Анализа 2, И смер

Редови (задаци за вежбу)

1. Израчунати збирове: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

2. Испитати конвергенцију редова: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sin n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2+2n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n+2n}{n^3+2n^2+4}$.

3. Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ са позитивним члановима конвергира, да ли увек морају да конвергирају и редови: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin a_n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{\alpha}$, $(\alpha\in\mathbb{R}_+)$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{a_n}-1)$?

4. Ако редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ конвергирају, доказати да конвергирају и редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$.

5. Испитати конвергенцију редова: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

6. Испитати конвергенцију редова: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$ $(p\in\mathbb{R})$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

7. Користећи интегрални критеријум испитати конвергенцију редова: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$ $(p,q>0)$.

8. Испитати обичну и апсолутну конвергенцију редова:
   (а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n+1}$,
   (б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$,
   (ц) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1+(-1)^n\cdot n}{n^2}$,
   (д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

9. Испитати конвергенцију редова:
   (а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3+(-1)^n}{n}$, (упутство: раставити општи члан на два сабирка);
   (б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+k^2}\right)$ (упутство: доказати да је $\pi\sqrt{n^2+k^2}-\pi n$ опадајући низ по n).

10. Испитати конвергенцију низа $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$.