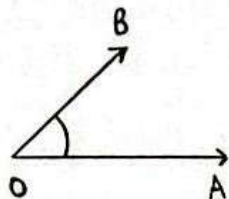


1.2. Векторска алгебра

Угао између $\vec{0}$ и произвољног вектора је $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

Угао између два ненула вектора $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ је не већи од угла између полуправих $[OA)$ и $[OB)$, односно $\angle(\vec{OA}, \vec{OB}) = \angle AOB \in [0, \pi]$.

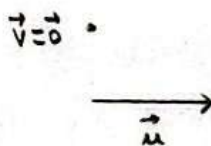
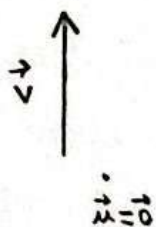
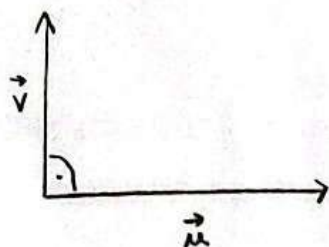


Угао између произвољних вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ добијамо помоћу Леме 1.3 тако што за произвољну тачку $O \in E$ постоје јединствене тачке A и B такве да је $\vec{u} = \vec{OA}$ и $\vec{v} = \vec{OB}$, те је $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{OA}, \vec{OB}) = \angle AOB$.

Скаларни производ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ је број

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}.$$

Уколико је $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ кажемо да су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ (међусобно) ортогонални и пишемо $\vec{u} \perp \vec{v}$, што се дешава кад је $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, односно $\vec{u} = \vec{0}$ или $\vec{v} = \vec{0}$ или $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.



У наредној Теорему 1.7 доказујемо основна својства скаларног производа.

Теорема 1.7 За векторе $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ и скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ важи:

$$(1.9) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(1.10) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(1.11) \quad (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(1.12) \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$$

$$(1.13) \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

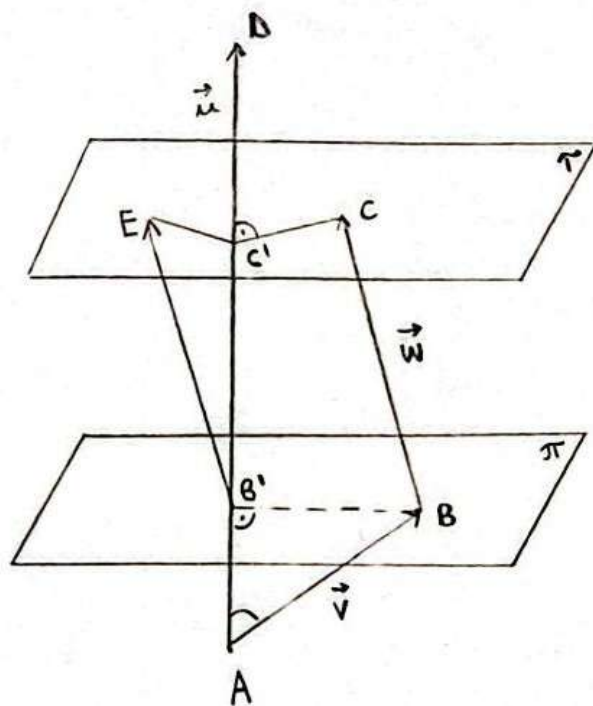
Доказ • Доказ за особину (1.9):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

• Доказ особине (1.10):

$$\vec{a} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \stackrel{?}{=} \vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{a} \cdot \vec{w}$$

За произвољну тачку А на основу Леме 1.3 постоје јединствене тачке В и D такве да је $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$. Затим за тачку В на основу Леме 1.3. постоји јединствена тачка С таква да је $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$.



Из елементарне еуклидске геометрије знамо да постоје јединствене равни π и τ такве да $BE \perp \pi$ и $\pi \perp AD$, односно $CE \perp \tau$ и $\tau \perp AD$.

B' - нормална пројекција тачке В на праву AD Тада је $\{B'\} = \pi \cap AD$.

C' - нормална пројекција тачке С на праву AD Тада је $\{C'\} = \tau \cap AD$.

$$\underline{\Delta ABB'}: |\cos \angle(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB})| = \frac{\|\overrightarrow{AB'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AB'}\|}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB'}\| = \|\vec{v}\| \cdot |\cos \angle(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB})| = \|\vec{v}\| \cdot |\cos \angle(\vec{a}, \vec{v})|$$

Докажимо да је $(\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB}) \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \overrightarrow{AB'}$. (*)

$$\|(\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB}) \vec{a}\| = |\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB}| \cdot \|\vec{a}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\overrightarrow{AB'}\| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \overrightarrow{AB'}) \cdot \|\vec{a}\| = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{AB'}\| \cdot |\cos \angle(\vec{a}, \vec{v})|$$

дефиниција умношка
вектора скаларом

$$\| \|\vec{a}\|^2 \overrightarrow{AB'} \| = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{AB'}\| = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\cos \angle(\vec{a}, \vec{v})|$$

$\Rightarrow$ Норме вектора $(\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB}) \vec{a}$ и $\|\vec{a}\|^2 \overrightarrow{AB'}$ су исте, а и смерови јер је

$$\text{sgn}(\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB}) = \text{sgn}(\vec{a} \cdot \vec{v}) = \text{sgn}(\cos \angle(\vec{a}, \vec{v})), \text{ те је } (\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB}) \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \overrightarrow{AB'}$$

$\|\vec{a}\|^2 > 0$ за $\vec{a} \neq \vec{0}$ (за $\vec{a} = \vec{0}$ тривијално важи да је $\vec{a} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{a} \cdot \vec{w}$ јер је $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$)

Слично се посматрањем правоуглог троугла ACC' добија

$$(\vec{a} \cdot \vec{AC}) \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \vec{AC}'. \quad (**)$$

Да бисмо изразили вектор $(\vec{a} \cdot \vec{BC}) \vec{a}$ на век приказан начин посматрамо $\vec{B'E}$ уместо $\vec{BC}$, где је E тачка дата помоћу $\vec{B'E} = \vec{BC}$ (Лема 1.3).

Приметимо да $E \in T$ (из $\vec{B'E} = \vec{BC}$ је $\vec{B'E} + \vec{BE} = \vec{BC} + \vec{BE}$, те је $\vec{B'E} = \vec{EC}$, одакле је $B'E \parallel EC$, а како је $AD \perp \pi$ и $AD \perp T$, то је $\pi \parallel T$, те из елементарне еуклидске геометрије закључујемо да права EC која садржи тачку $C \in T$ и паралелна је са $B'E \subset T$ мора припадати равни T , те $E \in T$) и да је $EC' \perp AD$. Посматрањем правоуглог троугла $B'C'E$ на раније описан начин добијамо $(\vec{a} \cdot \vec{B'E}) \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \cdot \vec{B'C'}$. (***)

Како је $\|\vec{a}\|^2 \vec{AB'} + \|\vec{a}\|^2 \vec{B'C'} = \|\vec{a}\|^2 \cdot (\vec{AB'} + \vec{B'C'}) = \|\vec{a}\|^2 \cdot \vec{AC'}$, то применом (*), (**) и (***) добијамо да је

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{AB}) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{B'E}) \vec{a} &= (\vec{a} \cdot \vec{AC}) \vec{a} \\ (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{w}) \vec{a} &= (\vec{a} \cdot (\vec{v} + \vec{w})) \vec{a} \\ (1.5) \downarrow (\vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{a} \cdot \vec{w}) \vec{a} &= (\vec{a} \cdot (\vec{v} + \vec{w})) \vec{a} \\ \vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{a} \cdot \vec{w} &= \vec{a} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \quad \text{што доказује особину (1.10).} \end{aligned}$$

$\vec{AB} = \vec{v}$
 $\vec{B'E} = \vec{BC} = \vec{w}$
 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{v} + \vec{w}$

• Доказ особине (1.11):

$$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{v} \stackrel{?}{=} \alpha (\vec{a} \cdot \vec{v})$$

За $\alpha = 0$ је $(0\vec{a}) \cdot \vec{v} = 0 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{v})$ односно $0 \cdot \vec{v} = 0$ што је тачно. За $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{v} = \vec{0}$ је $0 = 0$ што је тачно.

$$\text{За } \alpha \neq 0: (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{v} = \|\alpha \vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\alpha \vec{a}, \vec{v}) = |\alpha| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \underbrace{\text{sgn}(\alpha)}_{\uparrow} \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{v}) = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{v})$$

За $\alpha < 0$ је $\alpha \vec{a}$ супротног смера од $\vec{a}$, те је

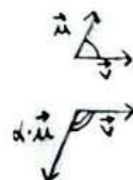
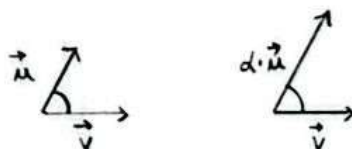
$$\angle(\alpha \vec{a}, \vec{v}) = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{v}) \quad \text{одакле је}$$

$$\cos \angle(\alpha \vec{a}, \vec{v}) = -\cos \angle(\vec{a}, \vec{v}) = \text{sgn}(\alpha) \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{v})$$

косинуси суплементних углова су супротног знака

За $\alpha > 0$ је $\alpha \vec{a}$ истог смера као $\vec{a}$, те је

$$\angle(\alpha \vec{a}, \vec{v}) = \angle(\vec{a}, \vec{v}) \quad \text{одакле је } \cos \angle(\alpha \vec{a}, \vec{v}) = \cos \angle(\vec{a}, \vec{v}) = \text{sgn}(\alpha) \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{v})$$



Доказ за особину (1.12):

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \stackrel{?}{\geq} 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2 \cdot \cos 0 = \|\vec{a}\|^2 \cdot 1 = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$$

по дефиницији скаларног производа вектора

Доказ за особину (1.13):

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 \cdot \cos 0 = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

□

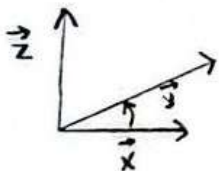
У наставку уводимо векторски производ вектора као бинарну релацију која векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ придружује вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ који је на основу Теореме 1.2 једнозначно одређен смером и нормом.

Да бисмо описали смер тог вектора у случају када је он ненула вектор уводимо појам оријентације.

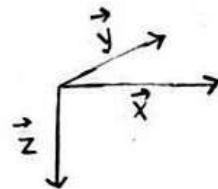
Нека је $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ произвољна уређена база од $\mathcal{V}$.

Посматрамо с врха вектора $\vec{z}$ обилазак од вектора $\vec{x}$ ка вектору $\vec{y}$ краћим путем.

Ако је тај обилазак у математички позитивном смеру (супротан смеру казаљке на сату) кажемо да је база десно оријентисана. У супротном, обилазак је у математички негативном смеру и кажемо да је база лево оријентисана.



десно оријентисана база



лево оријентисана база

Тако се све уређене базе од $\mathcal{V}$ деле на десно оријентисане и лево оријентисане.

Избором почетне базе одређује се оријентација и она је по дефиницији позитивна. Најчешће се за ту привилеговану базу узима нека десно оријентисана база и онда су десно оријентисане базе позитивне, а лево оријентисане негативне.

Сада смо спремни да дефинишемо векторски производ вектора.

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ са следећим особинама.

Норма вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ је $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

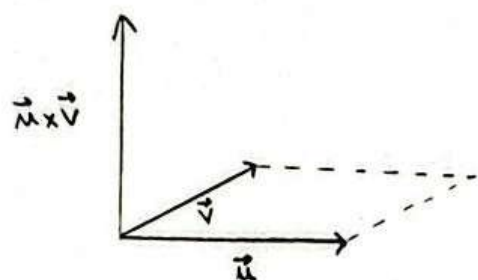
Ако је $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{0}$ или $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in \{0, \pi\}$ тада је $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, те је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ и он је једнозначно одређен нормом, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су линеарно зависни вектори.

У супротном, вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су линеарно независни и разликују раван.

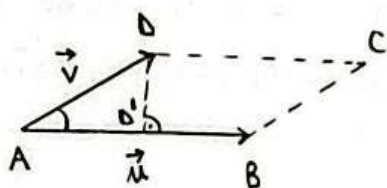
Правец вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ је правец нормале на ту раван. Како је правец нормале

по раван једнозначно одређен само у векторском простору димензије 3, то векторски производ уводимо искључиво у случају $\dim V = 3$.

Смер ненула вектора $\vec{u} \times \vec{v}$ је такав да је база $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ позитивно оријентисана.



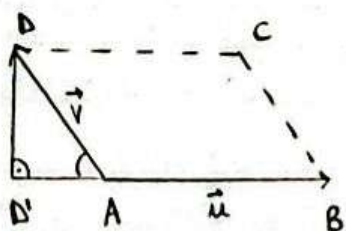
Приметимо да је норма ненула вектора $\vec{u} \times \vec{v}$ једнака површини $P(\vec{u}, \vec{v})$ паралелограма којег разлињу вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Заиста, ако означимо паралелограм разпет векторима $\vec{u}$ и $\vec{v}$ са ABCD као на слици и са D' подножје нормале из тачке D на AB, тада је



$$\triangle ADD': \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{DD'}{AD}$$

$$DD' = \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

$$P(\vec{u}, \vec{v}) = AB \cdot DD' = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

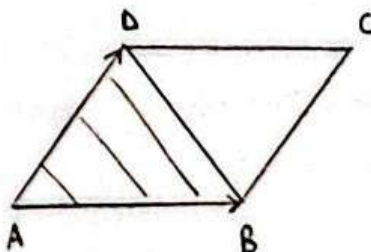


$$\frac{DD'}{AB} = \sin \angle DAB' = \sin(\pi - \angle DAB) = \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

синуси суплементних углова су једнаки

Дијагонала BD паралелограма ABCD дели тај паралелограм на два подударна троугла, одакле је

$$P(\triangle ABD) = \frac{1}{2} P(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AD}\|.$$



Теорема 1.8. За векторе $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ и скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ важи

$$(1.14) \quad \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u});$$

$$(1.15) \quad (\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha(\vec{u} \times \vec{v});$$

$$(1.16) \quad (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}.$$

Доказ • Доказ особине (1.14):

$$\vec{u} \times \vec{v} \stackrel{?}{=} -(\vec{v} \times \vec{u})$$

Норме вектора $\vec{u} \times \vec{v}$ и $-(\vec{v} \times \vec{u})$ су исте јер је

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\|-(\vec{v} \times \vec{u})\| = \|\vec{v} \times \vec{u}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \sin \angle(\vec{v}, \vec{u}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}).$$

↑
супротни вектори
имају исту норму

$$\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

Ако је та норма 0 у питању су $\vec{0}$. У супротном, $\vec{u} \times \vec{v}$ и $-(\vec{v} \times \vec{u})$ су ненула вектори. Правци вектора $\vec{u} \times \vec{v}$ и $-(\vec{v} \times \vec{u})$ су исти јер се поклапају са правцем нормале на раван разапетом векторима $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

По дефиницији смера векторског производа вектора, вектори $\vec{u} \times \vec{v}$ и $\vec{v} \times \vec{u}$ имају супротан смер, те су вектори $\vec{u} \times \vec{v}$ и $-(\vec{v} \times \vec{u})$ истог смера.

Применом Теореме 1.2 закључујемо да су вектори $\vec{u} \times \vec{v}$ и $-(\vec{v} \times \vec{u})$ једнаки.

- Доказ особине (1.15):

$$(\alpha \vec{u}) \times \vec{v} \stackrel{?}{=} \alpha (\vec{u} \times \vec{v})$$

За $\alpha = 0$ је $(0\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{0} \times \vec{v} = \vec{0} = 0 \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$. У наставку сматрамо да је $\alpha \neq 0$.

Норме вектора $(\alpha \vec{u}) \times \vec{v}$ и $\alpha (\vec{u} \times \vec{v})$ су исте јер је за $\alpha \neq 0$

$$\|(\alpha \vec{u}) \times \vec{v}\| = \|\alpha \vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \angle(\alpha \vec{u}, \vec{v}) = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \angle(\alpha \vec{u}, \vec{v}) = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = |\alpha| \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\alpha (\vec{u} \times \vec{v})\|$$

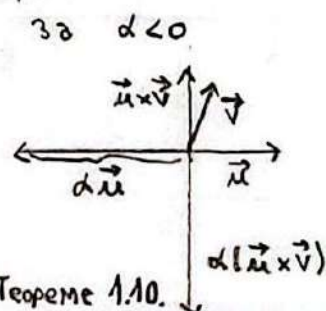
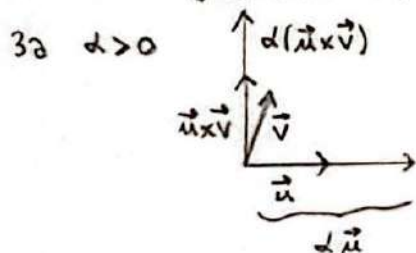
за $\alpha < 0$ је $\sin \angle(\alpha \vec{u}, \vec{v}) = \sin(\pi - \angle(\vec{u}, \vec{v})) = \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$

за $\alpha > 0$ је $\sin \angle(\alpha \vec{u}, \vec{v}) = \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Ако су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ линеарно зависни, онда је $(\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{0} = \alpha (\vec{u} \times \vec{v})$.

У супротном, вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно независни и разликују раван, а исту ту раван разликују и вектори $\alpha \vec{u}$ и $\vec{v}$, те вектори $(\alpha \vec{u}) \times \vec{v}$ и $\alpha (\vec{u} \times \vec{v})$ имају правац нормале на ту раван.

Смерови тих вектора се поклањају јер су за $\alpha > 0$ ти вектори истог смера као вектор $\vec{u} \times \vec{v}$, док су за $\alpha < 0$ ти вектори супротног смера од смера вектора $\vec{u} \times \vec{v}$. Зато су по Теорему 1.2 вектори $(\alpha \vec{u}) \times \vec{v}$ и $\alpha (\vec{u} \times \vec{v})$ једнаки јер су исте норме и смера.

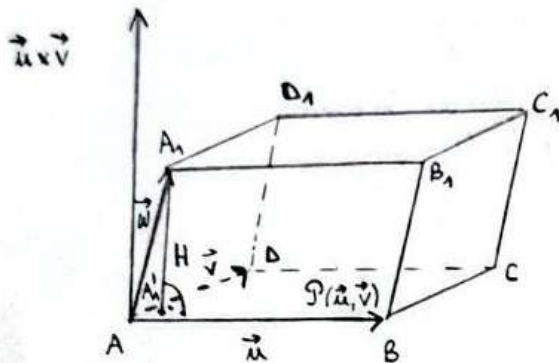


- Доказ особине (1.16) ћемо приказати после доказа Теореме 1.10. □

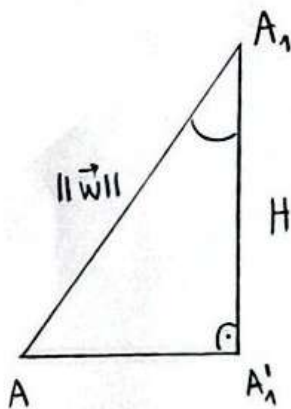
Мешовити производ

Мешовити производ вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ је број $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Геометријска интерпретација мешовитог производа може се видети посматрањем паралелепипеда којег разапњу вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$.



$\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v})$ – површина паралелограма разпанетог векторима $\vec{u}$ и $\vec{v}$



Прецизније, на основу Леме 1.3 за произвољну тачку А из еуклидског простора $\mathbb{E}$ постоје тачке В, D и A_1 такве да је $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$ и $\vec{w} = \vec{AA_1}$.

Ако су вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ некомпланарни онда они разапњу паралелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

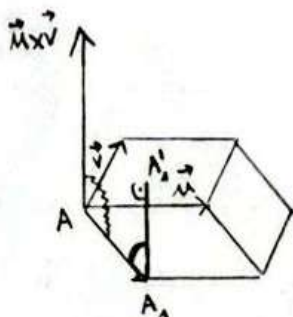
A_1' – подножје нормале из A_1 на раван $(ABCD)$

$$A_1 A_1' \perp (ABCD) \Rightarrow A_1 A_1' \perp AA_1$$

$\Rightarrow \triangle AA_1 A_1'$ је правоугли и по дефиницији векторског производа $\vec{u} \times \vec{v}$ важи да је $\vec{u} \times \vec{v} \perp (ABCD)$ и $A_1 A_1' \perp (ABCD)$ те је $\vec{u} \times \vec{v} \parallel A_1 A_1'$ и $\angle A_1' A_1 A = \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{AA_1}) = \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$

$$\text{Зато је } |\cos \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})| = |\cos \angle A_1' A_1 A| = \frac{H}{\|\vec{w}\|} \Rightarrow H = \|\vec{w}\| \cdot |\cos \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})|$$

Стављамо апсолутне заграде због могућих другачијих слика на којима је $\angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) > 90^\circ$.



$$\angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) = \pi - \angle A_1' A_1 A$$

$$\cos \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) = \cos(\pi - \angle A_1' A_1 A) = -\cos \angle A_1' A_1 A$$

$$|\cos \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})| = |\cos \angle A_1' A_1 A|$$

$$|[\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}]| = |(\vec{a} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{по дефиницији} \\ \text{скаларног производа} \\ \text{вектора и особини} \\ |\vec{a} \times \vec{v}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\sin \varphi|}}{=} \|\vec{a} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\cos \varphi(\vec{a} \times \vec{v}, \vec{w})| = S(\vec{a}, \vec{v}) \cdot H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{запремина паралеле-} \\ \text{пипеда разалетог} \\ \text{векторима } \vec{a}, \vec{v} \text{ и } \vec{w}}}{=} V(\vec{a}, \vec{v}, \vec{w})$$

Тиме смо доказали следећу теорему.

Теорема 1.9 Запремина паралелепипеда којег разалињу вектори $\vec{a}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ једнака је $V(\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}) = |[\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}]|$.

Како се паралелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ помоћу дијагоналног пресека $BD A_1$ дели на две подударне троугране призме $ABD A_1 B_1 D_1$ и $BCD B_1 C_1 D_1$, а троуграна пирамида $ABD A_1$ има 3 пута мању запремину од запремине троугране призме $ABD A_1 B_1 D_1$ и зато је запремина тетраедра $ABD A_1$ једнака

$$V(ABD A_1) = \frac{1}{6} \cdot V(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA_1}) = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA_1}]|.$$

У наредној теореме наводимо неке корисне особине мешовитог производа.

Теорема 1.10 За векторе $\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in V$ и скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ важи:

$$(1.17) \quad [\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{a}, \vec{w}];$$

$$(1.18) \quad [\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}];$$

$$(1.19) \quad [\alpha \vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha [\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}];$$

$$(1.20) \quad [\vec{a} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = [\vec{a}, \vec{w}, \vec{x}] + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}].$$

Доказ Доказ особине (1.17) $[\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{a}, \vec{w}]$:

У доказу Теореме 1.9. смо доказали особину (1.14) векторског производа вектора:

$$\vec{a} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{a}) \quad / \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{a} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (-\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \vec{w}$$

$$[\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] = -(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \vec{w}$$

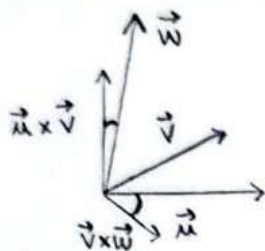
$$[\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{a}, \vec{w}]$$

} особина (1.11) за скаларни производ

Доказ особине (1.18) $[\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}]$:

Мешовити производ вектора је број, те на основу Теореме 1.9 имамо да су $|[\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}]|$ и $|[\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}]|$ јер обе представљају запремину паралелепипеда разалетог векторима $\vec{a}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ (он је исти као паралелепипед разалет векторима $\vec{v}, \vec{w}$ и $\vec{a}$), а и знаци бројева $[\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}]$ и $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}]$ су исти јер циклично померање вектора не мења оријентацију базе.

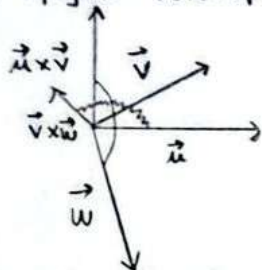
Уређена тројка вектора $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ чини позитивно оријентисану базу за V димензије 3.



$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) > 0$$

$$[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot \|\vec{u}\| \cos \angle(\vec{v} \times \vec{w}, \vec{u}) > 0$$

Уређена тројка вектора $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ чини негативно оријентисану базу за V димензије 3.



$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) < 0$$

$$[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos \angle(\vec{v} \times \vec{w}, \vec{u}) < 0$$

Доказ особине (1.19) $[\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$:

У доказу Теореме 1.9 смо доказали особину (1.15) векторског производа вектора:

$$(\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha (\vec{u} \times \vec{v}) \quad / \cdot \vec{w}$$

$$((\alpha \vec{u}) \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\alpha (\vec{u} \times \vec{v})) \cdot \vec{w}$$

$$[\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha ((\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w})$$

$$[\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

особина (1.11) скаларног производа вектора

Доказ особине (1.20) $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}]$:

У доказу Теореме 1.7 смо доказали особину (1.10) скаларног производа вектора:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

На основу ње је

$$(\vec{w} \times \vec{x}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{w} \times \vec{x}) \cdot \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{x}) \cdot \vec{v}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ [\vec{w}, \vec{x}, \vec{u} + \vec{v}] & = & [\vec{w}, \vec{x}, \vec{u}] + [\vec{w}, \vec{x}, \vec{v}] \end{array}$$

$$\text{Зато је } [\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = [\vec{w}, \vec{x}, \vec{u} + \vec{v}] = [\vec{w}, \vec{x}, \vec{u}] + [\vec{w}, \vec{x}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}].$$

(1.18)

$$(1.18) [\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] = [\vec{w}, \vec{x}, \vec{u}]$$

$$(1.18) [\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = [\vec{w}, \vec{x}, \vec{v}]$$

□

Сада када смо завршили доказ Теореме 1.10 смомо користити особину (1.20) помоћу које можемо доказати својство (1.16) из Теореме 1.8 чији смо доказ раније прескочили.

На основу особине (1.20) је $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}]$, одакле је $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] - [\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] - [\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = 0$, одакле на основу дефиниције мешовитог производа имамо да је

$$((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}) \cdot \vec{x} - (\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{x} - (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{x} = 0 \quad \downarrow \quad (1.10) \text{ из Теореме 1.7.}$$

$$((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} - \vec{u} \times \vec{w} - \vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{x} = 0 \quad \downarrow \quad (1.10) \text{ из Теореме 1.7.}$$

$$((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} - \vec{u} \times \vec{w} - \vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{x} = 0$$

Како ово важи за сваки вектор $\vec{x} \in V$, то за специјално

$\vec{x} = (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} - \vec{u} \times \vec{w} - \vec{v} \times \vec{w}$ добијамо да је $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$, те применом особине

(1.13) из Теореме 1.7 закључујемо да из $\|\vec{x}\|^2 = 0$ следи да је $\vec{x} = \vec{0}$,

те је $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} - \vec{u} \times \vec{w} - \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$, односно $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$, чиме је завршен доказ својства (1.16), односно Теореме 1.7.

Двоструки векторски производ је вектор добијен применом

векторског производа два пута заредом, односно вектор $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ који се изражава преко вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ што доказујемо у наредној теорему.

Теорема 1.11 За векторе $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ важи

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}.$$

Доказ Ако су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ линеарно зависни, онда је $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$,

те је и $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{0} \times \vec{w} = \vec{0}$. Докажимо да је и вектор са десне стране једнакости нула вектор. Заиста, ако је $\vec{v} = \vec{0}$, онда је

$$(\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{0} - (\vec{0} \cdot \vec{w}) \vec{u} = \vec{0} - 0 \cdot \vec{u} = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}, \text{ а ако } \vec{v} \neq \vec{0}, \text{ онда}$$

постоји $k \in \mathbb{R}$ такав да је $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, те је

$$(\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} = ((k\vec{v}) \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})(k\vec{v}) = \underset{\uparrow}{(k(\vec{v} \cdot \vec{w}))} \vec{v} - k(\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{v} = \vec{0}.$$

(1.11)

(1.7)

Дакле, за линеарно зависне векторе $\vec{u}$ и $\vec{v}$ важи да је

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{0} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}.$$

У наставку доказа теореме сматрамо да су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ линеарно независни, те је $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ и вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{u} \times \vec{v}$ су линеарно независни (некомпланарни су јер је ненула вектор $\vec{u} \times \vec{v}$ ортогоналан на равну коју разазлињу линеарно независни вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$), те чине базу векторског простора $\mathcal{U}$ димензије 3. Зато се вектор $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}$ може записати као линеарна комбинација вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{u} \times \vec{v}$, односно

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma (\vec{u} \times \vec{v}).$$

$$0 = (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma (\vec{u} \times \vec{v})) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$0 = \alpha \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) + \beta \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) + \gamma (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$0 = 0 + 0 + \gamma \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2$$

$$0 = \gamma \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0} \text{ те} \\ \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 \neq 0 \end{array}$$

$\cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \leftarrow$ скаларно множимо са $\vec{u} \times \vec{v}$ који је по дефиницији векторског производа $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}$ ортогоналан на тај векторски производ и зато је лева страна једнакости једнака 0.

$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v}$ је по дефиницији векторског производа ортогоналан и на $\vec{u}$ и на $\vec{v}$

Како је $\gamma = 0$, то је

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + 0 \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}. \quad (1.21)$$

Сада векторски множимо са $\vec{u}$.

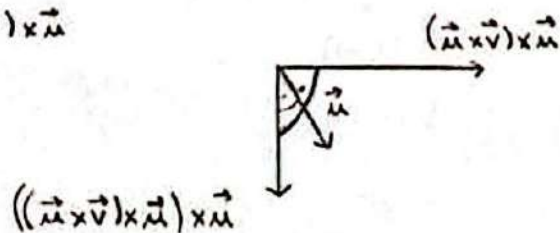
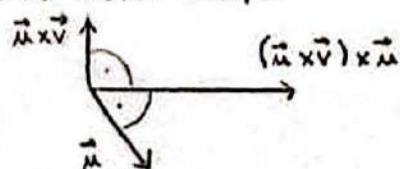
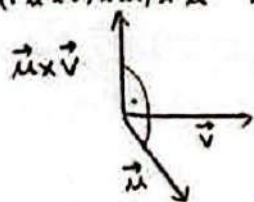
$$((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u} = (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \times \vec{u} \quad \left. \begin{array}{l} (1.16) \\ (1.15) \end{array} \right\}$$

$$((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u} = \alpha \vec{u} \times \vec{u} + \beta (\vec{v} \times \vec{u})$$

$$((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u} = -\beta (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0} \\ \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v} \text{ из (1.14)} \end{array} \right\}$$

Вектор $((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u}$ на левој страни једнакости је ортогоналан на вектор $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}$ и на вектор $\vec{u}$ (који су међусобно ортогонални), али такв је и вектор $\vec{u} \times \vec{v}$, а пажљивим посматрањем смера (доње слике) закључујемо да су $((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u}$ и $-(\vec{u} \times \vec{v})$ истог смера.



Зато је $\beta > 0$ да би $-\beta (\vec{u} \times \vec{v})$ био истог смера као вектор $-(\vec{u} \times \vec{v})$.
↖ ★

Израчунајмо сада норму вектора на обе стране једнакости

$$((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u} = -\beta (\vec{u} \times \vec{v}).$$

$$\|((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u}\| = \|(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \sin \angle((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \sin \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}) \cdot \|\vec{u}\| \sin 90^\circ$$

из дефиниције векторског
производа вектора

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} \perp \vec{u}$ по дефиницији векторског производа вектора

$$= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \sin 90^\circ \cdot \|\vec{u}\| \cdot 1 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

$\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ по дефиницији
векторског производа вектора

$$\|-\beta (\vec{u} \times \vec{v})\| = |\beta| \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\| = |\beta| \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\| \stackrel{\uparrow}{=} \beta \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

$\beta > 0$ из *

Из једнакости вектора $((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u} = -\beta (\vec{u} \times \vec{v})$ следи да су њихове

норме исте, односно $\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \beta \|\vec{u} \times \vec{v}\|.$

$\because \|\vec{u} \times \vec{v}\| \neq 0$ јер
је $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ за

линеарно независне
векторе $\vec{u}$ и $\vec{v}$

$$\|\vec{u}\|^2 = \beta$$

Сада се (1.21) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ претвара у

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} = \alpha \vec{u} + \|\vec{u}\|^2 \vec{v}.$ То скаларно množимо са $\vec{u}$ који је по дефиницији векторског производа $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}$ ортогоналан на $\vec{u}$.

$$0 = (\alpha \vec{u} + \|\vec{u}\|^2 \vec{v}) \cdot \vec{u} \quad \begin{array}{l} (1.9) \\ (1.10) \\ (1.9) \end{array}$$

$$0 = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{u} + \|\vec{u}\|^2 \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \downarrow \quad (1.11)$$

$$0 = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \|\vec{u}\|^2 \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$0 = \alpha \cdot \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$0 = \|\vec{u}\|^2 \cdot (\alpha + \vec{v} \cdot \vec{u})$$

$\because \|\vec{u}\|^2 \neq 0$ јер је $\vec{u} \neq \vec{0}$ јер су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ линеарно независни вектори

$$\alpha + \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\alpha = -\vec{v} \cdot \vec{u} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ (1.10) \end{array}$$

$$\text{Зато се (1.21) своди на } (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{v} \quad (1.22)$$

Слично бисмо заменом места вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ извели једнакост полут (1.22) са замењеним $\vec{u}$ и $\vec{v}$, тј. $(\vec{v} \times \vec{u}) \times \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{u}$ те множењем са -1 добијемо

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v} \stackrel{(1.19)}{=} -(\vec{v} \times \vec{u}) \times \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{u} \stackrel{(1.9)}{=} -(\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v}. \quad (1.23)$$

Вектор $\vec{w}$ се може представити као линеарна комбинација базних вектора $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{u} \times \vec{v}$, односно $\vec{w} = \mu \vec{u} + \nu \vec{v} + \xi (\vec{u} \times \vec{v})$ за $\mu \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \quad / \quad \vec{w} = \mu \vec{u} + \nu \vec{v} + \xi (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\mu \vec{u} + \nu \vec{v} + \xi (\vec{u} \times \vec{v})) \quad (1.14)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\mu \vec{u}) + (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\nu \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\xi (\vec{u} \times \vec{v})) \quad (1.16)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \mu ((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) + \nu ((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v}) + \xi ((\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v})) \quad (1.14)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \mu ((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) + \nu ((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v}) + \xi \underbrace{((\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v}))}_{= \vec{0}} \quad (1.15)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \mu ((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) + \nu ((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v}) \quad (1.22)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -\mu (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u} + \mu (\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{v} - \nu (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{u} + \nu (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v} \quad (1.23)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -\mu (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u} + \mu (\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{v} - \nu (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{u} + \nu (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\mu (\vec{u} \cdot \vec{v}) + \nu (\vec{v} \cdot \vec{v})) \vec{u} + (\mu (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \nu (\vec{u} \cdot \vec{v})) \vec{v}$$

Са друге стране,

$$\vec{w} = \mu \vec{u} + \nu \vec{v} + \xi (\vec{u} \times \vec{v}) \quad / \cdot \vec{u}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (\mu \vec{u} + \nu \vec{v} + \xi (\vec{u} \times \vec{v})) \cdot \vec{u}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (\mu \vec{u}) \cdot \vec{u} + (\nu \vec{v}) \cdot \vec{u} + \xi \cdot 0$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = \mu (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \nu (\vec{v} \cdot \vec{u}) \quad (1.11)$$

(1.9) $\vec{u} \times \vec{v}$ је ортогоналан на $\vec{u}$
(1.10) по дефиницији векторског
(1.9) производа вектора

док скаларним множењем $\vec{w} = \mu \vec{u} + \nu \vec{v} + \xi (\vec{u} \times \vec{v})$ са $\vec{v}$ добијамо да је

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (\mu \vec{u} + \nu \vec{v} + \xi (\vec{u} \times \vec{v})) \cdot \vec{v} \quad (1.9)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (\mu \vec{u}) \cdot \vec{v} + (\nu \vec{v}) \cdot \vec{v} + \xi (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} \quad (1.10)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \mu (\vec{u} \cdot \vec{v}) + \nu (\vec{v} \cdot \vec{v}) + \xi \cdot 0 \quad (1.11)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \mu (\vec{u} \cdot \vec{v}) + \nu (\vec{v} \cdot \vec{v})$$

$\vec{u} \times \vec{v}$ је ортогоналан на $\vec{v}$
по дефиницији векторског
производа вектора

Заменом уоквирених једнакости у $\heartsuit$ добијамо да је

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{w} \cdot \vec{v}) \vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{u}) \vec{v}, \text{ односно коришћењем (1.9)}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} \quad (1.24).$$

□