

Programiranje I

Beleške sa vežbi

Smer *Informatika*
Matematički fakultet, Beograd

Jelena Tomašević

October 28, 2005

Sadržaj

1	Vežbe—15.10.2005.	5
1.1	Formalni jezici i formalne gramatike	5
1.1.1	Jezici: zadaci	5
1.1.2	Gramatike i jezici: zadaci	6

Čas 1

Vežbe—15.10.2005.

1.1 Formalni jezici i formalne gramatike

1.1.1 Jezici: zadaci

1

Zadatak 1 *Dokazati da ne postoji nijedna reč x azbuke $\Sigma = \{a, b\}$ za koju važi jednakost $xa = bx$.*

Rešenje:

Izvedimo dokaz matematičkom indukcijom po dužini reči x .

- 1° Za praznu reč e ne važi jednakost $ea = be$ (jer je $a \neq b$), pa tvrdjenje važi za reč x dužine 0.

Za $|x| = 1$, važi $x = a$ ili $x = b$. Međutim, kako je $aa \neq ba$ i $ba \neq bb$, sledi da tvrdjenje važi za reči x dužine 1.

- 2° Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve reči dužine $n - 2$ i dokažimo da onda važi i za reči dužine n .

Pretpostavimo suprotno – da postoji reč x dužine n takva da važi $xa = bx$. Dakle, reč x počinje slovom b , a završava se slovom a , pa reč x može biti napisana u obliku $x = bya$, gde je y reč dužine $|x| - 2 = n - 2$. Onda važi:

$$byaa = bbya ,$$

odakle na osnovu zakona skraćivanja sledi

$$ya = by ,$$

tj. reč y je rešenje zadate jednačine i $|y| = n - 2$, što je u kontradikciji sa induktivnom pretpostavkom, odakle sledi da ne postoji reč x dužine n takva da važi $xa = bx$.

Tvrdjenje je dokazano za reči dužine 0 i 1, pa, iz dokazanog induktivnog koraka, sledi da tvrdjenje važi za sve prirodne brojeve, čime je dokazano da ne postoji nijedna reč x azbuke $\Sigma = \{a, b\}$ za koju važi jednakost $xa = bx$.

¹Zasnovano na materijalu "Teorija algoritama jezika i automata" Predraga Janićića

Zadatak 2 Rešiti nad azbukom $\Sigma = \{a, b, c\}$ jednačinu po x : $ax = xa$.

Rešenje:

Skup rešenja jednačine je skup reči oblika a^n , ($n \geq 0$).

($\supseteq$): Za svako $n \geq 0$, reč a^n jeste rešenje, jer $aa^n = a^{n+1} = a^na$.

($\subseteq$): Dokaz indukcijom po dužini reči x , da je svako rešenje oblika a^n ($n \geq 0$).

(1°) Za $|x| = 0$ tj. $x = e$ i $ax = xa$ važi $x = a^0$.

Za $|x| = 1$ iz $ax = xa$ sledi $x = a$, tj. $x = a^1$.

(2°) Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za sve reči dužine $n-2$ i dokažimo da je tačno i za reči dužine n . Neka je $|x| = n$ i neka je $ax = xa$. Dakle, reč x počinje i završava se slovom a , pa je $x = aya$, gde je y reč nad zadatom azbukom dužine $n-2$. Skraćivanjem se iz $aaya = aya$ dobija $ay = ya$, pa je reč y rešenje zadate jednačine dužine $n-2$. Na osnovu induktivne pretpostavke, reč y je oblika a^n , $n \geq 0$, pa je reč x oblika a^{n+2} , $n \geq 0$.

Dakle, svako rešenje date jednačine je oblika a^n ($n \geq 0$).

Dakle, skup rešenja jednačine je skup reči oblika a^n ($n \geq 0$).

1.1.2 Gramatike i jezici: zadaci

2

Zadatak 3 Odrediti jezik generisan gramatikom $G = (N, \Sigma, P, S)$, gde je $N = \{S\}$,

$\Sigma = \{a, b\}$,

$P = \{S \rightarrow aS \text{ (1°)}, S \rightarrow b \text{ (2°)}\}$.

Rešenje:

(Primer izvodjenja u gramatici G : $S \xrightarrow{1^\circ} aS \xrightarrow{1^\circ} aaS \xrightarrow{1^\circ} aaaS \xrightarrow{2^\circ} aaab$)

Dokažimo da važi:

$$L(G) = \{a^n b \mid n \in \mathbf{N}_0\}.$$

$\subseteq$: Svaka završna reč koja se izvodi u gramatici G je oblika $a^n b, n \in \mathbf{N}_0$.

Dokažimo indukcijom jače tvrdjenje:

Lema 1 Sve reči koje mogu biti izvedene u gramatici G su oblika $a^n S$ ili oblika $a^n b$ ($n \in \mathbf{N}_0$).

Dokaz indukcijom po dužini izvodjenja:

(1) $k = 0$: U izvodjenju nije primenjeno nijedno pravilo izvodjenja, tj. izvodjenje je trivijalno; za početni simbol S , dakle, dobija se takodje reč S . Kako je $S = a^0 S$, tvrdjenje važi za $k = 0$.

(2) Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sva izvodjenja čija je dužina manja od k i dokažimo da važi i za izvodjenja dužine k .

²Zasnovano na materijalu "Teorija algoritama jezika i automata" Predraga Janičića

Neka je $S \Rightarrow^k w$. Neka je $S \Rightarrow^{k-1} w' \Rightarrow w$. Reč w' je izvedena izvodjenjem dužine $k-1$, pa je, na osnovu induktivne hipoteze, w' oblika $a^n S$ ili oblika $a^n b$ ($n \in \mathbf{N}_0$). Reč w se netrivialno (izvodjenjem dužine 1) izvodi iz reči w' , pa w' mora da ima nezavršnih simbola. Dakle, w' je oblika $a^n S$. Ako je u k -tom koraku primenjeno pravilo 1° , onda je w oblika $a^{n+1} S$, a ako je primenjeno pravilo 2° , onda je w oblika $a^n b$.

Dakle, sve reči koje mogu biti izvedene u gramatici G su oblika $a^n S$ ili oblika $a^n b$ ($n \in \mathbf{N}_0$), što je i trebalo dokazati.

Na osnovu leme, svi članovi izvodjenja (sve reči koje mogu biti izvedene u gramatici G) su oblika $a^n S$ ili oblika $a^n b$ ($n \in \mathbf{N}_0$), pa i završne reči – reči bez nezavršnih simbola. Završne reči ne mogu biti oblika $a^n S$ (jer je S nezavršni simbol), pa su sve završne reči oblika $a^n b$ ($n \in \mathbf{N}_0$). Dakle, $L(G) \subseteq \{a^n b \mid n \in \mathbf{N}_0\}$.

$\supseteq$: Svaka reč $a^n b$, $n \in \mathbf{N}_0$, može biti izvedena u gramatici G .

Za proizvoljno n ($n \in \mathbf{N}_0$) reč $a^n b$ može biti izvedena u gramatici G :

$$S \xrightarrow{1^\circ} aS \xrightarrow{1^\circ} \dots \xrightarrow{1^\circ} a^n S \xrightarrow{2^\circ} a^n b$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

Zadatak 4 Odrediti jezik generisan gramatikom $G = (N, \Sigma, P, S)$, gde je $N = \{S\}$,
 $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{S \rightarrow aSb \ (1^\circ), S \rightarrow e \ (2^\circ)\}$.

Zadatak 5 Odrediti gramatiku koja generiše jezik $W = \{a^{2i}b^i \mid i > 0\}$.

Rešenje:

$G = (N, \Sigma, P, S)$, gde je $N = \{S\}$,
 $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{S \rightarrow aab \ (1^\circ), S \rightarrow aaSb \ (2^\circ)\}$
Dokažimo da važi $W = L(G)$.

$\subseteq$: Neka je $w \in W$, tj. neka je $w = a^{2i}b^i$, gde je $i > 0$.

w se može izvesti u gramatici G .

$$S \xrightarrow{2^\circ} aab \xrightarrow{1^\circ} (aa)^{i-1} Sb^{i-1} \xrightarrow{1^\circ} (aa)^i b^i.$$

Dakle, $W \subseteq L(G)$.

$\supseteq$: Indukcijom se može dokazati da je svaki član izvodjenja w oblika $a^{2i}Sb^i$ ($i \geq 0$) ili oblika $a^{2i}b^i$ ($i > 0$). Završna reč w ne može da sadrži simbol S , pa je oblika $a^{2i}b^i$ ($i > 0$), odakle sledi $W \supseteq L(G)$.

Zadatak 6 Odrediti gramatiku koja generiše jezik $W = \{a^n b^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mid n \geq 0\}$.

Zadaci za domaći:

Zadatak 7 Dokazati da ne postoji nijedna reč y azbuke $\Sigma = \{c, d\}$ za koju važi jednakost $cy = yd$.

Zadatak 8 Rešiti nad azbukom $\Sigma = \{a, b, c\}$ jednačinu po y : $yb = by$.

Zadatak 9 *Odrediti jezik generisan gramatikom $G = (N, \Sigma, P, S)$, gde je $N = \{S\}$,
 $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{S \rightarrow Sb \text{ (1°), } S \rightarrow a \text{ (2°)}\}$.*

Zadatak 10 *Odrediti gramatiku koja generiše jezik $W = \{b^i a^{3i} \mid i \geq 0\}$.*

Zadatak 11 *Odrediti gramatiku koja generiše sve palindrome nad azbukom $\Sigma = \{a, b\}$.*