

АНАЛИЗА 3-И

Домаћи 1: Простор $\mathbb{R}^n$ и функције више променљивих

1. Нека су $\{M_n\}$ и $\{N_n\}$ низови у $\mathbb{R}^2$ за које је $\lim M_n = M_0$, $\lim N_n = N_0$. Доказати да је $\lim d(M_n, N_n) = d(M_0, N_0)$.

2. Одредити домене следећих и функција:

(а) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}$, $a > 0$;

б $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2}$;

(в) $f(x, y, z) = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$;

(г) $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$.

3. На основу дефиниције показати да је $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (x^2 - xy + y^2) = 3$.

4. Да ли постоји $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$?

5. Наћи лimes функције $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$ дуж правца $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha$ кад $t \rightarrow +\infty$. Да ли је функција $f(x, y)$ бесконачно мала кад $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$?

6. Наћи $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$ и $\lim_{y \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ ако је $f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}$.

7. Наћи следеће граничне вредности:

(а) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin xy}{x}$;

(б) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$;

(в) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

8. Показати да је функција $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$ непрекидна дуж сваког зрака $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha$, али није непрекидна у тачки $(0, 0)$.

9. Да ли је функција $f(x, y, z) = \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2}$, $f(0, 0, 0) = 0$ непрекидна на $\mathbb{R}^3$?