АНАЛИЗА 3-И

Домаћи 3: Изводи вишег реда. Тејлорова формула

1. Наћи:

   (а) $\frac{dz}{dt}$ ако је $z = e^{x^2+y^2}$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ $(a = const)$;

   (б) $\frac{dz}{dx}$ ако је $z = \ln(x^2 - y^2)$, $y = e^x$;

   (в) z'_u и z'_v ако је $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

2. Наћи:

   (а) $\frac{z}{x}$ и $\frac{z}{y}$ ако је $z^3 - 3xyz = a^3$ $(a = const)$;

   (б) dz ако је $xyz = x + y + z$;

   (в) y' и y'' ако је $(xy - \alpha)^2 + (xy - \beta)^2 = r^2$ $(\alpha, \beta, r = const)$.

3. Показати да за функцију $f(x, y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0, 0) = 0$ важи $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

4. Наћи парцијалне изводе другог реда функција:

   (а) $z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$;

   (б) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

5. Показати да функција $z = \phi(x)\psi(y)$ задовољава једначину $z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z'_x \cdot z'_y$ (ако су ϕ и ψ двапут диференцијабилне функције).

6. (а) Ако је $f \in C^2(\mathbb{R})$, $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, доказати да је $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(r)$.
   (б) За $f(r) = \frac{1}{r}$ показати да је $\Delta u \equiv 0$.

7. Извести приближне формуле с тачношћу до чланова другог реда за изразе:

   (а) $\frac{\cos x}{\cos y}$;

   (б) $\operatorname{arctg} \frac{1+x+y}{1-x+y}$.