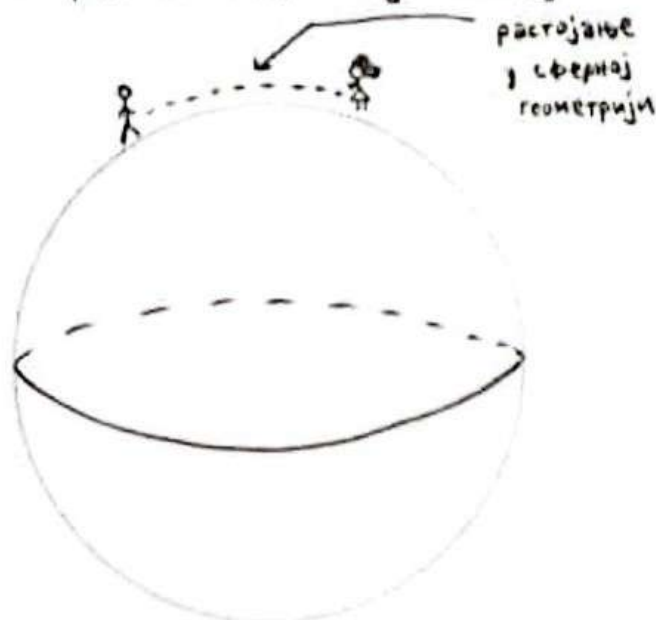


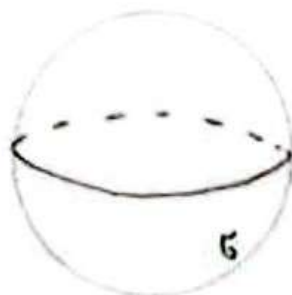
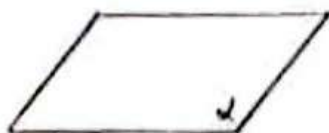
1.13. Сферна геометрија

Сферна геометрија је геометрија на дводимензионој површи сфере, а практичну примену има у навигацији и астрономији. Она илуструје математику коју би посматрала бића која живе на сфери. Растојање између две тачке на сфери неће бити уобичајено еуклидско растојање, односно дужина дужи која спаја те две тачке, већ дужина најкраће криве на сфери која повезује те две тачке.

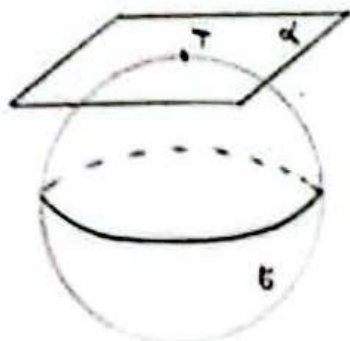


Међусобни положај равни α и сфере β

1) $\alpha \cap \beta = \emptyset$ односно равни α и сфера β немају заједничких тачака



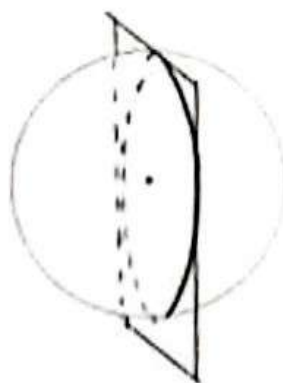
2) $\alpha \cap \beta = \{T\}$ односно равни α је тангентна равни на сферу



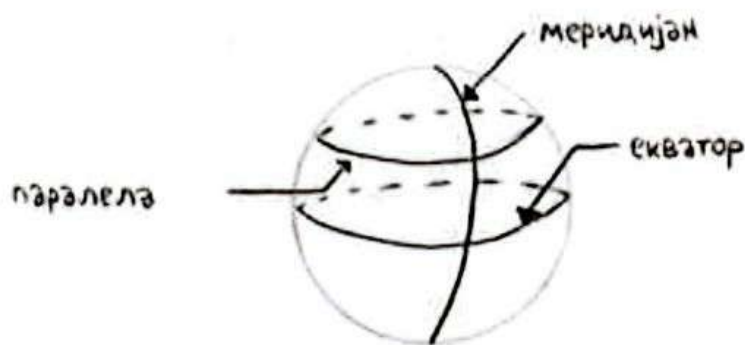
3) $\alpha \cap \zeta = k$ тј. раван α и сфера ζ се секу по кругу k



Пресечни круг је највећи када раван пролази кроз центар сфере и тада се он назива велики круг.



Примери из географије су меридијани који су половине великог круга, а паралеле су мали кругови осим екватора који јесте велики круг.



Испоставља се да се најкраће растојање између две тачке на сфери реализује баш по луку великог круга који садржи те две тачке. Криве на површи које минимизују растојања у геометрији зову се геодезијске. Геодезијске у равни су праве, а геодезијске на сфери су велики кругови. Улогу правих у раванској геометрији преузимају велики кругови у сферној геометрији.

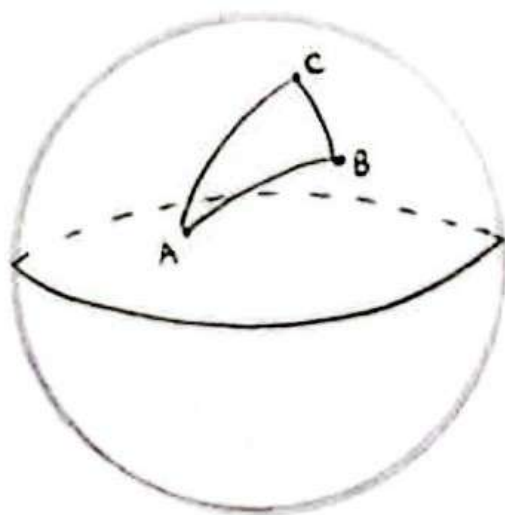
Посматрамо сферу полупречника 1 са центром у координатном почетку

$$S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}.$$

Сваку тачку са сфере $X \in S^2$ можемо повезати са њеним вектором положаја у односу на центар сфере и уједно координатни почетак O , односно са вектором $\vec{OX}$ који је јединични. Сферни троугао ABC представљају тачке A, B и C са сфере S^2 , при чему постављамо додатни услов да су њихови вектори положаја $\vec{OA}, \vec{OB}$ и $\vec{OC}$ линеарно независни. Разлог за увођење овог додатног услова је што би, ако не би било тог услова, вектори $\vec{OA}, \vec{OB}$ и $\vec{OC}$ могли бити линеарно зависни, те би тачке O, A, B и C биле компланарне, односно тачке A, B и C би припадале неком великом кругу, а аналогија са равнском геометријом је да не можемо говорити о троуглу ABC уколико су тачке колинеарне.

За тачке A, B и C кажемо да су темена сферног троугла ABC .

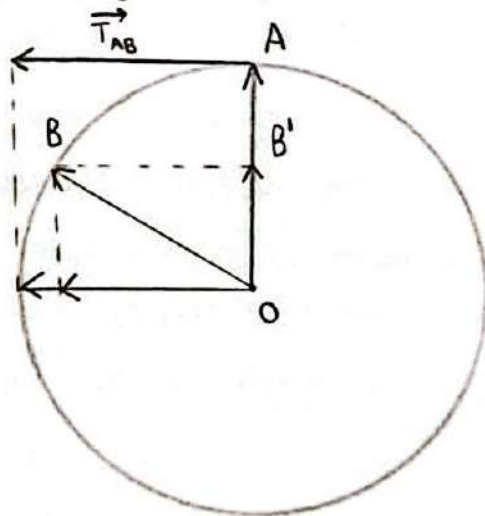
Приметимо да међу теменима нема антиподалних (дијаметрално супротних) тачака јер ако су A и B антиподалне, онда је $\vec{OA} = -\vec{OB}$, те су вектори $\vec{OA}, \vec{OB}$ и $\vec{OC}$ линеарно зависни, што је у супротности са дефиницијом сферног троугла. То нам омогућава да једнозначно дефинишемо странице сферног троугла као краће лукове великих кругова који спајају темена. Дужине страница можемо обележити са $a = \widehat{BC}$, $b = \widehat{AC}$ и $c = \widehat{AB}$ и важи да $a \in (0, \pi)$, $b \in (0, \pi)$, $c \in (0, \pi)$ (краћи лукови великих кругова имају дужину мању од половине обима великог круга, односно од $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi = \pi$).



Сферни троугао

Угао између страница сферног троугла је угао између одговарајућих тангенти у теменима на странице сферног троугла.

Одредимо тангенту у тачки A на страницу $\widehat{AB}$, односно изразимо вектор $\vec{T}_{AB}$ који је нормалан на $\vec{OA}$ и налази се у равни великог круга OAB . Једнозначну одређеност му можемо дати условом да је јединичан и „усмерен ка B “, односно угао који заклапа са $\vec{OB}$ је оштар.



Како су вектори положаја $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ јединични, то је

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cos \angle AOB = 1 \cdot 1 \cdot \cos \angle AOB = \cos \angle AOB = \cos \widehat{AB}.$$

Формула за дужину кружног лука $\widehat{AB}$ је $1 \cdot \angle AOB = \angle AOB$ (општа формула је у радијанима)

$l = r \cdot \alpha$ где је r полупречник круга, а α је централни угао изражен у радијанима и то се изводи из пропорције $l : (2r\pi) = \alpha : (2\pi)$

Уочимо тачку B' на горњој слици као подножје нормале из тачке B на OA .

$$\triangle OBB' \text{ је правоугли } \Rightarrow \cos \angle AOB = \cos \angle B'OB = \frac{OB'}{OB} = \frac{OB'}{1} = OB'$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OB'$$

$$\vec{B'B} = \vec{B'O} + \vec{OB} = -\vec{OB'} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OB'} = \vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}$$

На горњој слици су вектори $\vec{OB'}$ и $\vec{OA}$ истог смера, а како је $\vec{OA}$ јединични вектор и $OB' = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$, то је $\vec{OB'} = (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}$.

$BB' \perp OA$, $\vec{T}_{AB} \perp OA$ и вектори $\vec{B'B}$ и $\vec{T}_{AB}$ су истог смера и $\vec{T}_{AB}$ је јединични $\Rightarrow$

$$\vec{T}_{AB} = \frac{\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}\|} \quad \text{и исто се добија и ако је почетна слика другачија.}$$

Зaista, овај вектор је јединичан и нормалан је на јединичан вектор $\vec{OA}$ јер је

$$\begin{aligned} \vec{T}_{AB} \cdot \vec{OA} &= \frac{\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}\|} \cdot \vec{OA} = \frac{1}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}\|} (\vec{OB} \cdot \vec{OA} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA} \cdot \vec{OA}) \\ &= \frac{1}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}\|} \cdot (\vec{OB} \cdot \vec{OA} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \cdot \|\vec{OA}\|^2) = \frac{1}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}\|} (\vec{OB} \cdot \vec{OA} - \vec{OA} \cdot \vec{OB}) = 0. \end{aligned}$$

$\vec{OB} \cdot \vec{OA} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$

Важи и да се вектор $\vec{T}_{AB} = \frac{1}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}\|} \cdot \vec{OB} - \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}\|} \vec{OA}$

налази у равни великог круга OAB јер је изражен као линеарна комбинација вектора $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$. Важи и да вектор $\vec{T}_{AB}$ са вектором $\vec{OB}$ заклапа

оштар угао јер је $\vec{T}_{AB} \cdot \vec{OB} = \frac{\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}\|} \cdot \vec{OB} = \frac{1}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}\|} \cdot (\vec{OB} \cdot \vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2)$

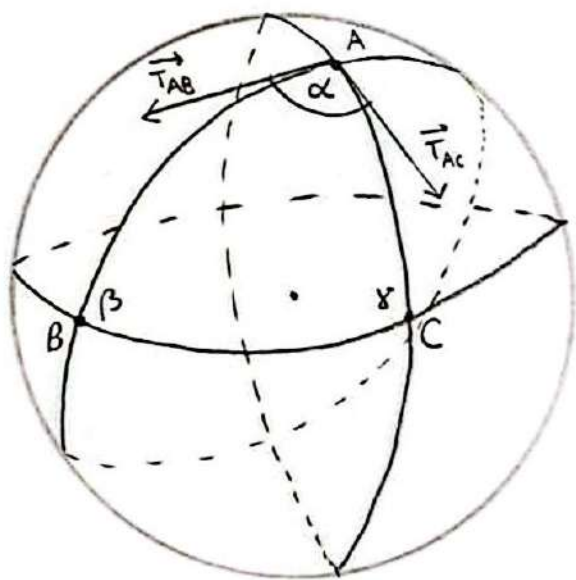
$$= \frac{1}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \vec{OA}\|} \cdot (1 - \cos^2 \widehat{AB}) > 0.$$

$\vec{OB} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OB}\|^2 = 1^2 = 1$
 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos \widehat{AB}$

$\widehat{AB} \in (0, \pi)$ те је
 $1 - \cos^2 \widehat{AB} \in (0, 1]$

Дакле, $\vec{T}_{AB}$ је жељени вектор тангенте. Сада можемо дефинисати углове сферног троугла помоћу

$\alpha = \angle BAC = \angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC})$, $\beta = \angle ABC = \angle(\vec{T}_{BA}, \vec{T}_{BC})$, $\gamma = \angle ACB = \angle(\vec{T}_{CA}, \vec{T}_{CB})$,
при чему такође важи $\alpha \in (0, \pi)$, $\beta \in (0, \pi)$ и $\gamma \in (0, \pi)$.



Беза између страница и углова сферног троугла можемо добити користећи тангентни вектор $\vec{T}_{AB} = \frac{\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}\|}$.

Приметимо да је $\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}\|^2 = \|\vec{OB} - \cos \widehat{AB} \cdot \vec{OA}\|^2 = (\vec{OB} - \cos \widehat{AB} \cdot \vec{OA}) \cdot (\vec{OB} - \cos \widehat{AB} \cdot \vec{OA})$

раније смо доказали да је $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos \widehat{AB}$

$$= \vec{OB} \cdot \vec{OB} - \cos \widehat{AB} \vec{OB} \cdot \vec{OA} - \cos \widehat{AB} \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \cos^2 \widehat{AB} \vec{OA} \cdot \vec{OA} = \|\vec{OB}\|^2 - 2 \cos \widehat{AB} (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) + \cos^2 \widehat{AB} \cdot \|\vec{OA}\|^2$$

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OA}$

$$= 1 - 2 \cos \widehat{AB} \cdot \cos \widehat{AB} + \cos^2 \widehat{AB} = 1 - \cos^2 \widehat{AB} = \sin^2 \widehat{AB}, \text{ а како је } \widehat{AB} \in (0, \pi),$$

$\cos^2 \widehat{AB} + \sin^2 \widehat{AB} = 1$

$\|\vec{OA}\| = \|\vec{OB}\| = 1$

то је $\sin \widehat{AB} > 0$, те је $\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}\| = \sin \widehat{AB}$ и зато је

$$\vec{T}_{AB} = \frac{\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}}{\sin \widehat{AB}}$$

одакле је $\vec{OB} = (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA} + (\sin \widehat{AB})\vec{T}_{AB} = (\cos \widehat{AB})\vec{OA} + (\sin \widehat{AB})\vec{T}_{AB}$.

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos \widehat{AB}$

Слично (пермутацијом темена) се изводи и

$$\vec{OC} = (\cos \widehat{AC})\vec{OA} + (\sin \widehat{AC})\vec{T}_{AC}$$

Скаларним множењем претходне две једначине добијамо

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = ((\cos \widehat{AB})\vec{OA} + (\sin \widehat{AB})\vec{T}_{AB}) \cdot ((\cos \widehat{AC})\vec{OA} + (\sin \widehat{AC})\vec{T}_{AC})$$

$$\|\vec{OB}\| \cdot \|\vec{OC}\| \cdot \cos \angle BOC = (\cos \widehat{AB})\vec{OA} \cdot (\cos \widehat{AC})\vec{OA} + (\cos \widehat{AB})\vec{OA} \cdot (\sin \widehat{AC})\vec{T}_{AC} + (\sin \widehat{AB})\vec{T}_{AB} \cdot (\cos \widehat{AC})\vec{OA} + (\sin \widehat{AB})\vec{T}_{AB} \cdot (\sin \widehat{AC})\vec{T}_{AC}$$

$$\cos \widehat{BC} = \cos \widehat{AB} \cdot \cos \widehat{AC} \cdot \|\vec{OA}\|^2 + \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \cdot \|\vec{T}_{AB}\| \cdot \|\vec{T}_{AC}\| \cos \angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC})$$

$$\cos \widehat{BC} = \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC} \cdot 1^2 + \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \angle BAC$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} \perp \vec{T}_{AB} \\ \vec{OA} \perp \vec{T}_{AC} \end{array} \right\}$$

Тиме смо доказали основну теорему сферне геометрије

$$\cos \widehat{BC} = \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC} + \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \cos \angle BAC.$$

Како је ова теорема пандан косинусној теореме еуклидске геометрије, називамо је и косинусна теорема. Користењем ознака $\widehat{B} = \alpha$, $\widehat{A} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$, $\angle BAC = \alpha$, косинусну теорему можемо записати као у следећој теорему.

Теорема 1.18 За сферни троугао важи $\boxed{\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha}$.

У еуклидској геометрији Питагорина теорема се може извести применом косинусне теореме за прав угао, те тако и у сферној геометрији можемо добити пандан Питагорине теореме који гласи $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma$.

Сада нас занима пандан синусне теореме, те из косинусне теореме можемо изразити $\cos \alpha = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)^2}{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma} = \frac{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma - (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)^2}{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}$$

основни
тригонометријски
идентитет

$$= \frac{(1 - \cos^2 \beta)(1 - \cos^2 \gamma) - (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)^2}{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 \gamma - \cos^2 \beta + \cancel{\cos^2 \beta \cos^2 \gamma} - \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cancel{\cos^2 \beta \cos^2 \gamma}}{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}$$

Како је $\alpha \in (0, \pi)$, то је $\sin \alpha > 0$, а због $\beta \in (0, \pi)$ и $\gamma \in (0, \pi)$ важи и $\sin \beta > 0$, $\sin \gamma > 0$.
те је $\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}}{\sin \beta \sin \gamma}$, одакле је

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}}$$

Приметимо да је израз са десне стране једнакости симетричан по α , β и γ , те су и $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ и $\frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$ једнаки том изразу чиме смо доказали синусну теорему.

Теорема 1.19 За сферни троугао важи $\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}}$.

Синусна теорема се може доказати и на други начин, тако што ћемо на геометријски начин изразити угао $\alpha = \angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC})$.

По дефиницији тангентни вектори $\vec{T}_{AB}$ и $\vec{T}_{AC}$ су нормални на $\vec{OA}$, а на основу дефиниције векторског производа важи и да су вектори $\vec{OA} \times \vec{OB}$ и $\vec{OA} \times \vec{OC}$ нормални на $\vec{OA}$. Зато можемо сматрати да вектори $\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}, \vec{OA} \times \vec{OB}, \vec{OA} \times \vec{OC}$ припадају једној равни, конкретно тангентној равни у тачки А на сферу. Са друге стране, по дефиницији тангентни вектор $\vec{T}_{AB}$ припада равни OAB и зато је нормалан на $\vec{OA} \times \vec{OB}$, слично је тангентни вектор $\vec{T}_{AC}$ нормалан на $\vec{OA} \times \vec{OC}$. Следи да су $\angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC})$ и $\angle(\vec{OA} \times \vec{OB}, \vec{OA} \times \vec{OC})$ углови са нормалним крацима у једној равни и зато су они једнаки или суплементни, али у сваком случају имају једнаке синусе, односно $\sin \angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}) = \sin \angle(\vec{OA} \times \vec{OB}, \vec{OA} \times \vec{OC})$.

Израчунајмо сада вектор $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \times (\vec{OA} \times \vec{OC})$ посматрајући га као двоструки векторски производ вектора $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OA} \times \vec{OC}$ и примењујући Теорему 1.11.

$$\begin{aligned}
 (\vec{OA} \times \vec{OB}) \times (\vec{OA} \times \vec{OC}) &= (\vec{OA} \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC})) \vec{OB} - (\vec{OB} \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC})) \vec{OA} \stackrel{(1.11)}{=} - [\vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OB}] \vec{OA} \\
 &\stackrel{(1.45)}{=} - [\vec{OB}, \vec{OA}, \vec{OC}] \vec{OA} \\
 &\stackrel{(1.46)}{=} [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] \vec{OA}
 \end{aligned}$$

$\vec{OA} \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC}) = (\vec{OA} \times \vec{OC}) \cdot \vec{OA} = [\vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OA}] = 0$ јер су $\vec{OA}, \vec{OC}$ и $\vec{OA}$ линеарно зависни вектори

$$\Rightarrow \|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \times (\vec{OA} \times \vec{OC})\| = \|[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] \vec{OA}\| = |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| \cdot \underbrace{\|\vec{OA}\|}_1 = |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = V,$$

где је V запремина паралелепипеда разлогот векторима $\vec{OA}, \vec{OB}$ и $\vec{OC}$.

Са друге стране је

$$\begin{aligned}
 V &= \|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \times (\vec{OA} \times \vec{OC})\| = \|\vec{OA} \times \vec{OB}\| \cdot \|\vec{OA} \times \vec{OC}\| \sin \angle(\vec{OA} \times \vec{OB}, \vec{OA} \times \vec{OC}) \\
 &= \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cdot \sin \angle AOB \cdot \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OC}\| \sin \angle AOC \cdot \sin \angle(\vec{OA} \times \vec{OB}, \vec{OA} \times \vec{OC}) \\
 &= \sin \hat{AB} \sin \hat{AC} \sin \angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC})
 \end{aligned}$$

Коришћењем кратких ознака $\hat{AB} = \kappa$, $\hat{AC} = \ell$ и $\alpha = \angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC})$ добијамо да је

$$V = \sin \kappa \sin \ell \sin \alpha.$$

Како се запремина V не мења пермутовањем темена, то важи и

$$V = \sin \alpha \sin \kappa \sin \ell$$

$$V = \sin \ell \sin \alpha \sin \kappa$$

Из $\sin \kappa \sin b \sin d = V = \sin \alpha \sin \kappa \sin \beta$ закључујемо да је $\sin b \sin d = \sin \alpha \sin \beta$,
односно $\frac{\sin \alpha}{\sin d} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$.

Из $\sin \alpha \sin \kappa \sin \beta = V = \sin b \sin \alpha \sin \gamma$ закључујемо да је $\sin \kappa \sin \beta = \sin b \sin \gamma$,
односно $\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin \kappa}{\sin \gamma}$.

Тиме смо на други начин доказали синусну теорему за сферни троугао.