

АНАЛИЗА 3-И

Домаћи 2: Изводи функција више променљивих

1. Наћи парцијалне изводе функција:

(а) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$;

(б) $f(x, y, z) = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$.

2. Показати да функција $z = y \ln(x^2 - y^2)$ задовољава једначину $\frac{1}{x} \cdot z'_x + \frac{1}{y} \cdot z'_y = \frac{z}{y^2}$.

3. Одредити диференцијале функција:

(а) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$;

(б) $u = x^{y^2}z$.

4. Показати да је функција $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f(0, 0) = 0$, непрекидна у $(0, 0)$ и има парцијалне изводе који су ограничени у околини те тачке, али да није диференцијабилна у $(0, 0)$.

5. Показати да је функција $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$ прекидна у $(0, 0)$, али да у тој тачки има парцијалне изводе.

6. Показати да функција $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$, има у околини тачке $(0, 0)$ парцијалне изводе који су прекидни у $(0, 0)$ и неограничени; ипак, она је диференцијабилна у $(0, 0)$.

7. Наћи извод функције $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ у тачки $(1, 1)$ у правцу l који гради угао φ са позитивним смером x -осе. У ком правцу је тај извод: (а) максималан; (б) минималан; (в) једнак нули?

8. Наћи извод функције $z = \ln(x^2 + y^2)$ у тачки $M(3, 4)$ у правцу њеног градијента.

9. Показати да функција $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$ има извод у сваком правцу на $\mathbb{R}^2$, али није диференцијабилна у $(0, 0)$.

10. Одредити Јакобијеву матрицу и детерминанту система функција $x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \varphi$.