

**Четврти домаћи задатак из Анализе 1 (И смер): рачун са малим  $o$ , непрекидност**

1. Доказати да важи:

а)  $o(x^m) + o(x^n) = o(x^{\min\{m,n\}}), x \rightarrow 0, \quad o(x^m) + o(x^n) = o(x^{\max\{m,n\}}), x \rightarrow \infty;$

б)  $o(o(f)) = o(f), x \rightarrow a;$

в)  $f \cdot o(g) = o(fg), x \rightarrow a;$

г)  $o(f)o(g) = o(fg), x \rightarrow a.$

2. Наћи следеће лимесе:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - \sqrt{5}}{x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^{\sin x}}{x^3};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\sin 2x};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - \sqrt{2x});$

ђ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}}.$

3. Одредити константе  $a$  и  $b$  такве да важи  $x \log \frac{x}{x+1} = ax + b + o(1)$ , кад  $x \rightarrow \infty$ .

4. Одредити  $a$  и  $b$  тако да важи  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + bx^2 + 1} - 2x \right) = -2$ .

5. Испитати непрекидност и врсте прекида функције  $f$ : а)  $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, x \neq 0, f(0) = 1;$

б)  $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, x \neq 0, f(0) = 1;$  в)  $f(x) = x + [x];$  г)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1, \\ ax + b, & -1 \leq x \leq 3, \\ e^x - 7, & x > 3. \end{cases}$

6. Нека је дата функција  $f(x) = \begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ c, & x = 0. \end{cases}$  Наћи константу  $c$  тако да функција буде непрекидна на  $\mathbb{R}$ .

7. Да ли постоји функција  $f$  која није непрекидна таква да је

а)  $f^2$  непрекидна? б)  $f^3$  непрекидна? в)  $|f|$  непрекидна?

8. Доказати да је Дирихлеова функција  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  прекидна у свакој тачки из  $\mathbb{R}$ . Доказати да је функција  $g(x) = xf(x)$  непрекидна у нули, а прекидна у свакој тачки из  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .