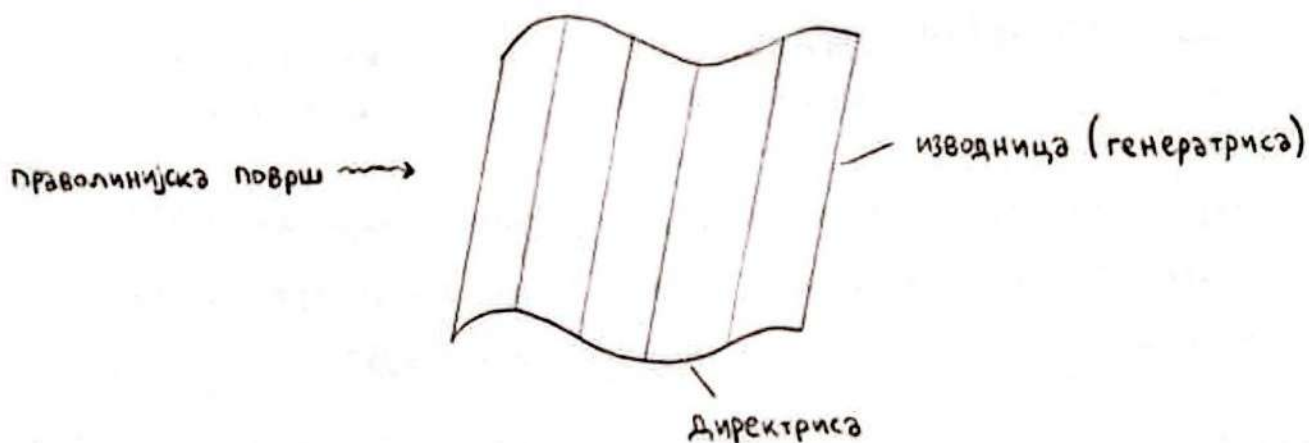


1.12. Правoliniјске површи

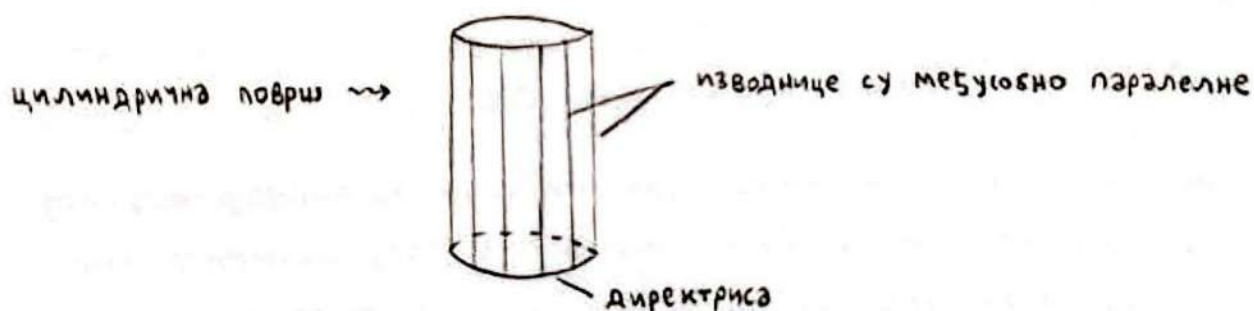
Површ у простору димензије 3 може да се направи на више различитих начина.

Правoliniјске површи су површи које можемо видети као унију правих, односно за њих важи да кроз сваку тачку површи пролази нека права која лежи на тој површи.

Уобичајено постоји нека просторна крива коју зовемо директриса, по којој се крећу праве које зовемо изводнице или генератрисе, а правoliniјска површ је скуп свих тачака које припадају тим изводницама.



Уколико су све изводнице међусобно паралелне, површ се назива цилиндрична површ или цилиндар. Дакле, цилиндар је унија паралелних правих, а најчешће се за директрису узима крива која лежи у равни која није паралелна изводницама.



У претходној лекцији смо већ видели да свака крива у равни дата једначином $f(x_1, x_2) = 0$ има одговарајућу цилиндричну површ која је дата том истом једначином у простору. Та цилиндрична површ за директрису има ту почетну криву, док су изводнице паралелне x_3 -оси.

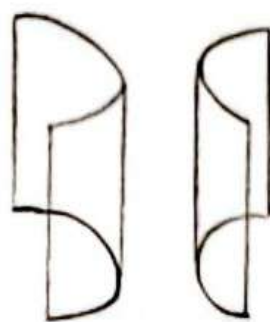
Уколико за директрису поставимо елипсу, параболу или хиперболу, за цилиндричне површи редом добијемо елиптички цилиндар, параболитки цилиндар или хиперболички цилиндар.



елиптички
цилиндар

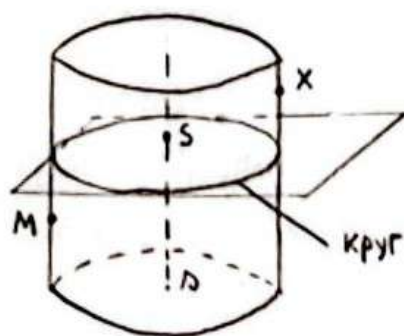


параболички
цилиндар



хиперболички
цилиндар

Посебан случај цилиндра је прави кружни цилиндар који добијемо ротацијом праве око њој паралелне праве. Важи да је пресек тог цилиндра и равни која је нормална на изводнице круг.

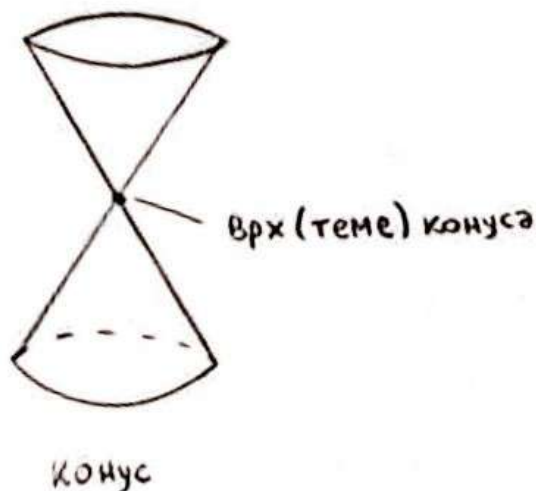


прави кружни цилиндар

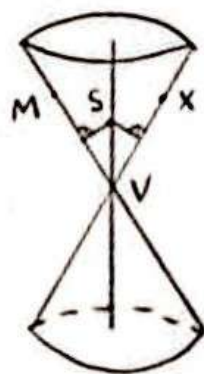
За разлику од општег цилиндра, прави кружни цилиндар има осу, те се у њега може уписати сфера. Приметимо да је овај цилиндар скуп свих тачака које су подједнако удаљене од његове осе, те можемо применити Теорему 1.13 на основу које је растојање тачке M правог кружног цилиндра од његове осе l (која садржи тачку S и има правац $\vec{u}_l$) једнако $d(M, l) = \frac{\|\vec{SM} \times \vec{u}_l\|}{\|\vec{u}_l\|}$, док је растојање произвољне тачке X тог цилиндра од осе l једнако $d(X, l) = \frac{\|\vec{SX} \times \vec{u}_l\|}{\|\vec{u}_l\|}$. Зато прави кружни цилиндар који има осу l (која садржи тачку S и има правац $\vec{u}_l$) и садржи тачку M можемо описати као скуп свих тачака X за које важи

$$\|\vec{SX} \times \vec{u}_l\| = \|\vec{SM} \times \vec{u}_l\|.$$

Ако изводница праволинијске површи крећући се по директриси све време пролази кроз неку унапред фиксирану тачку, онда она описује конусну површ или конус. Та заједничка тачка свих изводница зове се врх или теме конуса. Може се сматрати да је цилиндар специјалан случај конуса који има врх у бесконачности.



У лекцији 1.7 смо се упознали са правим кружним конусом који добијамо ротацијом једне праве око друге, при чему се те праве секу под оштрим углом. За разлику од општег конуса, прави кружни конус има осу, а у пресеку са равни која је нормална на осу добијамо круг, те се у њега може уписати сфера. Прави кружни конус је унија правих које у врху секу осу под константним углом. Да бисмо извели једначину конуса најпрактичније је посматрати неку тачку S са осе, која је различита од врха V , те прави кружни конус описати као унију правих које пролазе кроз V , а које су на константном растојању од тачке S .



Можемо применити Теорему 1.13 на основу које је растојање тачке S од изводнице VM једнако $\frac{\|\vec{VS} \times \vec{VM}\|}{\|\vec{VM}\|}$, док је растојање тачке S од изводнице VX , при чему је X произвољна тачка конуса различита од врха V , једнако

$\frac{\|\vec{VS} \times \vec{VX}\|}{\|\vec{VX}\|}$. Зато се прави кружни конус са врхом V који садржи тачку $M \neq V$ и његова оса садржи тачку $S \neq V$ може описати као скуп тачака X за које важи

$$\frac{\|\vec{VS} \times \vec{VX}\|}{\|\vec{VX}\|} = \frac{\|\vec{VS} \times \vec{VM}\|}{\|\vec{VM}\|}.$$

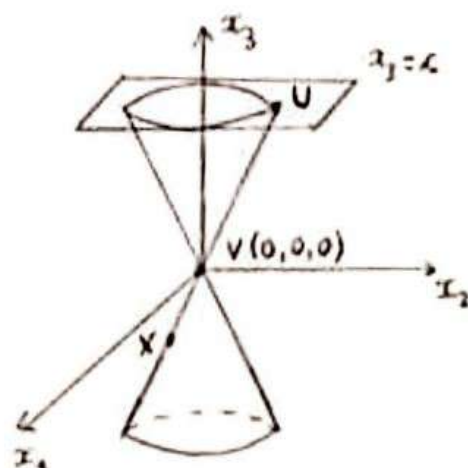
Вратимо се на општи конус. Када за директрису узмемо елипсу добијемо елиптички конус који постоји у класификацији површи другог реда.

Али, у класификацији површи другог реда нисмо видели параболски конус, нити хиперболички конус, али то не значи да те површи не постоје у класификацији површи другог реда под другим именом.

Ако за директрису узмемо неку криву другог реда, а за врх тачку која не припада равни у којој се та крива налази, поставља се питање да ли ће одговарајући конус бити површ другог реда.

Погледајмо како можемо одредити једначину конуса. Ради лакшег рачуна, транслирајмо врх у координатни почетак, односно можемо сматрати да је $V(0,0,0)$.

Такође, раван T у којој је директриса можемо заротирати тако да буде нормална на x_3 -осу. Тада су једначине директрисе $f(x_1, x_2) = 0$, $x_3 = \kappa$, где је $\kappa = d(V, T) > 0$.



За произволну тачку $X(x_1, x_2, x_3)$ конуса постоји изводница која је садржи, (а и врх V) и сече директрису у некој тачки $U(u_1, u_2, \kappa)$, где је $f(u_1, u_2) = 0$.

Тачке V, X и U су колинеарне, те је $\vec{VX} = \lambda \cdot \vec{VU}$.

Дакле, постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $(x_1, x_2, x_3) = \lambda \cdot (u_1, u_2, c)$.

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ x_3 = \lambda c &\Rightarrow \lambda = \frac{x_3}{c} \Rightarrow x_1 = \lambda u_1 = \frac{x_3}{c} u_1 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad c \neq 0 \text{ јер} \\ &\quad \text{је } c > 0 \end{aligned} \quad x_2 = \lambda u_2 = \frac{x_3}{c} u_2$$

За $x_3 \neq 0$ је $u_1 = \frac{cx_1}{x_3}$ и $u_2 = \frac{cx_2}{x_3}$, те нам $f(\frac{cx_1}{x_3}, \frac{cx_2}{x_3}) = 0$ даје једначину коју задовољава тачка $X(x_1, x_2, x_3)$ са конуса.

Ако је $f(u_1, u_2) = a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 + 2a_{13}u_1 + 2a_{23}u_2 + a_{33}$, тада је $f(\frac{cx_1}{x_3}, \frac{cx_2}{x_3}) = 0 \Leftrightarrow a_{11} \cdot (\frac{cx_1}{x_3})^2 + 2a_{12} \cdot \frac{cx_1}{x_3} \cdot \frac{cx_2}{x_3} + a_{22} \cdot (\frac{cx_2}{x_3})^2 + 2a_{13} \cdot \frac{cx_1}{x_3} + 2a_{23} \cdot \frac{cx_2}{x_3} + a_{33} = 0$

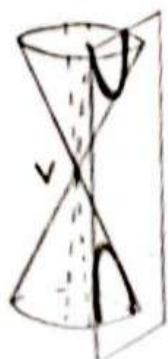
Након множења са x_3^2 добијамо

$$a_{11}c^2x_1^2 + 2a_{12}c^2x_1x_2 + a_{22}c^2x_2^2 + 2a_{13}cx_1x_3 + 2a_{23}cx_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

што јесте једначина површи другог реда. Дакле, почетни конус је подскуп неке површи другог реда.

Испоставља се да ако је директриса почетног конуса парабола или хипербола, одговарајућа једначина површи другог реда након множења са x_3^2 је једначина елиптичког конуса. Објаснимо геометријски ову појаву.

Ако елиптички конус засечемо са равни тако да у пресеку добијемо параболу или хиперволу, а онда тај пресек узмемо за директрису конуса, при чему врх задржимо, добијамо нови конус који је подскуп почетног елиптичког конуса. Али, у питању је прави подскуп јер праве елиптичког конуса које се налазе у равни која садржи врх и паралелна је почетној пресечној равни, никако не могу пресекти директрису новог конуса и зато оне нису укључене у нови конус. У случају да је нова директриса парабола постоји једна таква права елиптичког конуса, док у случају да је нова директриса хипербола постоје две такве праве.



хиперболички
конус је
елиптички
конус без
двех права



параболички конус
је елиптички конус
без једне праве