \lambda v_1 \\ x_2 = a_2 + ku_2 + \lambda v_2 \\ x_3 = a_3 + ku_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Претходне три једначине називамо параметарске једначине равни.

По дефиницији векторског производа, векторски производ $\vec{u} \times \vec{v}$ линеарно независних вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ је нормалан на равни коју разапну вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$, те је $\vec{n}_T = \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ вектор нормале равни T .

Напоменимо да је и било који умножак вектора $\vec{n}_T$ ненула скаларом вектор нормале равни T , те вектор нормале равни није једнозначно одређен. Из $k\vec{u} + \lambda\vec{v} \perp \vec{n}$ добијамо векторску једначину равни T

$$\boxed{\vec{AX} \cdot \vec{n} = 0.}$$



Нека су $[A]_{0e} = (a_1, a_2, a_3)$ и $[X]_{0e} = (x_1, x_2, x_3)$ координате тачака A и X у координатном систему (O, e) , а $[\vec{n}]_e = (n_1, n_2, n_3)$ координате вектора нормале равни T у бази e .

$$\vec{AX} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(\vec{OX} - \vec{OA}) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$$

$$([X]_{0e} - [A]_{0e}) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$$

$$((x_1, x_2, x_3) - (a_1, a_2, a_3)) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$$

$$(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$$

$$(x_1 - a_1)n_1 + (x_2 - a_2)n_2 + (x_3 - a_3)n_3 = 0$$

$$n_1x_1 - n_1a_1 + n_2x_2 - n_2a_2 + n_3x_3 - n_3a_3 = 0$$

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3 = 0$$

Ако је база e орто-нормирана користимо формулу за рачунање скаларног производа преко координата коју смо извели у лекцији 1.3. Координате.

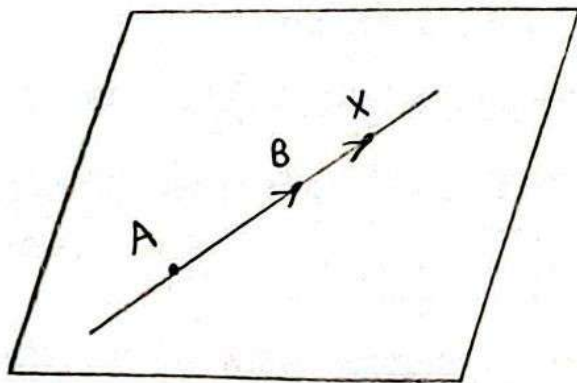
Нека је $n_4 = -n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3$.

Добијена једначина $\boxed{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0}$ зове се општа једначина равни.

Размотримо сада и случај векторског простора димензије 2.

Слично као у простору димензије 3 и у равни (која је димензије 2) можемо написати параметарске једначине праве са једном мање димензијом

$$\boxed{x_1 = a_1 + kV_1, \quad x_2 = a_2 + kV_2} \quad , k \in \mathbb{R}, \text{ при чему је } [A]_{oc} = (a_1, a_2) \text{ и } \vec{u}_p = (V_1, V_2) \text{ вектор правца те праве.}$$



$$\vec{AX} = k \cdot \vec{AB}$$

$$(x_1 - a_1, x_2 - a_2) = k \cdot (V_1, V_2)$$

$$x_1 - a_1 = kV_1$$

$$x_2 - a_2 = kV_2$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = a_1 + kV_1 & | \cdot V_2 \\ x_2 = a_2 + kV_2 & | \cdot V_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 V_2 = a_1 V_2 + kV_1 V_2 \\ x_2 V_1 = a_2 V_1 + kV_1 V_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \ominus \\ \ominus \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 V_2 - x_2 V_1 = a_1 V_2 - a_2 V_1 \end{array}$$

Увођењем нових ознака $n_1 = V_2$, $n_2 = -V_1$ и $n_3 = -(a_1 V_2 - a_2 V_1)$, добијамо општу једначину праве у равни, $\boxed{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 = 0}$ (1.24)

До ове једначине може се доћи и на други начин. Права у равни је одређена тачком $A(a_1, a_2)$ и вектором нормале $\vec{n}(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2)$, те се тачке X са те праве могу окарактерисати помоћу векторске једначине $\vec{AX} \cdot \vec{n} = 0$.

$$(x_1 - a_1, x_2 - a_2) \cdot (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2) = 0$$

$$\tilde{n}_1(x_1 - a_1) + \tilde{n}_2(x_2 - a_2) = 0$$

$$\tilde{n}_1 x_1 - \tilde{n}_1 a_1 + \tilde{n}_2 x_2 - \tilde{n}_2 a_2 = 0$$

$$\tilde{n}_1 x_1 + \tilde{n}_2 x_2 - (a_1 \tilde{n}_1 + a_2 \tilde{n}_2) = 0$$

Ако је база е ортонормирана смећмо користити формулу за скаларни производ из лекције 1.3. Координате.

Упоредивањем добијене једначине са једначином (1.24) закључујемо да мора бити $\vec{n}(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2) = \lambda \cdot (n_1, n_2) = \lambda(V_2, -V_1)$, односно ако је (V_1, V_2) вектор правца праве, онда је њен вектор нормале $\vec{n}(n_1, n_2)$ сразмеран вектору $\boxed{(V_2, -V_1)}$.

Општа једначина праве $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0$ је важна јер се свака права у равни може представити помоћу такве једначине.

Ако је $n_2 \neq 0$, односно $v_1 \neq 0$, читаву једначину $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0$ можемо поделити са $n_2 \neq 0$ и добити

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0 \quad / : n_2 \neq 0$$

$$\frac{n_1}{n_2}x_1 + x_2 + \frac{n_3}{n_2} = 0$$

$$x_2 = -\frac{n_1}{n_2}x_1 - \frac{n_3}{n_2}$$

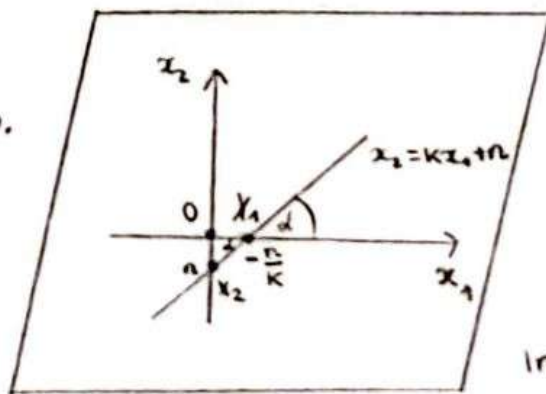
Ако означимо $k = -\frac{n_1}{n_2}$ и $n = -\frac{n_3}{n_2}$ добијамо експлицитну једначину праве

$$\boxed{x_2 = kx_1 + n}$$

Број k се зове коэффициент правца или нагиб праве и једнак је тангенсу угла који права гради са позитивним делом x_1 осе.

+

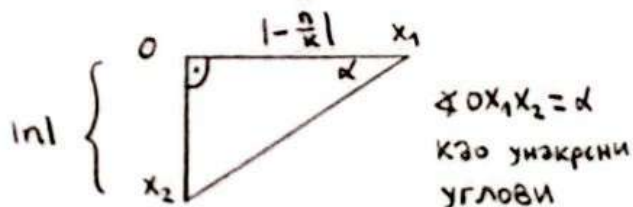
Слика и скица доказа у случају да је $k > 0$ и $n < 0$.



α - угао који права $x_2 = kx_1 + n$ закљача са позитивним делом x_1 осе

x_1	0	$-\frac{n}{k}$
$x_2 = kx_1 + n$	n	0

$$X_1(-\frac{n}{k}, 0), X_2(0, n)$$



$\angle OX_1X_2 = \alpha$
као унакрени
углови

$$\Delta OX_1X_2: \boxed{\tan \alpha = \frac{OX_2}{OX_1} = \frac{|n|}{|-\frac{n}{k}|} = \frac{-n}{k}}$$

Доказ се изводи слично и у осталим случајевима.

→ радимо случај када је $n < 0$ и $k > 0$

Напомена: Није свака права у равни представљива у облику $x_2 = kx_1 + n$. Једначине вертикалних права су облика $x_1 = c$, где је $c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

