

Пети домаћи задатак из Анализе 1 (И смер): својства непрекидних функција

1. Доказати да полином непарног степена има барем једну реалну нулу. Зашто исти доказ не пролази за полином парног степена?
2. Доказати да једначина $x = \cos x$ има најмање једно решење.
3. Доказати да једначина $x^3 - 15x + 1 = 0$ има три решења у интервалу $(-4, 4)$.
4. Доказати да функција $f(x) = (x - a)^2(x - b)^2 + x$ узима вредност $\frac{a+b}{2}$.
5. Ако је $f(x) = x^3 + 8x + 10$ доказати да f узима вредности: а) π ; б) $-\sqrt{3}$; в) $5,000,000$.
6. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна ограничена функција. Доказати да једначина $f(x) = x^7$ има барем једно решење.
7. Ако је функција $f(x)g(x)$ непрекидна у тачки $x = 0$ да ли функције $f(x)$ и $g(x)$ морају бити непрекидне у тачки $x = 0$? Да ли је ово у супротности са Теоремом о производу непрекидних функција (образложити одговор)?
8. Навести пример функције која у тачки $x = 2$ има: а) отклоњив прекид; б) прекид прве врсте; в) прекид друге врсте.
9. Навести пример функција f и g које су обе непрекидне у тачки $x = 0$, а да композиција $f \circ g$ има прекид у тачки $x = 0$. Да ли је ово у супротности са Теоремом о композицији непрекидних функција (образложити одговор)?