

1. ЕКВИВАЛЕНТНИ ТОКОВИ. ТЕОРЕМА О ИСПРАВЛИВОСТИ ВЕКТОРСКОГ ПОЉА

Теорема о исправљивости векторског поља нам даје опис фазног тока (до на дифеоморфизам) у близини некритичне тачке (односно тачке у којој се векторско поље не анулира). Видећемо да нам она гарантује да је у динамичком смислу, тај ток веома једноставан у близини некритичне тачке, тј. да је он еквивалентан транслацији. Зато је у динамичком смислу занимљивије понашање тока у близини критичне тачке, односно тачке еквилибријума система.

Уведимо прво неке појмове.

Дефиниција 1. Кажемо да су фазни токови ϕ^t и ψ^t дефинисани једначинама

$$\begin{aligned}\frac{d\phi^t}{dt} &= F(\phi^t), & \phi^0 &= \text{Id} \\ \frac{d\psi^t}{dt} &= G(\psi^t), & \psi^0 &= \text{Id}\end{aligned}$$

диференцијално конјуговани или диференцијално еквивалентни ако постоји дифеоморфизам

$$\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$$

такав да важи

$$\varphi \circ \phi^t = \psi^t \circ \varphi.$$

◇

Дефиниција 2. За диференцијабилно пресликавање $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, и векторско поље $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_*(F)$ је векторско поље дефинисано на слици пресликавања φ као:

$$\varphi_*(F)(\varphi(\mathbf{x})) = d\varphi(\mathbf{x})(F(\mathbf{x})),$$

и назива се *push forward* векторског поља F пресликавањем φ .

◇

Задатак 3. Доказати да важи $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ и, за дифеоморфизам φ , $(\varphi_*)^{-1} = \varphi_*^{-1}$. ✓

Тврђење 4. Фазни токови ϕ^t и ψ^t , генерисани векторским пољима F и G редом, диференцијално су еквивалентни помоћу дифеоморфизма φ ако и само важи $G = \varphi_*F$.

Доказ. $\Rightarrow$: Нека F генерише ϕ^t и нека је $\psi^t = \varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}$. Диференцирањем израза $\psi^t = \varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}$ по t добијамо:

$$\begin{aligned}(1) \quad G(\psi^t(\mathbf{x})) &= \frac{d}{dt} \psi^t(\mathbf{x}) = d\varphi(\phi^t \varphi^{-1}(\mathbf{x}))(F(\phi^t \varphi^{-1}(\mathbf{x}))) = \\ &= d\varphi(\varphi^{-1} \psi^t(\mathbf{x}))(F(\varphi^{-1} \psi^t(\mathbf{x}))) = \varphi_*F(\varphi \varphi^{-1} \psi^t(\mathbf{x})) = \varphi_*F(\psi^t(\mathbf{x}))\end{aligned}$$

па је $G = \varphi_*F$.

$\Leftarrow$: Нека је $G = \varphi_*F$ и векторска поља F и G генеришу токове ϕ^t и ψ^t редом. Означимо са $\chi^t := \varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}$. Обичним диференцирањем, исто као у (1), закључујемо да је

$$\frac{d}{dt} \chi^t(\mathbf{x}) = G(\chi^t(\mathbf{x})),$$

а како је $\chi^0 = \text{Id}$, из Пикарове теореме следи да мора бити $\chi^t = \psi^t$.

□

Теорема 5. Нека је векторско поље $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ глатко и нека је $F(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$ за $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{U}$. Тада постоји околина $\mathcal{V}$ тачке $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ и дифеоморфизам $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \varphi(\mathcal{U})$ такав да је $\varphi_*(F) = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

Напомена 6. Ознака $\frac{\partial}{\partial x_1}$ је ознака за константно векторско поље $(1, 0, \dots, 0)$.

◇

Доказ. Без губљења општости можемо да препоставимо да је $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}^1$.

Препоставимо за почетак да је $F(\mathbf{x}_0) = F(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Нека је B околина тачке $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ и $\delta_0 > 0$ такво да је систем за систем:

$$(2) \quad \frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \text{Id}.$$

дефинисан за $\mathbf{x} \in B$ и $t \in [-\delta_0, \delta_0]$. Означимо са $B_0 := B \cap \{x_1 = 0\}$. За $\mathbf{y} \in B_0$ дефинишимо

$$\psi : (-\delta_0, \delta_0) \times B_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \phi^{x_1}(0, x_2, \dots, x_n).$$

Докажимо да је ψ локални дифеоморфизам и да је ψ^{-1} пресликавање које исправља векторско поље $\mathbf{x}$. Имамо:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(0, x_2, \dots, x_n) = F(\phi^0(\mathbf{0})) = F(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial x_1},$$

а како је

$$\psi(0, x_2, \dots, x_n) = \phi_0(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n), \quad \text{тј.} \quad \psi|_{\{x_1=0\}} = \text{Id}$$

то је

$$d(\psi|_{\{x_1=0\}}) = d(\text{Id}|_{\{x_1=0\}}) = \text{Id}|_{\{x_1=0\}}.$$

Зато је

$$d\psi(0, x_2, \dots, x_n) = \left[F(\mathbf{0}) \left| \begin{array}{c} \star \\ \text{Id}|_{\{x_1=0\}} \end{array} \right. \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left| \begin{array}{c} \star \\ \text{Id}|_{\{x_1=0\}} \end{array} \right. \right],$$

где је $\star$ врста неких $n-1$ функција (по $x_1, \dots, x_n$). Одавде је $\det d\psi(0, x_2, \dots, x_n) = 1$, па по Теореме о инверзној функцији постоји околина $\mathcal{V}$ тачке $\mathbf{0}$ на којој је ψ дифеоморфизам. Нека је $\varphi := \psi^{-1}$ дефинисано на $\psi(\mathcal{V})$. Како је

$$\begin{aligned} \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) (\psi(x_1, \dots, x_n)) &= d\psi(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \psi(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \frac{\partial \phi^{x_1}}{\partial t}(0, x_2, \dots, x_n) = F(\phi^{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)) = F(\psi(x_1, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

тј.

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) = F,$$

то је

$$\varphi_*(F) = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Ако $F(\mathbf{x}_0) \neq \frac{\partial}{\partial x_1}$, онда можемо линеарном сменом ово лако да постигнемо. Нека је $V \cong \mathbb{R}^{n-1}$ векторски потпростор димензије $n-1$ ортогоналан на $F(\mathbf{x}_0)$ (кроз $\mathbf{x}_0$) и нека је $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ ортонормирана база простора V . Нека је L линеарни изоморфизам простора $\mathbb{R}^n$ дефинисан на бази $\{F(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ са

$$L : F(\mathbf{x}_0) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad L : \mathbf{v}_j \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Векторско поље

$$F_1(\mathbf{x}) := L(F(\mathbf{x}))$$

¹Ако $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, посматрајмо трансформацију $T_{-\mathbf{x}_0} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ и векторско поље $G := (T_{-\mathbf{x}_0})_* F$ Имамо:

$$G(\mathbf{x}) = (T_{-\mathbf{x}_0})_* F(\mathbf{x}) = dT_{-\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)(F(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)) = F(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0),$$

па је $G(\mathbf{0}) = F(\mathbf{x}_0)$. Дакле ако исправимо векторско поље G у околини тачке $\mathbf{0}$, помоћу дифеоморфизма φ , векторско поље F ћемо исправити у околини $\mathbf{x}_0$ помоћу дифеоморфизма $\varphi \circ T_{-\mathbf{x}_0}$.

испуњава претпоставке из првог дела доказа, па, ако је $\varphi_* F_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, тада је $\varphi \circ L$ тражено пресликавање. $\square$

Задатак 7. Доказати да из Теореме о исправљивости векторских поља следе Теорема о једнопараметарској фамилији дифеоморфизама и Пикарова теорема о егзистенцији и јединствености решења. $\checkmark$

2. ПЕАНОВА ТЕОРЕМА

На крају овог дела, доказаћемо једну слабију верзију Пикарове теореме, која нам, у случају да је векторско поље F само непрекидно али не и Липшицово, гарантује егзистенцију али не и јединственост решења.

Пример 8. Кошијев задатак $x' = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$ има бесконачно много решења: $x_1(t) = \text{sgn} t \cdot \frac{t^2}{4}$, $x_2(t) \equiv 0$, као и

$$x_\lambda(t) := \begin{cases} 0, & t \leq \lambda, \\ \frac{(t-\lambda)^2}{4}, & t > \lambda \end{cases}$$

за свако $\lambda > 0$ итд.

Ово није у контрадикцији са Пикаровом теоремом јер векторско поље (у овом случају функција) $F(x) = \sqrt{|x|}$ није Липшицово ни у једној околини нуле (зашто?). $\checkmark$

Теорема 9. (Пеанова теорема) Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрекидно. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји $\delta > 0$ и (не нужно јединствено) решење Кошијевог проблема

$$(3) \quad \mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

дефинисано на интервалу $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Доказ. У овом доказу искористићемо Арцела–Асколијеву теорему (коју смо радили на Анализи 2).

Теорема 10. (Арцела–Асколијева теорема) Низ непрекидних пресликавања $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ има подниз који равномерно конвергира на $[a, b]$ ако и само ако је равномерно непрекидан² и равномерно ограничен³. $\square$

Конструисаћемо низ пресликавања на који ћемо да применимо Арцела–Асколијеву теорему. Те функције ће бити део-по-део линеарне чији ће нагиб (односно извод) бити вредност векторског поља F у одговарајућим тачкама.

Претпоставићемо да је $t_0 = 0$ ради поједностављивања записа (доказ је исти у општем случају).

Нека је, као и у доказу Пикарове теореме, $r > 0$ и $B[\mathbf{x}_0, r] \subset \mathcal{U}$,

$$M := \max_{B[\mathbf{x}_0, r] \times [-a, a]} \|F\|$$

и $\alpha := \min\{r/M, a\}$.

Дефинисаћемо низ $\mathbf{x}_n : [0, \alpha] \rightarrow \mathcal{U}$ полигоналних апроксимација траженог решења, индукцијом по $j \in \{0, \dots, n\}$. Нека је:

$$\mathbf{x}_n(0) := \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}_n(t) := F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n)(t - j\alpha/n) + \mathbf{x}_n(j\alpha/n), \text{ за } t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n],$$

²За свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да важи: $\forall n \in \mathbb{N}, |s - t| < \delta \Rightarrow \|f_n(s) - f_n(t)\| < \varepsilon$.

³ $\|f_n(t)\| \leq M < +\infty$ за свако n и свако $t \in [a, b]$.

а у тачкама $t = j/n$ дефинишемо $\mathbf{x}_n$ тако да буду непрекидна пресликавања. Из конструкције видимо да су она и део-по-део глатка, са евентуално нарушеном глаткошћу у тачкама $t = j\alpha/n$. Прецизније, видимо да је

$$\mathbf{x}'_n(t) = F(\mathbf{x}_n((j-1)\alpha/n), (j-1)\alpha/n), \text{ за } t \in ((j-1)\alpha/n, j\alpha/n).$$

(На исти начин дефинишемо низ и на интервалу $[-\alpha, 0]$ и проверавамо сва својства на њему. Ради поједностављивања доказа, до краја све радимо на $[0, \alpha]$.)

Поново ћемо поделити остатак доказа на неколико корака.

I: Низ $\mathbf{x}_n$ је добро дефинисан. Да бисмо ово проверили, треба да покажемо да је $\mathbf{x}_n(j\alpha/n) \in \mathcal{U}$ (да би израз $F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n)$ који се појављује у дефиницији низа имао смисла). Доказаћемо да је заправо $\mathbf{x}_n(j\alpha/n) \in B[\mathbf{x}_0, r]$. Доказ изводимо индукцијом по j . За $j = 0$ имамо $\mathbf{x}_n(0) = \mathbf{x}_0 \in B[\mathbf{x}_0, r]$. Претпоставимо да је $\mathbf{x}_n(i\alpha/n) \in B[\mathbf{x}_0, r]$, за $i = 0, \dots, j$ и $j + 1 \leq n$. Имамо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_n((j+1)\alpha/n) - \mathbf{x}_0\| &\leq \sum_{i=1}^{j+1} \|\mathbf{x}_n(i\alpha/n) - \mathbf{x}_n((i-1)\alpha/n)\| \stackrel{(\spadesuit)}{=} \\ &\sum_{i=1}^{j+1} \frac{\alpha}{n} \|F(\mathbf{x}_n((i-1)\alpha/n), (i-1)\alpha/n)\| \stackrel{(\diamond)}{\leq} \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^{j+1} M = \frac{M(j+1)\alpha}{n} \leq M\alpha \stackrel{(\heartsuit)}{\leq} r, \end{aligned}$$

Једнакост $(\spadesuit)$ важи због начина на који смо дефинисали тачке $\mathbf{x}_n(i\alpha/n)$, неједнакост $(\diamond)$ важи због индукцијске хипотезе, а $(\heartsuit)$ важи јер је $\alpha \leq r/M$. Закључујемо

$$(4) \quad \mathbf{x}_n(j\alpha/n) \in B[\mathbf{x}_0, r].$$

II: Низ $\mathbf{x}_n$ је равномерно ограничен. За $t \in [(j-1)\alpha/n, j\alpha/n]$, вредност $\mathbf{x}_n(t)$ је конвексна комбинација вредности $\mathbf{x}_n((j-1)\alpha/n)$ и $\mathbf{x}_n(j\alpha/n)$. Како је кугла $B[\mathbf{x}_0, r]$ конвексан скуп, из (4) следи да је

$$\mathbf{x}_n(t) \in B[\mathbf{x}_0, r]$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, \alpha]$.

III: Низ $\mathbf{x}_n$ је равностепено непрекидан.

Означимо са Δ_n функције:

$$\Delta_n(t) := \begin{cases} \mathbf{x}'_n(t) - F(\mathbf{x}_n(t), t), & t \neq \frac{j\alpha}{n}, \\ 0 & t = \frac{j\alpha}{n}. \end{cases}$$

Докажимо да $\Delta_n(t)$ тежи нули кад $n \rightarrow \infty$ равномерно по t .

Имамо да је

$$\|\Delta_n(t)\| \leq \|F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n) - F(\mathbf{x}_n(t), t)\|,$$

за $t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n]$. За $t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n]$ важи:

$$(5) \quad \|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_n(j\alpha/n)\| = \|F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n)\|(t - j\alpha/n) \leq M\alpha/n.$$

Како је F непрекидно, то је оно и равномерно непрекидно на $[-\alpha, \alpha] \times B[\mathbf{x}_0, r]$. За дато $\varepsilon > 0$ изаберимо $\delta > 0$ такво да важи

$$|t - s| < \delta, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, s)\| < \varepsilon.$$

Нека је n_0 такво да за важи

$$\frac{\alpha}{n_0} < \delta, \quad \frac{M\alpha}{n_0} < \delta.$$

Како је, за $n \geq n_0$ и $t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n]$

$$|t - j\alpha/n| \leq \frac{\alpha}{n_0} < \delta,$$

а одатле, из (5) и

$$\|\mathbf{x}_n(j\alpha/n) - \mathbf{x}_n(t)\| < \delta,$$

слиди да

$$\Delta_n(t) \leq \|F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n) - F(\mathbf{x}_n(t), t)\| < \varepsilon$$

тј. $\Delta_n(t) \Rightarrow 0$.

Важи

$$\|\mathbf{x}_n(s) - \mathbf{x}_n(t)\| \stackrel{(\heartsuit)}{=} \left\| \int_t^s [F(\mathbf{x}_n(u), u) + \Delta_n(u)] du \right\| \leq \int_t^s \|F(\mathbf{x}_n(u), u) + \Delta_n(u)\| du \leq |t-s| (M+c),$$

где је c неко (униформно) горње ограничење низа Δ_n . Једнакост $(\heartsuit)$ следи из непрекидности пресликавања $\mathbf{x}_n$, непрекидности интеграла по горњој граници и Њутн-Лајбницевог формуле примењене на интервалима $((j-1)\alpha/n, j\alpha/n)$.

Из Арцела-Асколијеве теореме сада закључујемо да низ $\mathbf{x}_n$ има подниз (означен исто са $\mathbf{x}_n$) који равномерно конвергира ка неком пресликавању $\mathbf{x}$.

IV: $\mathbf{x}$ је решење једначине.

Имамо

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t [F(\mathbf{x}_n(u), u) + \Delta_n(u)] du.$$

Како смо већ доказали да $\Delta_n(t) \Rightarrow 0$, $\mathbf{x}_n \Rightarrow \mathbf{x}$ и како је F непрекидно, кад прођемо лимесом кроз горњу једнакост добијамо:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t F(\mathbf{x}(u), u) du,$$

што управо значи да је $\mathbf{x}$ решење једначине (3).

□

2.1. Веза са једначином вишег реда. Ако имамо једначину вишег реда:

$$(6) \quad x^{(n)}(t) = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

тада њу можемо да сведемо на систем од n једначина првог реда сменом:

$$(7) \quad \varphi : x \mapsto \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1(t) := x(t) \\ x_2(t) := x'(t) \\ \vdots \\ x_n(t) := x^{(n-1)}(t). \end{matrix}.$$

Систем тада постаје

$$(8) \quad \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) = f(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases}.$$

или, у векторском облику

$$\mathbf{x}'(t) = F(t, \mathbf{x}(t)),$$

где је

$$F(\mathbf{x}, t) = F(x_1, \dots, x_n, t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ f(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{bmatrix}.$$

Пресликавање φ из (7) је бијекција из скупа решење једначине (6) и (8). Заиста, његов инверз је пројекција на прву координату,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1.$$

Како су решења система (8) облика

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},$$

то је почетни услов $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ система који смо добили одређен почетним условом

$$(9) \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}.$$

Задавање вектора (9) се назива *почетним условом у случају једначине вишег реда*.

Из претходне дискусије директно следе Пикарова и Пеанова теорема за једначину реда n .

Теорема 11. (Пикарова теорема) Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и нека је функција $f : \mathcal{U} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна и локално униформно (по t) Липшицова по $\mathbf{x}$, тј. нека свака тачка из $\mathcal{U}$ има околину $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ такву да важи $\|f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{y}, t)\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, за неко $L > 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}_0$, $t \in I$. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ и $t_0 \in I$ постоји $\delta > 0$ и јединствено решење

$$\mathbf{x} : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathcal{U}$$

Кошијевог проблема (6) са почетним условом (9). □

Теорема 12. (Пеанова теорема) Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и функције $F : \mathcal{U} \times [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји $\delta > 0$ и (не нужно јединствено) решење Кошијевог проблема (6) са почетним условом (9). □

3. СТАБИЛНОСТ ЕКВИЛИБРИЈУМА, ФУНКЦИЈА ЉАПУНОВА

У претходној глави смо видели да се у околини несингуларне тачке ($F(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$) систем $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$ понаша предвидљиво, прецизније да је он у неким координатама обична трансформација. Заиста, ово је садржај Теореме о исправљивости векторског поља (Теорема 5). Због тога нам је интересантније да изучавамо понашање система у околини *сингуларне тачке*, односно тачке $\mathbf{x}_*$ за коју је $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$, коју зовемо и *стационарном, тачком*

равнотеже, или *еквилибријумом* система. Приметимо да је константна трајекторија једина трајекторија која пролази кроз еквилибријум, ако је поље F као у Пикаровој теорему (што у целој овој глави претпостављамо). Приметимо и да је, из Тејлоровог развоја

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_*) + dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*),$$

кад је $\mathbf{x}$ близу $\mathbf{x}_*$, и да је једначина

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)' = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$$

линеарна по $\mathbf{x} - \mathbf{x}_*$, тако да можемо да очекујемо да ће се и нелинеарни систем $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$ у близини еквилибријума понашати слично његовој линеаризацији $\mathbf{x}' = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x})$, а линеарне системе смо детаљно изучили.

Дефиниција 13. Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Кажемо да је $\mathbf{x}_*$

- *стабилни еквилибријум* ако за сваку околину $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ постоји околина $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0 \ni \mathbf{x}_*$, таква да важи

$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_1, \quad t \geq 0,$$

где је ϕ^t решење система

$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \text{Id};$$

- *асимптотски стабилни еквилибријум* ако је стабилни еквилибријум и ако још важи:

$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_*;$$

- *нестабилни еквилибријум* ако није стабилни.

◇

Пример 14. Координатни почетак је увек еквилибријум линеарног система $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Знамо да је решење овог система са почетном вредношћу $\mathbf{x}$ дато са $\phi^t(\mathbf{x}) = e^{At}\mathbf{x}$, као и да у матрици e^{tA} фигуришу линеарне комбинације функција $e^{\lambda t}$, $t^k e^{\lambda t}$, $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, $t^k e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $t^k e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ где су λ , $\alpha \pm i\beta$ сопствене вредности матрице A . Ако су све сопствене вредности такве да им је реални део строго негативан, еквилибријум је асимптотски стабилан. Ако матрица A има неку сопствену вредност са строго позитивним реалним делом, координатни почетак је нестабилни еквилибријум (зашто?). А ако су све сопствене вредности са реалним делом мањим или једнаким нули, тада постоји дискусија по вишеструкости сопствене вредности чији је реални део нула. Нпр. центар у планарном случају је стабилни али не и асимптотски стабилни еквилибријум, док, у вишим димензијама, ако је вишеструкост сопствене вредности $i\beta$ већа од један, можемо имати и нестабилни еквилибријум. У примеру матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

имамо нестабилни еквилибријум у координатном почетку.

У случају планарног система, који фазни портрети имају координатни почетак за стабилни, нестабилни, односно асимптотски стабилни еквилибријум? Размотрити и случај $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

✓

Задатак 15. Доказати да су асимптотски стабилни еквилибријуми изоловане тачке. Да ли исто важи за стабилни (нестабилни) еквилибријум? ✓

4. СТАБИЛНОСТ ЕКВИЛИБРИЈУМА - МЕТОД ФУНКЦИЈЕ ЛЈАПУНОВА

Било која функција V која задовољава услове следеће теореме се зове *функција Лјапунова*.

Теорема 16. (Теорема Лјапунова.) Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ класе C^1 и $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}$ такво да је $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$. Означимо са ϕ^t решење једначине

$$\frac{d}{dt}\phi^t(\mathbf{x}) = F(\phi^t(\mathbf{x})), \quad \phi^0 = \text{Id}.$$

Претпоставимо да постоји функција $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да важи

- V је класе C^1 на $\mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$
- $V(\mathbf{x}) > 0$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$, $V(\mathbf{x}_*) = 0$.

Тада важи

- (а) ако V опада дуж решења ϕ^t , тада постоји околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, решење $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је стабилни еквилибријум;
- (б) ако V строго опада дуж решења система, тада постоји околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, решење $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је асимптотски стабилни еквилибријум;
- (в) ако V строго расте дуж решења система, тада је $\mathbf{x}_*$ нестабилни еквилибријум.

Напомена 17. Ако уведемо ознаку

$$V'(\mathbf{x}) := \frac{d}{dt}[V(\phi^t(\mathbf{x}))]_{t=0},$$

из

$$\frac{d}{dt}[V(\phi^t(\mathbf{x}))]_{t=s} = \frac{d}{dt}[V(\phi^{t+s}(\mathbf{x}))]_{t=0} = V'(\phi^s(\mathbf{x}))$$

видимо да је

- услов (а) из Теореме 16 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) \leq 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$;
- услов (б) из Теореме 16 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) < 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$;
- услов (в) из Теореме 16 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) > 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$.

Како је

$$V'(\mathbf{x}) = dV(\phi^t(\mathbf{x}))(F(\phi^t(\mathbf{x})))|_{t=0} = \langle \nabla V(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}) \rangle,$$

закључујемо да провера да ли нека глатка функција испуњава неки од три услова (а), (б) или (в) из Теореме 16 не захтева експлицитно решавање једначине. ◇

Доказ тачке (а) Теореме 16. Доказаћемо само прву тачку. Заинтересовани студенти могу наћи доказ остале две тачке у мојој скрипти.

Нека важе претпоставке из тачке (а). Нека је $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ произвољна околина тачке $\mathbf{x}_*$ и $r > 0$ такво да $B[\mathbf{x}_*, r] \subset \mathcal{U}_1$. Нека је

$$m := \min_{\partial B[\mathbf{x}_*, r]} V(\mathbf{x}) > 0$$

и

$$\mathcal{U}_0 := \{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, r) \mid V(\mathbf{x}) < m\}.$$

Приметимо да је $\mathcal{U}_0$ отворен скуп и да $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}_0$.

Доказаћемо да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$, као и да је $\mathcal{U}_0$ тражена околина тачке $\mathbf{x}_*$ из дефиниције стабилног еквилибријума. Нека је $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$. Докажимо прво

да је $\phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, r)$ за свако $t \geq 0$ (одавде, на основу теореме о продужењу решења, следи да је $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за све $t \geq 0$, видети Последицу ??). Претпоставимо супротно, да је $\phi^{t_1}(\mathbf{x}) \notin B(\mathbf{x}_*, r)$ за неко $t_1 > 0$. Из непрекидности пресликавања $\phi^t(\mathbf{x})$ по t следи да је $\phi^{t_2}(\mathbf{x}) \in \partial B[\mathbf{x}_*, r]$ за неко $t_2 \in (0, t_1)$. Али, како функција V опада дуж трајекторија ϕ^t , добијамо

$$m \leq V(\phi^{t_2}(\mathbf{x})) \leq V(\phi^0(\mathbf{x})) = V(\mathbf{x}) < m,$$

што је контрадикција.

Из

$$V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) \leq V(\phi^0(\mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}_0) < m$$

закључујемо да је $V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) < m$, кадгод је $t \geq 0$ и $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0$. Одавде имамо

$$t \geq 0, \mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1,$$

што завршава доказ. $\square$

Пример 18. (Планарни линеарни систем.) Знамо да је координатни почетак еквилибријум линеарног система, и то: асимптотски стабилни у случају стабилних човорова и спирале за $\alpha < 0$, стабилни али не и асимптотски стабилни у случају центра и нестабилни у случају седла, нестабилних човорова и спирале за $\alpha > 0$. У сваком од ових случајева, осим у случају седла, као функција Љапунова из Теореме 16 може послужити квадрат норме, $V(x, y) := x^2 + y^2$.

Пример 19. Потражимо функцију Љапунова у облику $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ за систем

$$\begin{aligned} x' &= (z+1)(2y-x) \\ y' &= -(z+1)(x+y) \\ z' &= -z^3 \end{aligned}$$

и докажимо да је тачка $(0, 0, 0)$ асимптотски стабилни еквилибријум.

Како је $\nabla V(x, y, z) = 2(ax, by, cz)$, а $F(x, y, z) = ((z+1)(2y-x), -(z+1)(x+y), -z^3)$, то је

$$\langle \nabla V(x, y, z), F(x, y, z) \rangle = 2[(z+1)(-ax^2 + (2a-b)xy - by^2) - cz^4],$$

закључујемо да за избор:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1$$

важи

$$V(0, 0, 0) = 0, \quad V(x, y, z) > 0, (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \quad V'(\mathbf{x}) < 0,$$

односно да $(0, 0, 0)$ јесте асимптотски стабилни еквилибријум. $\checkmark$

Пример 20. (Лагранж–Дирихлеова теорема.) Други Њутнов закон $F = m\mathbf{a}$ у $\mathbb{R}^3$, за конзервативни систем ($F(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x})$) је еквивалентан систему у $\mathbb{R}^6$ ($\mathbf{v}$ је вектор брзине $\mathbf{x}'$):

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' = -\frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Једина тачка еквилибријума горњег система је тачка $(\mathbf{x}_*, \mathbf{v}_*)$ за коју важи

$$\nabla U(\mathbf{x}_*) = 0, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{0}.$$

Потражимо функцију Љапунова у облику функције енергије

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2.$$

Како је $E(\mathbf{x}_*, \mathbf{0}) = U(\mathbf{x}_*)$, изменимо мало (потенцијалну) функцију Љапунова у

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - U(\mathbf{x}_*) = U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 - U(\mathbf{x}_*).$$

Сада вредност функције у тачки $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ јесте једнака нули, а из Закона очувања енергије имамо:

$$\frac{d}{dt}E(\phi^t(\mathbf{x})) = 0 \leq 0.$$

Овиме смо доказали *Лагранж–Дирихлеову теорему*: ако је $\mathbf{x}_*$ строги локални минимум потенцијалне енергије U , тада је тачка $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ стабилни еквилибријум конзервативног система. Заиста, услов да је $\mathbf{x}_*$ строги локални минимум потенцијалне енергије U нам обезбеђује позитивност функције Љапунова у околини тачке $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ као и $V(\mathbf{x}, \mathbf{v}) > 0$ за $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \neq (\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$.

О функцији Љапунова можемо размишљати као о уопштењу енергије, као што је то овај пример показао. Касније ћемо видети да је функција Љапунова једно уопштење и норме (као што је то био случај у Примеру 21 и 22). ✓

Пример 21. (Планарни линеарни систем.) Знамо да је координатни почетак еквилибријум линеарног система, и то: асимптотски стабилни у случају стабилних човорова и спирале за $\alpha < 0$, стабилни али не и асимптотски стабилни у случају центра и нестабилни у случају седла, нестабилних човорова и спирале за $\alpha > 0$. У сваком од ових случајева, осим у случају седла, као функција Љапунова из Теореме 16 може послужити квадрат норме, $V(x, y) := x^2 + y^2$.

Пример 22. Потражимо функцију Љапунова у облику $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ за систем

$$\begin{aligned} x' &= (z+1)(2y-x) \\ y' &= -(z+1)(x+y) \\ z' &= -z^3 \end{aligned}$$

и докажимо да је тачка $(0, 0, 0)$ асимптотски стабилни еквилибријум.

Како је $\nabla V(x, y, z) = 2(ax, by, cz)$, а $F(x, y, z) = ((z+1)(2y-x), -(z+1)(x+y), -z^3)$, то је

$$\langle \nabla V(x, y, z), F(x, y, z) \rangle = 2[(z+1)(-ax^2 + (2a-b)xy - by^2) - cz^4],$$

закључујемо да за избор:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1$$

важи

$$V(0, 0, 0) = 0, \quad V(x, y, z) > 0, (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \quad V'(\mathbf{x}) < 0,$$

односно да $(0, 0, 0)$ јесте асимптотски стабилни еквилибријум. ✓

Пример 23. (Лагранж–Дирихлеова теорема.) Други Њутнов закон $F = m\mathbf{a}$ у $\mathbb{R}^3$, за конзервативни систем ($F(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x})$) је еквивалентан систему у $\mathbb{R}^6$ ($\mathbf{v}$ је вектор брзине $\mathbf{x}'$):

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' = -\frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Једина тачка еквилибријума горњег система је тачка $(\mathbf{x}_*, \mathbf{v}_*)$ за коју важи

$$\nabla U(\mathbf{x}_*) = 0, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{0}.$$

Потражимо функцију Љапунова у облику функције енергије

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2.$$

Како је $E(\mathbf{x}_*, \mathbf{0}) = U(\mathbf{x}_*)$, изменимо мало (потенцијалну) функцију Љапунова у

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - U(\mathbf{x}_*) = U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 - U(\mathbf{x}_*).$$

Сада вредност функције у тачки $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ јесте једнака нули, а из Закона очувања енергије (Пример ??) имамо:

$$\frac{d}{dt}E(\phi^t(\mathbf{x})) = 0 \leq 0.$$

Овиме смо доказали *Лагранж–Дирихлеову теорему*: ако је $\mathbf{x}_*$ строги локални минимум потенцијалне енергије U , тада је тачка $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ стабилни еквилибријум конзервативног система. Заиста, услов да је $\mathbf{x}_*$ строги локални минимум потенцијалне енергије U нам обезбеђује позитивност функције Љапунова у околини тачке $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ као и $V(\mathbf{x}, \mathbf{v}) > 0$ за $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \neq (\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$.

О функцији Љапунова можемо размишљати као о уопштењу енергије, као што је то овај пример показао. Касније ћемо видети да је функција Љапунова једно уопштење и норме (као што је то био случај у Примеру 21 и 22). ✓

5. СТАБИЛНОСТ ЕКВИЛИБРИЈУМА - МЕТОД СОПСТВЕНИХ ВРЕДНОСТИ

За почетак ћемо навести без доказа помоћно тврђење, које нам гарантује постојање једне посебне норме, придружене матрици A , норме која ће нам бити веома zgodna на неким местима. Сама ова норма се понекад назива и функција Љапунова придружена матрици A . За доказ (кога занима) погледати скрипту.

Лема 24. Нека је $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ матрица за које важи $\operatorname{Re} \lambda > 0$ за сваку сопствену вредност λ матрице A . Тада постоји скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathbb{R}^n$ и константа $c > 0$ такви да важи

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq c\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

за свако $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. □

Напомена 25. Користићемо и овај облик Леме 24: нека је $\operatorname{Re} \lambda < 0$ за сваку сопствену вредност λ матрице A . Тада постоји скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathbb{R}^n$ и константа $c > 0$ такви да важи

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq -c\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

за свако $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ово тврђење следи директно из Леме 24, примењене на матрицу $-A$. ◇

Већ смо споменули да је природно очекивати да се у близини еквилибријума систем понаша слично придруженом линеарном систему $(\mathbf{x}' = dF(\mathbf{x}_*)\mathbf{x})$. Следећа теорема је једна илустрација тога.

Теорема 26. Нека је $A := dF(\mathbf{x}_*)$ матрица извода прсликавања F у тачки $\mathbf{x}_*$ и нека је $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, за сваку сопствену вредност λ матрице A . Дефинишимо

$$V(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2,$$

где је $\|\cdot\|$ норма Љапунова придружена матрици A као у Напомени 25. Тада је V строга функција Љапунова из тачке (в) Теореме 16, па је $\mathbf{x}_*$ асимптотски стабилни еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, штавише, важи и следећа априорна оцена: постоје $c_1, c_2 > 0$ и околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ такви да важи

$$\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \leq c_2 e^{-c_1 t} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|,$$

за свако $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$.

Доказ. Очигледно је да је V глатка и строго позитивна функција (осим у $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$), као и да је $V(\mathbf{x}_*) = 0$.

Докажимо да V строго опада дуж решења:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\phi^t \mathbf{x}) &= \frac{d}{dt} \|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*, \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_* \rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{d\phi^t}{dt}(\mathbf{x}), \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_* \right\rangle = 2 \langle F(\phi^t(\mathbf{x})), \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_* \rangle. \end{aligned}$$

Како је

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_*) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*),$$

имамо:

$$(11) \quad \langle F(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{x}_* \rangle = \langle A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*), \mathbf{x} - \mathbf{x}_* \rangle \leq -c \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2 + \varepsilon(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2 \leq -c_1 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2,$$

за $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < \delta$, и $c_1 := c/2$. Из последње неједнакости и (10) добијамо:

$$\frac{d}{dt} V(\phi^t(\mathbf{x})) < 0$$

за свако $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta) \setminus \{\mathbf{x}_*\}$. Одавде специјално следи да је, ако је $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, онда је и $\phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, за $t \geq 0$.

Претпоставимо да је $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$ ($\Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, за $t \geq 0$). Из (10) и (11) добијамо

$$\frac{d}{dt} \|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| = \frac{\langle F(\phi^t(\mathbf{x})) - \mathbf{x}_*, \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_* \rangle}{\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|} \leq -c_1 \|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|,$$

па имамо

$$\frac{\frac{d}{dt} \|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|}{\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|} = \frac{d}{dt} \ln \|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \leq -c_1.$$

Одавде је

$$\ln \|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| = \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| + \int_0^t \frac{d}{ds} \ln \|\phi^s \mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| ds \leq \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| - c_1 t,$$

па је

$$\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| e^{-c_1 t}.$$

Горња норма је специјална норма Љапунова, али све норме у $\mathbb{R}^n$ су еквивалентне, што значи да је

$$a \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_E \leq b \|\cdot\|,$$

за неке позитивне константе a и b , где смо са $\|\cdot\|_E$ означили стандардну еуклидску норму. Одавде следи тврђење. $\square$

Важи и следећи обрат Теореме 26.

Теорема 27. *Ако је $\mathbf{x}_*$ стабилни еквилибријум, тада не постоји сопствена вредност матрице $dF(\mathbf{x}_*)$ чији је реални део строго позитиван.*

Доказ претходне теореме је сличан доказу Теореме 26, али технички много сложенији. Зато га овде изостављамо.