Присетимо се основне теореме сферне геометрије, односно косинусне теореме

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha .$$

Како се у претходној једнакости појављују изрази $\cos b \cos c$ и $\sin b \sin c$ који учествују и у адиционим тригонометријским формулама за косинус збира и за косинус разлике, то претходну једнакост можемо записати у облику

$$\cos a = \underbrace{\cos(b+c) + \sin b \sin c\,(\cos\alpha + 1)}_{\cos b\cos c - \sin b \sin c + \sin b \sin c \cos\alpha + \sin b \sin c}$$

$$\cos a = \underbrace{\cos(b-c) + \sin b \sin c\,(\cos\alpha - 1)}_{\cos b\cos c + \sin b \sin c + \sin b \sin c \cos\alpha - \sin b \sin c}$$

Како $\alpha \in (0,\pi)$, то је $\cos\alpha \in (-1,1)$, те је $\cos\alpha + 1 > 0$ и $\cos\alpha - 1 < 0$, а због $b \in (0,\pi)$ и $c \in (0,\pi)$ је $\sin b > 0$ и $\sin c > 0$, те је

$$\cos(b+c) < \cos(b+c) + \sin b \sin c\,(\cos\alpha + 1) = \cos a = \cos(b-c) + \sin b \sin c\,(\cos\alpha - 1) < \cos(b-c)$$

$\sin b \sin c\,(\cos\alpha + 1) > 0$ $\qquad$ $\sin b \sin c\,(\cos\alpha - 1) < 0$

Разликујемо два случаја.

1° $b + c < \pi$

Како је функција $\cos$ опадајућа на интервалу $(0,\pi)$ и $a \in (0,\pi)$, то из $\cos a > \cos(b+c)$ у овом случају када је $b + c < \pi$ закључујемо да је $a < b + c$.

2° $b + c \geq \pi$

Како је $a \in (0,\pi)$, то и у овом случају важи да је $a < b + c$.

Дакле, увек важи $a < b + c$.

Како $b \in (0,\pi)$ и $c \in (0,\pi)$, то је $-\pi = 0-\pi < b-c < \pi-0 = \pi$, односно $|b-c| < \pi$, а како је cos опадајућа функција на $[0,\pi)$ и $a \in (0,\pi)$, то из $\cos a < \cos(b-c) = \cos|b-c|$ следи да је $a > |b-c|$.

Тиме смо доказали <u>неједнакост троугла</u> $\boxed{|b-c| < a < b+c}$

Слично, из $\cos(b+c) < \cos a = \cos(2\pi - a)$ следи да је $b+c < 2\pi - a$.

Заиста, поново разликујемо два случаја.

I случај $b+c \leq \pi$

Како $a \in (0,\pi)$, то $2\pi - a \in (\pi, 2\pi)$, те је $2\pi - a > b+c$.

II случај $b+c > \pi$

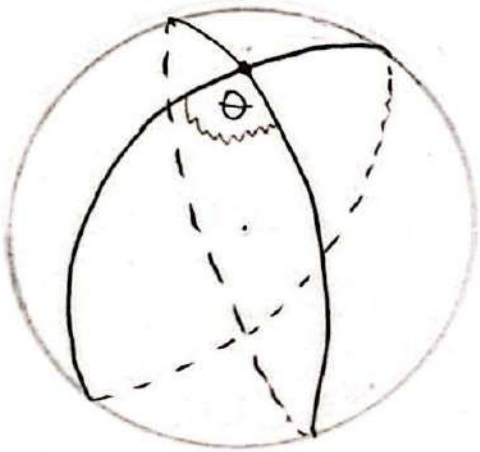
Како $a \in (0,\pi)$, то је $2\pi - a \in (\pi, 2\pi)$ и $b+c \in (\pi, 2\pi)$, а функција cos је на интервалу $(\pi, 2\pi)$ растућа, те из $\cos(b+c) < \cos(2\pi - a)$ закључујемо да је $b+c < 2\pi - a$.

Тиме смо доказали <u>неједнакост за збир страница у сферном троуглу</u>

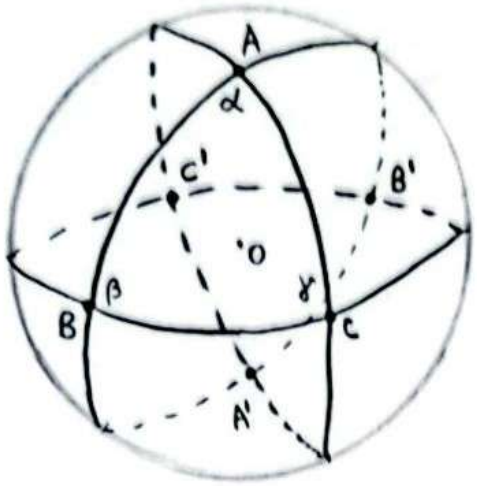
$\boxed{a+b+c < 2\pi}$.

Сада желимо да израчунамо површине неких једноставних фигура на сфери.

<u>Сферни двоугао</u> је фигура на сфери која је ограничена са два велика полукруга који су под углом θ.



Користећи да је површина сферног двоугла $P(\theta)$ директно сразмерна углу θ и примећујући да је $P(2\pi)$ површина читаве јединичне сфере која износи $4 \cdot 1^2\pi = 4\pi$, закључујемо да је коефицијент сразмерности 2, те је $P(\theta) = 2\theta$.



Посматрајмо сферни троугао ABC и три велика круга који одређују његове странице. Приметимо да се одговарајући велики кругови који садрже странице $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{AC}$ сем у тачки A секу и у њој антиподалној тачки A'. Слично важи и за тачке B' и C' које су антиподалне тачке тачкама B и C, редом. Помоћу посматрана 3 велика круга сфера је подељена на 8 сферних троуглова: ΔABC, $\Delta A'BC$, $\Delta AB'C$, $\Delta A'B'C$, $\Delta AB'C'$, $\Delta A'B'C'$, $\Delta ABC'$, $\Delta A'BC'$.

На основу везе са двоугловима важи:

$$\mathcal{P}(\Delta ABC) + \mathcal{P}(\Delta A'BC) = \mathcal{P}(\alpha)$$

$$\mathcal{P}(\Delta AB'C') + \mathcal{P}(\Delta A'B'C') = \mathcal{P}(\alpha)$$

$$\mathcal{P}(\Delta ABC) + \mathcal{P}(\Delta AB'C) = \mathcal{P}(\beta)$$

$$\mathcal{P}(\Delta A'B'C') + \mathcal{P}(\Delta A'BC') = \mathcal{P}(\beta)$$

$$\mathcal{P}(\Delta ABC) + \mathcal{P}(\Delta ABC') = \mathcal{P}(\gamma)$$

$$\mathcal{P}(\Delta A'B'C') + \mathcal{P}(\Delta A'B'C) = \mathcal{P}(\gamma)$$

Сабирањем претходних 6 једнакости добијамо

$$\mathcal{P}(\Delta ABC) + \mathcal{P}(\Delta A'BC) + \mathcal{P}(\Delta AB'C) + \mathcal{P}(\Delta A'B'C) + \mathcal{P}(\Delta AB'C') + \mathcal{P}(\Delta A'B'C') + \mathcal{P}(\Delta ABC') + \mathcal{P}(\Delta A'BC') + 2\mathcal{P}(\Delta ABC) + 2\mathcal{P}(\Delta A'B'C') = 2\mathcal{P}(\alpha) + 2\mathcal{P}(\beta) + 2\mathcal{P}(\gamma)$$

$$\mathcal{P}(2\pi) + 2\mathcal{P}(\Delta ABC) + 2\mathcal{P}(\Delta A'B'C') = 2\cdot 2\alpha + 2\cdot 2\beta + 2\cdot 2\gamma$$

$\mathcal{P}(\theta) = 2\theta$

Антиподални троуглови ΔABC и $\Delta A'B'C'$ су подударни, те имају исте површине

$$2\cdot 2\pi + 2\cdot\mathcal{P}(\Delta ABC) + 2\mathcal{P}(\Delta ABC) = 4\alpha + 4\beta + 4\gamma \quad /:2$$

$$2\pi + 2\mathcal{P}(\Delta ABC) = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma \quad /:2$$

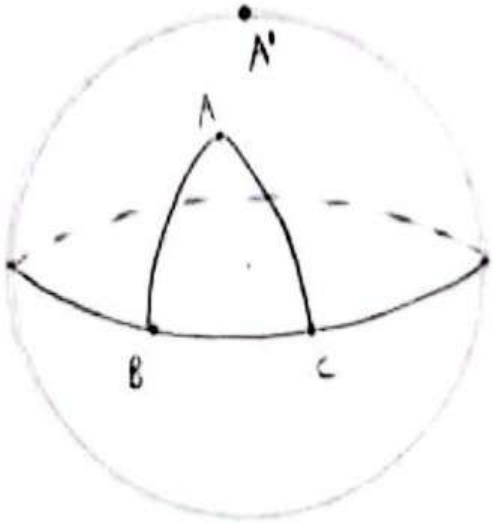
$$\pi + \mathcal{P}(\Delta ABC) = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\boxed{\mathcal{P}(\Delta ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi}$$ ← Ову формулу је још 1603. године открио енглески астроном и математичар Томас Хериот (1560-1621).

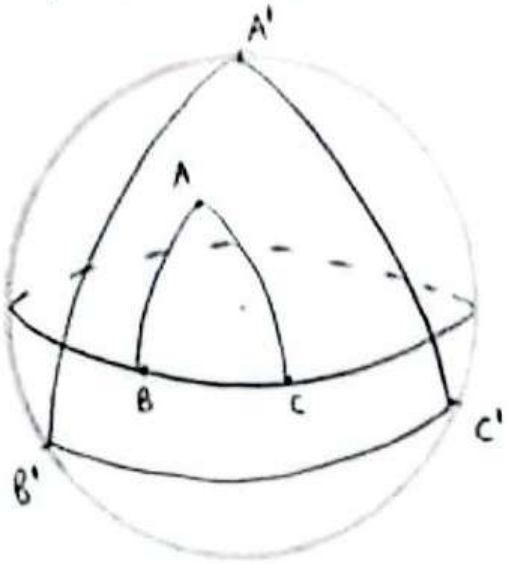
Како је површина троугла увек позитивна, закључујемо да је збир углова у сферном троуглу увек већи од π, односно $\boxed{\alpha+\beta+\gamma>\pi}$

Ако пођемо од произвољног сферног троугла ABC, можемо конструисати нови сферни троугао. Велики круг који садржи темена B и C дели сферу на две хемисфере, од којих једна садржи теме A (раније смо извели да теме A сферног троугла није на великом кругу одређеном тачкама B и C).

Означимо пол те хемисфере са A'. Ако је велики круг кроз B и C екватор, а теме A је на северној хемисфери, онда је A' северни пол.



Слично можемо дефинисати тачке B' и C'.



За нови троугао A'B'C' кажемо да је <u>поларан</u> троуглу ABC. Приметимо да је

$\widehat{A'A} < \frac{\pi}{2}$ (A' и A су у истој хемисфери одређеној великим кругом који садржи B и C)

$\widehat{A'B} = \frac{\pi}{2}$ јер је A' пол, а B тачка екватора и обим великог круга је $2\cdot 1\pi = 2\pi$

$\widehat{A'C} = \frac{\pi}{2}$ јер је $\widehat{A'C}$ дужина кружног лука који представља четвртину обима великог круга

Слично је и

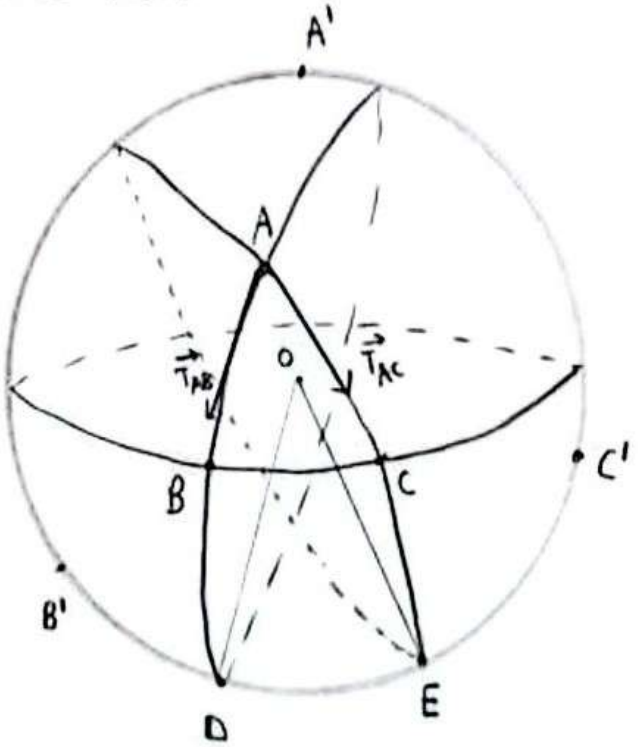
$\widehat{B'A} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{B'B} < \frac{\pi}{2}$, $\widehat{B'C} = \frac{\pi}{2}$,

$\widehat{C'A} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{C'B} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{C'C} < \frac{\pi}{2}$.

Претходних 9 једначина једнозначно одређују поларни троугао $A'B'C'$.

Из симетрије претходних једначина по A и A', B и B', C и C' закључујемо да је троугао ABC поларан троуглу $A'B'C'$.

Занима нас у каквој су вези странице поларног троугла са угловима оригиналног троугла ABC.

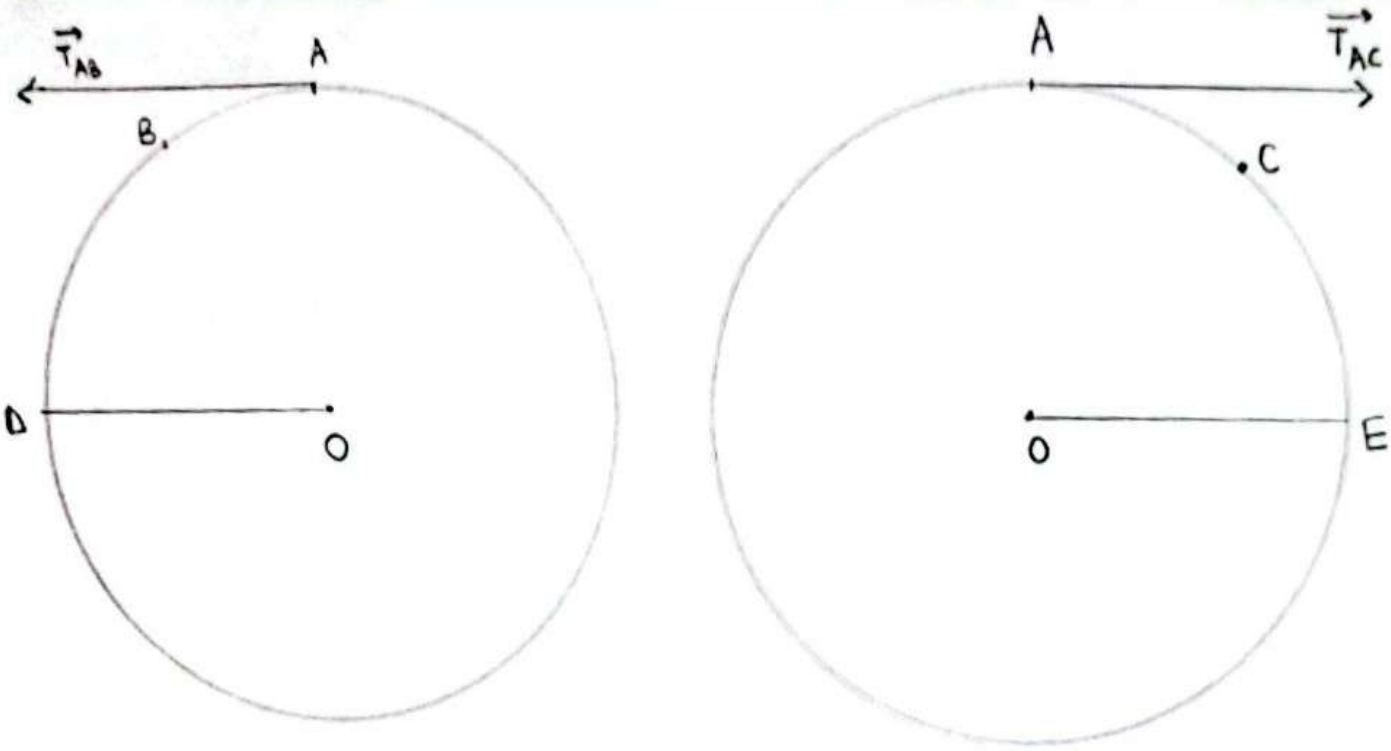


O - центар сфере

Посматрајмо пресек $\widehat{B'C'}$ са великим круговима одређеним луковима $\widehat{AB}$ и $\widehat{AC}$ и нека су то тачке D и E, редом.

Како је $\widehat{AB'} = \frac{\pi}{2} = \widehat{AC'}$ и тачке D и E су на великом кругу одређеном тачкама B' и C', то је $\widehat{AD} = \frac{\pi}{2}$ и $\widehat{AE} = \frac{\pi}{2}$. Посматрајмо велики круг који садржи тачке A, B и D.

По дефиницији тангентног вектора $\vec{T}_{AB}$ закључујемо да је $\vec{T}_{AB} = \vec{OD}$ (у питању су вектори истог смера и дужине, видети слику на наредној страни), а по дефиницији тангентног вектора $\vec{T}_{AC}$ је $\vec{T}_{AC} = \vec{OE}$ (у питању су вектори истог смера и дужине, видети слику на наредној страни), те је $\sphericalangle DOE = \sphericalangle(\vec{OD}, \vec{OE}) = \sphericalangle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}) = \alpha$, одакле је $\widehat{DE} = 1 \cdot \sphericalangle DOE = 1 \cdot \alpha = \alpha$ (по формули $\ell = r \cdot \alpha$ за дужину кружног лука круга полупречника r и централног угла α израженог у радијанима).



Како је $\widehat{C'A} = \frac{\pi}{2}$ $\widehat{C'B} = \frac{\pi}{2}$ и тачка D је на великом кругу одређеном тачкама A и B, то је $\widehat{C'D} = \frac{\pi}{2}$.

Како је $\widehat{B'A} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{B'C} = \frac{\pi}{2}$ и тачка E је на великом кругу одређеном тачкама A и C, то је $\widehat{B'E} = \frac{\pi}{2}$.

Сада је $\alpha' = \widehat{B'C'} = \widehat{B'E} + \widehat{C'D} - \widehat{DE} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha$. Сличне једнакости можемо извести за све странице поларног троугла, али важи и обратно јер смо већ видели да је поларни троугао поларног троугла $A'B'C'$ заправо троугао ABC Зато је $a = \pi - \alpha'$, $b = \pi - \beta'$, $c = \pi - \gamma'$. Претходно нам даје следеће везе

$\alpha' + \alpha = b' + \beta = c' + \gamma = a + \alpha' = b + \beta' = c + \gamma' = \pi$.

Изведене једначине за поларни троугао омогућавају да из већ познатих једнакости и неједнакости добијамо нове.

Из неједнакости за збир страница у сферном троуглу $\alpha' + b' + c' < 2\pi$ добили бисмо раније изведену неједнакост $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ за углове јер је

$\alpha' + b' + c' < 2\pi \iff \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma < 2\pi \iff \pi - \alpha - \beta - \gamma < 0 \iff \pi < \alpha + \beta + \gamma$.

Из косинусне теореме за поларни троугао је

$\cos\alpha' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos\alpha'$, а то је еквивалентно са

$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta)\cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta)\sin(\pi - \gamma)\cos(\pi - \alpha)$

$-\cos\alpha = -\cos\beta \cdot (-\cos\gamma) + \sin\beta \sin\gamma \cdot (-\cos\alpha) \quad / \cdot (-1)$

$\boxed{\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha}$ дуална косинусна теорема