

**Једанаести домаћи задатак из Анализе 1 (И смер): монотони низови. Поднизови и тачке
нагомилавања**

1. Доказати да ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = a$, онда је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
2. Испитати конвергенцију следећих рекурентно задатих низова. У случајевима у којим конвергирају, израчунати лимес.
 - а) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_{n+1} = x_n - 2x_n^2$, за $n \geq 1$;
 - б) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)$, за $n \geq 1$;
 - в) $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{2x_n^2 + 1}{2x_n + 1}$, за $n \geq 0$;
 - г) $x_0 = -1$, $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$, за $n \geq 0$.
3. Доказати неједнакости $\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}$.
4. Наћи следеће лимесе:
 - а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n-1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^{2n}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2+2} \right)^{1-3n^2}$.
5. Наћи све тачке нагомилавања, $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$ низа a_n :
 - а) $a_n = ((-1)^n + 1) \frac{n}{n+1}$; б) $a_n = \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{2n}{3n+1}$; в) $a_n = 3^{(-1)^n n}$; г) $a_n = \left(\frac{n-2}{n} \right)^n \sin \frac{n\pi}{3} + \cos(n\pi)$.
6. Доказати да низ $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ конвергира.
7. Доказати Кошијеву теорему: ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, онда је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$.
8. Ако је низ a_n монотон и $b_n \sim a_n$, кад $n \rightarrow \infty$ (тј. $b_n = a_n + o(a_n)$, $n \rightarrow \infty$), доказати да низ b_n не мора да буде монотон.