Седми домаћи задатак из Анализе 1 (И смер): основне теореме диференцијалног рачуна

1. У којим тачкама крива $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$ можда нема тангенту? Да ли има леви и десни извод у тим тачкама?

2. Наћи апсолутне максимуме и минимуме функције f на датом интервалу: а) $f(x) = x^2 - 1$, за $-1 \le x \le 2$; б) $f(x) = 4 - x^2$, за $-3 \le x \le 1$; в) $f(x) = -\sqrt[3]{x^4}$, за $-1 \le x \le 8$; г) $f(x) = -\sqrt{5 - x^2}$, за $-\sqrt{5} \le x \le 1$; д) $f(x) = 2 - |x|$, за $-1 \le x \le 3$; ђ) $f(x) = |x - 5|$, за $4 \le x \le 7$.

3. Наћи локалне екстремне вредности и интервале монотости функције f: а) $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$; б) $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 5$; в) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; г) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 2\operatorname{tg} x$; д) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$; ђ) $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 0, \\ 3 + 2x - x^2, & x \le 0 \end{cases}$; е) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}, & x \le 1, \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1. \end{cases}$

4. Доказати да кубни полином има највише три реалне нуле.

5. Доказати да између сваке две нуле полинома $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ лежи нула полинома $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$.

6. Наћи број решења једначине $x^3 - 6x^2 + 9x - a = 0$ у зависности од реалног параметра a.

7. Доказати неједнакости

   а) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} \le \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \le \dfrac{b-a}{\cos^2 b}, \quad 0 \le a < b < \dfrac{\pi}{2}$;

   б) $\cos x \le 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}, \quad x \ge 0.$

8. Нека је функција f два пута диференцијабилна на $(0, 2)$, непрекидна на $[0, 2]$ и нека је $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(2) = 2$. Доказати да постоји $c \in (0, 2)$ такво да је $f''(c) = 0$.

9. Наћи следеће лимесе применом Лопиталовог правила: а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$;
   б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\log(x+\sqrt{x^2+1})} - \dfrac{1}{\log(x+1)}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$.

10. Нека је f диференцијабилна на $[a, +\infty)$ и нека је $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) + f'(x)) = c \in \mathbb{R}$. Доказати да је $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$.