Десети домаћи задатак из Анализе 1 (И смер): лимес низа

1. Доказати користећи дефиницију лимеса:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{1-n} = -2$;

   б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-7n^6}{n^6+3} = -7$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+1} = +\infty$;

   г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n}{\sqrt{n+1}} = -\infty$.

2. Доказати да важи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Да ли важи обрнута импликација? Да ли важи обрнута импликација за неки избор $a \in \mathbb{R}$ (образложити одговоре)?

3. а) Ако низови a_n и $a_n b_n$ конвергирају, да ли низ b_n мора да конвергира (образложити)?

   б) Ако низ a_n конвергира, а низ b_n дивергира, да ли низ $a_n b_n$ мора да дивергира? Да ли мора да конвергира (образложити)?

   в) Ако низ a_n конвергира, да ли низ $[a_n]$ (цео део) мора да конвергира? Да ли мора да дивергира (образложити)?

4. Израчунати:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n^n)}{n}$;

   б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]}{n^2+1}$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\sin n+1}{2n+3}$.

   Која се теорема користи у израчунавању претходних лимеса?

5. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$.

6. Израчунати:
   а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(0,5)^n+2^n+5^n+7^n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$, за $a_i > 0$, $i=1,\dots,k$;
   г) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+n+n^2}$, за $a>0$.

7. Доказати помоћу низова да функција $\cos\frac{1}{x}$ нема лимес кад $x \to 0^+$. Доказати помоћу низова да је функција $[x]$ прекидна у m, за $m \in \mathbb{Z}$.

8. Нека је функција f диференцијабилна у нули и нека је $f(0)=0$. Дефинишимо низ $a_n := nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = f'(0)$. Наћи лимесе следећих низова:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1)$.

9. Тројка природних бројева n, m, k се назива Питагорина тројка ако је $n^2+m^2=k^2$. Претпоставимо да је n непаран и дефинишимо $m := \left[\frac{n^2}{2}\right]$ и $k := \left\lceil\frac{n^2}{2}\right\rceil$ (где $\lceil\alpha\rceil$ означава најмањи цео број већи или једнак α). Доказати је $n^2+m^2=k^2$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[\frac{n^2}{2}\right]}{\left\lceil\frac{n^2}{2}\right\rceil}$.

10. Доказати јединственост лимеса: ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, тада је $a=b$.

11. Доказати да ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = +\infty$