Осми домаћи задатак из Анализе 1 (И смер): изводи вишег реда, Тејлорова формула

1. Колико пута је функција $f(x) = |x|^3$ диференцијабилна у нули?
2. Наћи $f''(0)$ ако је $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$
3. Функцију f развити у Тејлоров полином степена n у околини тачке x_0 за:
   а) $f(x) = \sin(\sin x), \quad x_0 = 0, \quad n = 3;$
   б) $f(x) = \sqrt[m]{2^m + x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 2;$
   в) $f(x) = e^{x+x^2}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4;$
   г) $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4;$
   д) $f(x) = \ln \dfrac{\sin x}{x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 6;$
   ђ) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1, \quad n = 3;$
   е) $f(x) = x^x - 1, \quad x_0 = 1, \quad n = 3.$
4. Наћи $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$.
5. Наћи $n-$ти извод функције
   а) $\dfrac{1}{x(1+x)};$
   б) $\dfrac{1}{x^2 - 4x + 3};$
   в) $\cos(ax);$
   г) $\operatorname{ch}(ax).$
6. Наћи $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2$ и c_2 такве да важи $\sqrt[3]{(x-3)^2|2x-5|} = a_1x + b_1 + \dfrac{c_1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, кад $x \to +\infty$ и $\sqrt[3]{(x-3)^2|2x-5|} = a_2x + b_2 + \dfrac{c_2}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, кад $x \to -\infty$.
7. Наћи $a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ и d_2 такве да важи $\sqrt{1+x^2} - x = a_1x + b_1 + \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{d_1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, кад $x \to +\infty$ и $\sqrt{1+x^2} - x = a_2x + b_2 + \dfrac{c_2}{x} + \dfrac{d_2}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, кад $x \to -\infty$.
8. Доказати Лајбницову формулу: $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$, где је $f^{(0)}(x) = f(x)$.
9. Наћи $n-$ти извод функције
   а) $(x^2 + 3x - 7)e^{-x};$
   б) $x^2 \operatorname{ch} x;$
   в) $\sin^2 x;$
   г) $\sin^4 x + \cos^4 x.$
10. Израчунати
    а) $\sqrt{5}$ с тачношћу од 10^{-4};
    б) e с тачношћу од 10^{-8}.