

Анализа 2 (И смер): Равномерна конвергенција, задаци за вежбу

1. Испитати равномерну конвергенцију низа функција на наведеним скуповима.

(а) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ на $\mathbb{R}$;

(б) $f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$ на $\mathbb{R}$;

(в) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ на $\mathbb{R}$;

(г) $f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1 + n^2 x^2}$ на $(0, 1]$ и на $[1, +\infty)$;

(д) $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$ на $\mathbb{R}$.

2. Испитати равномерну конвергенцију функционалних редова на наведеним скуповима.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ на $[-1, 1]$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ на $(0, +\infty)$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ на $[0, 1]$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$ на $(0, \varepsilon)$ и на $(\varepsilon, +\infty)$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}$ на $\mathbb{R}$;

ђ) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ на $(0, +\infty)$.

3. Дат је низ функција $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$. За које $\alpha \in \mathbb{R}$

а) низ $f_n(x)$ конвергира тачка-по-тачка на $[0, 1]$?

б) низ $f_n(x)$ равномерно конвергира на $[0, 1]$?

в) важи $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$?