

Analiza 1
Letnji semestar 2013/2014
dr Jelena Katić

Autor:
Nikola Ajzenhamer

10. jul 2014.

Zahvaljujem se kolegama Anji Bukurov i Pavlu Joksoviću na ogromnoj pomoći koju su mi pružili prilikom pisanja ove skripte.

Posebno se zahvaljujem profesorki Jeleni Katić koja je učestvovala u poboljšanju ove skripte, ispravljajući greške i davajući mi korisne savete.

Sadržaj

1	Aksiome realnih brojeva	5
1.1	Supremum	6
1.2	Kantorova teorema	11
2	Limes i neprekidnost funkcije	13
2.1	Limes funkcije	15
2.2	Univerzalna definicija	17
2.3	Stavovi limesa	18
2.3.1	Stav o neprekidnosti funkcije	20
2.4	Jednostrani limesi	22
2.5	Neodređeni oblici	25
2.6	Osnovni limesi (i njihove posledice)	28
2.7	Limes monotone funkcije	31
3	Asimptotske relacije o i $\sim$	34
3.1	Relacija o	34
3.2	Relacija $\sim$	37
3.3	Veza između o i $\sim$	39
4	Svojstva neprekidnih funkcija	43
4.1	Lokalna svojstva neprekidnih funkcija	43
4.2	Globalna svojstva neprekidnih funkcija	45
4.2.1	Koši - Bolcanova teorema	45
4.2.2	Teorema o međuvrednosti	48
4.2.3	Vajerštrasova teorema	50
4.3	Vrste prekida	53
5	Neprekidnost monotone i inverzne funkcije	55
6	Izvodi	61
6.1	Definicija izvoda	61
6.2	Interpretacije izvoda	61
6.2.1	Geometrijska interpretacija izvoda	61
6.2.2	Mehanička interpretacija izvoda	62
6.3	Neki izvodi	62
6.4	Diferencijabilnost funkcije	63
6.5	Pravila izvoda	66
6.6	Izvod složene i inverzne funkcije	67
6.6.1	Izvod složene funkcije	67
6.6.2	Izvod inverzne funkcije	68
7	Osnovne teoreme diferencijalnog računa	72
7.1	Fermaova teorema	72
7.2	Tri teoreme o srednjoj vrednosti	72
7.2.1	Rolova teorema	72
7.2.2	Lagranževa teorema	73
7.2.3	Košiјеva teorema (o srednjim vrednostima diferencijalnog računa)	75
7.3	Lopitalova pravila	77

7.4	Izvodi višeg reda	79
7.4.1	Svojstva izvoda višeg reda	80
8	Tejlorov polinom	81
8.1	Maklorenov polinom	82
9	Kose asimptote	88
10	Dovoljni uslovi lokalnih ekstrema	90
11	Konveksnost	92
11.1	Konkavnost	95
12	Ispitivanje funkcija i skiciranje grafika	97
13	Nizovi	110
13.1	Monotoni nizovi	113
13.2	Podnizovi i tačke nagomilavanja	116
13.3	Košijevi nizovi	119
13.4	Veza limesa niza i limesa funkcije i neprekidnosti	121
13.4.1	Dokazi pojedinih teorema (preko nizova)	122

PRVA NEDELJA

1 Aksiome realnih brojeva

Posmatramo strukturu realnih brojeva $\mathbf{R} = (R, +, \cdot, \leq)$.

- (A1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ asocijativnost sabiranja (operacije $+$)
- (A2) $x + y = y + x$ komutativnost sabiranja
- (A3) $\exists 0 : x + 0 = x$ postojanje neutralnog elementa za $+$ kojeg nazivamo „nula”
- (A4) $\forall x \exists y : x + y = 0$ postojanje inverznog elementa za $+$ i pišemo $y = -x$

Svaka struktura koja ima jednu operaciju i zadovoljava (A1), (A3), (A4) je *GRUPA*, a ako važi i (A2), onda je *ABELOVA GRUPA* ili *KOMUTATIVNA GRUPA*.

- (A5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ asocijativnost množenja (operacije $\cdot$)
- (A6) $x \cdot y = y \cdot x$ komutativnost množenja
- (A7) $\exists 1 : x \cdot 1 = x$ postojanje neutralnog elementa za $\cdot$ kojeg nazivamo „jedinica”
- (A8) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ distributivnost $\cdot$ u odnosu na $+$
- (A9) $\forall x, x \neq 0, \exists y : x \cdot y = 1$ postojanje inverznog elementa za $\cdot$ i pišemo $y = \frac{1}{x}$
- (A10) $0 \neq 1$

Struktura koja zadovoljava A1 – A8 naziva se *KOMUTATIVNI PRSTEN sa 1*.
Struktura koja zadovoljava A1 – A9 naziva se *POLJE*.

Primeri:

- 1) $\mathbf{R}$ je grupa $(+)$, prsten i polje
- 2) $\mathbf{N}^+ = (N, +)$ nije grupa zbog A4
- 3) $(Z, +)$ jeste grupa (i to Abelova)
- 4) $(Z, +, \cdot)$ jeste prsten, ali nije polje zbog A9
- 5) $(Q, +, \cdot)$ jeste polje

- (A11) $x \leq x$ refleksivnost
- (A12) $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$ antisimetričnost
- (A13) $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$ tranzitivnost

Relacija koja zadovoljava A11 – A13 je *relacija PORETKA*.

- (A14) $\forall x, y \in \mathbf{R} : x \leq y$ ili $y \leq x$

Relacija poretka koja zadovoljava i A14 je *relacija TOTALNOG PORETKA*.

- (A15) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$ usklađenost (saglasnost) poretka i $+$
- (A16) $\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \implies x \cdot y \geq 0$ usklađenost (saglasnost) poretka i $\cdot$

Primeri (nastavak):

6) Relacija „biti podskup” ($\subseteq$) je relacija poretka, ali nije relacija totalnog poretka:

Jasno je da važi: (R) $X \subseteq X$, (A) $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \implies X = Y$, (T) $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \implies X \subseteq Z$, ali, npr:
 $X = \{1, 2, 3, 4\}$; $A = \{1, 2\}$ i $B = \{2, 3\}$
 $A \not\subseteq B$ i $B \not\subseteq A$

Primer 1: Dokazati da: $x \leq y \implies -x \geq -y$

$x \leq y$
(A4) $\implies \exists(-x) : x \leq y / +(-x)$
(A15) $\implies x + (-x) \leq y + (-x)$
(A4) $\implies 0 \leq y + (-x) / +(-y)$
(A4), (A15) $\implies 0 + (-y) \leq y + (-x) + (-y)$
(A1), (A2), (A3) $\implies -y \leq -x$

(A17) *Arhimedova aksioma (ARH)*: $(\forall a, b > 0)(\exists n) : n \cdot a > b$

- može da se razume kao merenje
- neće biti dovoljno $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ da izmerimo brojevu pravu
- za svako a i svako b , postoji takvo n , tako da ćemo sa a pomnoženim n puta sigurno premašiti dužinu b .

Za strukturu koja zadovoljava aksiome A1 – A17 kažemo da je *ARHIMEDOV-SKO POLJE* (ovo važi i za $\mathbf{Q}$ i za $\mathbf{R}$, tako da nije dovoljno samo ovo da bismo opisali $\mathbf{R}$).

1.1 Supremum

Supremum je pojam vezan samo za relaciju.

Neka je data struktura $(A, \leq)$, gde je $\leq$ poredak, i neka važi $B \subseteq A$.

DEFINICIJA 1. Kažemo da je $a \in A$ *majoranta* skupa B , ako je $b \leq a, \forall b \in B$.

Primer 2: Koji elementi skupa $A = \mathbf{R}$ su majorante skupa $B = [0, 2]$? Majorante su elementi skupa $[2, +\infty)$.

DEFINICIJA 2. Kažemo da je $a \in A$ *minoranta* skupa B , ako je $a \leq b, \forall b \in B$.

U prethodnom primeru, minorante su svi brojevi iz skupa $(-\infty, 0]$.

Primer 3: Za $A = \mathbf{R}$, $B = [0, 2]$ majorante su $[2, +\infty)$, a minorante $(-\infty, 0]$.

DEFINICIJA 3. Majoranta koja pripada skupu A se zove najveći element ili *maksimum*.

DEFINICIJA 4. Minoranta koja pripada skupu A se zove najmanji element ili *minimum*.

DEFINICIJA 5. *Supremum* skupa B, u oznaci $\sup B$ je najmanja majoranta.

DEFINICIJA 6. *Infimum* skupa B, u oznaci $\inf B$ je najveća minoranta.

U prethodnim primerima supremum je 2, a infimum je 0.

ZADATAK 1: Naći $\sup A$ i $\inf A$:

i) $A = (0, 1)$

ii) $A = [0, 1)$

iii) $A = [0, 1]$

iv) $A = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q}$

v) $A = \{ \frac{1}{m} | m \in \mathbf{N} \}$

U kojim slučajevima $\sup A$ i $\inf A$ jesu elementi skupa A?

i) $\sup A = 1 \notin A, \inf A = 0 \notin A$

ii) $\sup A = 1 \notin A, \inf A = 0 \in A$

iii) $\sup A = 1 \in A, \inf A = 0 \in A$

iv) $\sup A = \sqrt{2} \notin A, \inf A = 0 \in A$

v) $\sup A = 1 \in A, \inf A = 0 \notin A$

Ako je $\sup A$ element skupa A, on je tada maksimum.

Zašto je 0 baš najveća minoranta u slučaju v)?

$$\varepsilon > 0$$

$$\exists n : \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \exists n : n \cdot \varepsilon > 1 \text{ (ovo je baš ARH)}$$

(A18) *Aksioma supremuma (SUP)*: Svaki neprazan, odozgo ograničen skup u $\mathbf{R}$ ima supremum.

Aksiome realnih brojeva su A1 – A16 i (SUP).

Aksioma supremuma (SUP) ne važi u $\mathbf{Q}$:

$A = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}$, ali nema supremum u $\mathbf{Q}$ ($\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$).

ZADATAK 2: Dokazati da $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Rešenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$. Onda važi:

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, m, n su uzajamno prosti brojevi

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} /^2$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

(*) $m^2 = 2n^2 \implies m^2$ je paran $\implies m$ je paran
 $m = 2k$, i ovo ubacujemo u (*)

$$(2k)^2 = 2n^2$$

$$4k^2 = 2n^2$$

$$n^2 = 2k^2 \implies n^2 \text{ je paran} \implies n \text{ je paran}$$

Dobili smo da su brojevi m i n parni, a pretpostavili smo da su oni uzajamno prosti, dakle, dobili smo kontradikciju. To znači da je početna pretpostavka pogrešna, odn. važi da $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

□.

Primer 4: *Broj e*

Neka je dat skup $A = \{(1 + \frac{1}{n})^n | n \in \mathbf{N}\}$.

Treba dokazati:

- (1) A je ograničen odozgo.
- (2) (SUP) $\implies$ A ima $\sup$ i $e =_{def} \sup A$.

1^o Binomna formula:

$$(a+b)^n =_{def} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 +$$

$$\dots + \binom{n}{n} b^n$$

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$0! =_{def} 1$$

2^o Suma konačnog geometrijskog niza:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1$$

Dokazujemo binomnu formulu:

(1) BAZA INDUKCIJE:

$$(a+b)^1 = a+b\sqrt{\quad}$$

(2) INDUKTIVNI KORAK:

Pretpostavimo da važi iskaz za n ($I(n)\sqrt{\quad}$). Treba dokazati da važi $I(n+1)$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n \cdot (a+b)$$

$$(a+b)^{n+1} = \left(\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n \right) \cdot (a+b)$$

$$\text{Desna strana} = \left(\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n \right) \cdot$$

$$(a+b) =$$

$$\left(\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n \right) \cdot a + (-//-) \cdot b =$$

$$(a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \dots + ab^n) + \left(\binom{n}{0} a^n b + \right.$$

$$\left. \binom{n}{1} a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1} ab^n + b^{n+1} \right) =$$

$$a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0} \right] a^n b + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1} \right] a^{n-1}b^2 + \dots + \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k}b^k + \dots + b^{n+1}$$

//Kako smo dobili $a^{n+1-k}b^k$ množenjem b?

$$a^{n+1-k}b^{k-1} = a^{n-(k-1)}b^{k-1}, \text{ a njegov koeficijent je } \binom{n}{k-1} //$$

$$//\text{Šta je } \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}?$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = n! \left(\frac{1}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} \right) =$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{n+1-k+k}{k(n+1-k)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k} //$$

Dokazali smo da je desna strana jednaka:

$$a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k + \dots + b^{n+1}, \text{ a to je i trebalo dokazati.}$$

□.

Dokazujemo sumu konačnog geometrijskog niza:

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n / \cdot q, (q \neq 1)$$

$$S \cdot q = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

Oduzimanjem ove dve jednačine dobijamo:

$$S - S \cdot q = 1 - q^{n+1}$$

$$S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□.

Dokaz da je $A = \{(1 + \frac{1}{n})^n | n \in \mathbf{N}\}$ ograničen odozgo:

$$(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)! \cdot n^k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}^{n-(n-k) = k \text{ množenika}}}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}$$

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

Važi:

$$k! \geq 2^{k-1}, \forall k \geq 2$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \underbrace{\frac{1}{1}}_{k=0} + \underbrace{\frac{1}{1}}_{k=1} + \underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}}_{\substack{\leq \frac{1}{2} \\ \leq \frac{1}{2^2} \\ \leq \frac{1}{2^{n-1}} \\ \leq \frac{1}{2^{k-1}} \text{ svaki}}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - 1 =$$

$$\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = \frac{\overbrace{1 - \frac{1}{2^n}}^{\leq 1}}{\frac{1}{2}} - 1 \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 \leq 2 - 1 = 1$$

Imamo:

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq 1 + 1 + 1 = 3$$

$$e < 3 \Rightarrow e = \sup A$$

□.

TEOREMA 1.1. $(SUP) \Rightarrow (ARH)$

Dokaz: Znamo da svaki odozgo ograničen skup ima $\sup$, a hoćemo da dobijemo: $a, b > 0, \exists n : n \cdot a > b$

Pretpostavimo suprotno: za neke $a, b > 0$ uvek je $n \cdot a \leq b$.

Neka je $A = \{n \cdot a | n \in \mathbf{N}\}$. A je ograničen odozgo $\Rightarrow_{(SUP)} \exists \alpha : \alpha = \sup A$

Znamo:

$$n \cdot a \leq \alpha$$

$$\underbrace{\alpha - a}_{\text{nije majoranta A}} < \alpha$$

$$\Rightarrow \exists a : \underbrace{n_0 \cdot a}_{\in A} > \alpha - a$$

$$\underbrace{(n_0 + 1) \cdot a}_{\in A} > \alpha$$

$\Rightarrow \alpha$ nije majoranta, što dovodi do kontradikcije ($\perp$). Dakle, početna pretpostavka nije tačna, odnosno važi: $(SUP) \Rightarrow (ARH)$.

□.

Primer 5: Strogo zasnivanje n -tog korena realnog pozitivnog broja

$a > 0, a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$ - fiksiran broj

$A = \{x \in \mathbf{R}, x > 0 | x^n \leq a\}$

- skup A je ograničen odozgo

$a > 1$, onda $x \in A \implies x \leq a$

$a \leq 1$, onda $x \in A \implies x \leq 1$

$(SUP) \implies \exists \alpha = \sup A, \sqrt[n]{a} =_{def} \alpha$

Treba da se proverí $\alpha^n = a$.

- Za svaki pozitivan broj postoji α , takav da $\alpha^n = a$.

1.2 Kantorova teorema

DEFINICIJA 1. Segment u $\mathbf{R}$ je zatvoren i ograničen interval $[a, b]$.

DEFINICIJA 2. Niz umetnutih segmenata su segmenti (intervali)

$I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbf{N}$, tako da važi:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq a_n \\ b_{n+1} &\leq b_n \end{aligned} \iff I_{n+1} \subseteq I_n$$

TEOREMA 1.2. (KAN) Svaki niz umetnutih segmenata ima neprazan presek u $\mathbf{R}$. (Ako beskonačno mnogo smanjujemo interval, ne možemo doći do $\emptyset$).

Napomene:

1) (KAN) ne važi u $\mathbf{Q}$.

$I_n = [\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}] \cap \mathbf{Q}$ - presek unutrašnjih intervala je $\sqrt{2}$, koje nije u $\mathbf{Q}$.

2) Ne važi za $I_n = (a_n, b_n)$ i $I_{n+1} \subseteq I_n$, jer može da se dođe do $\emptyset$.

$I_n = (0, \frac{1}{n}) \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$

Dokaz za KAN:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 \implies A = \{a_n | n \in \mathbf{N}\}$$

Jedna majoranta skupa A je b_1 . Šta više, svaki od b_i je veći od svakog a_j ;

$a = \sup A$

Tvrdimo da $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \iff a \in I_n, \forall n \iff a_n \leq a \leq b_n, \forall n$.

$a_n \leq a$ važi zato što je a jedna majoranta

$a \leq b_n$ važi zato što je a najmanja majoranta

Ako bi važilo $a > b_n$ za neko n , dobili bismo kontradikciju jer je b_n takođe majoranta skupa A (pošto je za svako i b_i majoranta skupa A , ovo bi značilo da a nije najmanja majoranta, a to je kontradikcija jer je $a = \sup A$).

□.

Tehnikaliije:

$$a = \sup A \iff (1), (2)$$

- (1) $a \geq x, \forall x \in A \longrightarrow a$ je majoranta
(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A$, tako da: $x_0 > a - \varepsilon \longrightarrow a - \varepsilon$ više nije majoranta

Domaći zadatak:

$$A \subseteq \mathbf{R}$$

$$-A =_{def} \{-x | x \in A\}$$

Dokazati da je $\sup(-A) = -\inf(A)$, $\inf(-A) = -\sup A$ i uveriti se (nacrtati) nad primerima sa časa.

DRUGA NEDELJA

2 Limes i neprekidnost funkcije

Osnovni pojmovi:

$$\circ \text{ funkcija } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ y - x, & x < y \end{cases}$$

d – rastojanje od x do y ; $d(x, y) = |x - y|$

(1) Rešiti jednačinu $|x - 1| = 2$

Rastojanje $d(x, 1) = 2$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{---} & | & \text{---} & | & \text{---} & | & \text{---} & | & \text{---} \\ & -1 & & 1 & & & 3 & & \end{array}$$

(2) Rešiti nejednačinu $|x - 2| \leq 1$

Rastojanje $d(x, -2) = |x - 2| \leq 1$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{---} & [& \text{---} & | & \text{---} &] & \text{---} \\ & -3 & & -2 & & -1 & \end{array}$$

$$x \in [-3, -1]$$

Nejednakost trougla

$$|a + b| \leq |a| + |b| \text{ (Nejednačina 2.1.)}$$

Dokaz: (razbijamo na slučajeve)

1) $a, b \geq 0 \implies (2.1.) \ a + b \leq a + b$

2) $a, b \leq 0 \implies (2.1.) \ -a - b \leq -a - b$

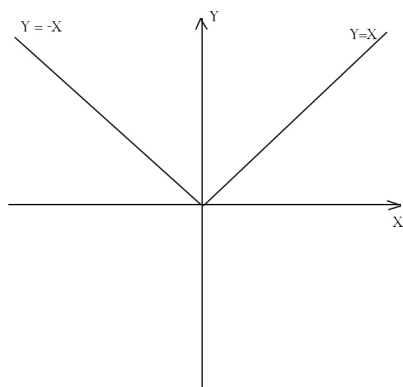
3) $a \geq 0, b \leq 0$ (ponovo razbijamo i primenjujemo 2.1.):

i) $a + b \geq 0 \implies a + b \leq a - b \iff 2b \leq 0$

ii) $a + b \leq 0 \implies -a - b \leq a - b \iff 2a \geq 0$

4) $a \leq 0, b \geq 0 \implies$ slično kao 3)

□.



Slika 2.1. Grafik funkcije $y = |x|$

DEFINICIJA 1. Ako je $x \in \mathbf{R}$, okolina tačke x je interval $(x - \delta, x + \delta)$ za neko $\delta > 0$.

DEFINICIJA 2. Šuplja okolina tačke x je $(x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}$

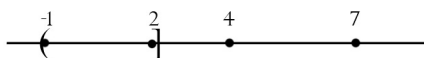
Oznake: u_x je okolina x ; $\dot{u}_x$ je šuplja okolina x

DEFINICIJA 3. Okolina tačke $+\infty$ je $(M, +\infty)$. Šuplja okolina tačke tačke $+\infty$ je takođe $(M, +\infty)$. Okolina tačke $-\infty$ je $(-\infty, -M)$. Šuplja okolina tačke $-\infty$ je takođe $(-\infty, -M)$.

DEFINICIJA 4. Neka je $A \subset \mathbf{R}$. a je tačka nagomilavanja (t.n.) skupa A ako za svaku šuplju okolinu $\dot{u}_a$ važi:

$\dot{u}_a \cap A \neq \emptyset$. Definicija važi za $a \in \bar{\mathbf{R}}$, gde je $\bar{\mathbf{R}} =_{def} \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Primer 1: Šta su tačke nagomilavanja skupa $A = (-1, 2] \cup \{4, 7\}$?



Tačke 4 i 7 su izolovane tačke i, pošto one ne pripadaju svojim šupljim okolinama, ne mogu da budu tačke nagomilavanja skupa A .

Rešenje: Tačke nagomilavanja su $[-1, 2]$.

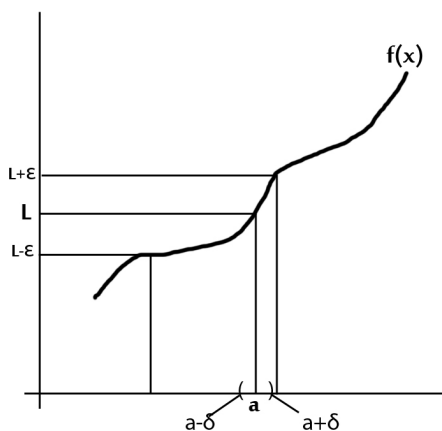
2.1 Limes funkcije

DEFINICIJA 5. Neka je $f : D_f \rightarrow \mathbf{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D_f (domen funkcije f). Kažemo da je L ($L \in \mathbf{R}$) granična vrednost ili limes funkcije f u tački a ako važi:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Graničnu vrednost L označavamo:

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$



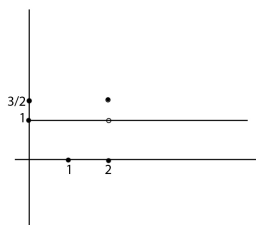
Slika 2.2. Grafički prikaz definicije limesa

- a može da bude u D_f , ali „uglavnom najinteresantniji” slučaj jeste kad $a \notin D_f$
- Ova definicija govori da kad se približava x -om tački a , funkcija $f(x)$ približava se L
- Pišemo $0 < |x - a|$, odnosno $<$ umesto $\leq$ jer:
 - (1) $|x - a| = 0 \implies x = a$, dok a možda nije u D_f , pa ne možemo pisati $f(a)$
 - (2) limes zaključujemo prema ponašanju funkcije u okolini tačke, a ne prema samoj tački

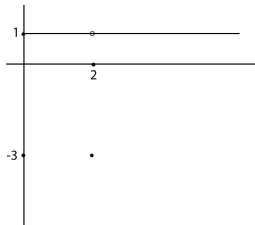
DEFINICIJA 6. Neka je $a \in D_f$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u a , ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

(Ili: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$)

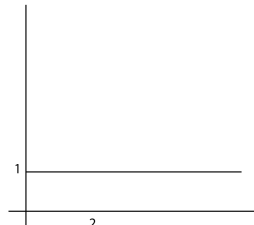
Primer 2: Šta je $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ na slikama 2.3, 2.4. i 2.5. i koje od ove tri funkcije su neprekidne?



Slika 2.3.



Slika 2.4.



Slika 2.5.

Rešenje: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ u svim slučajevima, ali je $f(x)$ neprekidna samo u slučaju (2.5.).

Formalno izračunavanje (iz definicije) za slučaj 2.3:

$$\forall \varepsilon \exists \delta : 0 < |x - 2| < \delta \implies \underbrace{|f(x) - 1|}_{0 \text{ za } x \neq 2} < \varepsilon \text{ (Nejednačina 2.2.)}$$

ako za ε uzmemo, npr: $\delta = \frac{1}{2}$ i važi (2.2.)

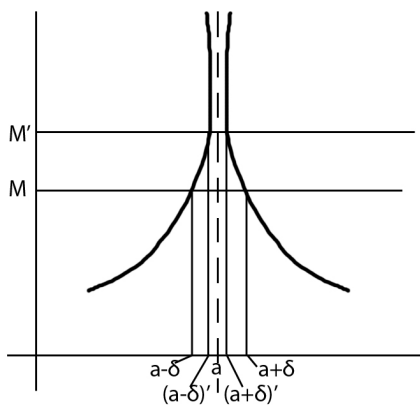
Napomena:

- Limes je ono što očekujemo kako bi se funkcija ponašala kada bi bila neprekidna u a .

DEFINICIJA 7. Neka je a t.n. domena D_f . Tada:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ ako } \forall M, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta (x \in D_f) \implies f(x) > M$$

$\iff$ „Za svako M , nađemo malo δ , tako da $f(x)$ premašuje M ”



Slika 2.6. Grafički prikaz definicije limesa

Slično se definiše limes u slučaju $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ ako } \forall M, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta (x \in D_f) \implies f(x) < -M$$

2.2 Univerzalna definicija

$\lim_{x \rightarrow a} = L$ na jeziku okolina je:

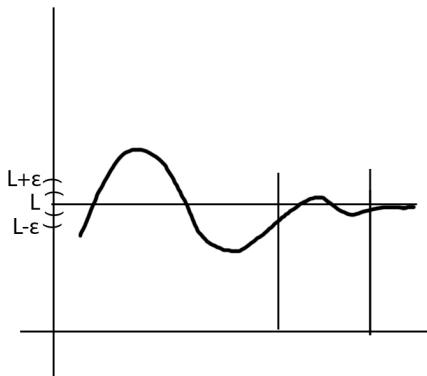
$$\forall u_L, \exists \dot{u}_a : x \in \dot{u}_a \cap D_f \implies f(x) \in u_L$$

(1) Za konačno a i L , ova definicija izgleda upravo ovako

$$\begin{aligned} (2) \text{ Za } L = +\infty \\ u_L = (M, +\infty), x \in \dot{u}_a \iff 0 < |x - a| < \delta, \quad f(x) \in u_L \iff \\ f(x) \in (M, +\infty) \iff \\ f(x) > M \end{aligned}$$

(3) Za $a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff_{def} \forall \varepsilon, \exists M : x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$



Slika 2.7.

Slično ide za $L = -\infty$, odnosno, $a = -\infty$

(4) Za $a = +\infty$ i $L = +\infty$

$$\forall M, \exists N : x > N \implies f(x) > M$$

(5) Za $a = -\infty$ i $L = -\infty$

$$\forall M, \exists N : x < -N \implies f(x) < -M$$

(6) Za $a = +\infty$ i $L = -\infty$

$$\forall M, \exists N : x > N \implies f(x) < -M$$

(7) Za $a = -\infty$ i $L = +\infty$

$$\forall M, \exists N : x < -N \implies f(x) > M$$

2.3 Stavovi limesa

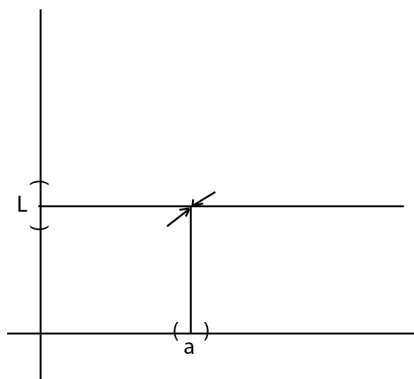
STAV 1: Neka je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, ($a \in \bar{\mathbf{R}}$, $L \in \mathbf{R}$). Tada važi:

$\exists \dot{u}_a$, t.d. $f(x)$ je ograničena na $\dot{u}_a$

Funkcija f je **ograničena odozgo** / **odozdo** na skupu A ako $\exists M$, t.d. $f(x) \leq M$, $\forall x \in A$ / $f(x) \geq M$, $\forall x \in A$.

Funkcija f je **ograničena** ako je istovremeno ograničena odozgo i odozdo.

Dokaz:



Slika 2.8.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \dot{u}_a : x \in \dot{u}_a \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

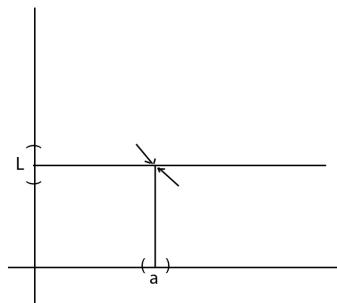
$$|f(x) - L| < \varepsilon \iff \underbrace{L - \varepsilon}_{\text{donje ograničenje}} < f(x) < \underbrace{L + \varepsilon}_{\text{gornje ograničenje}}$$

□.

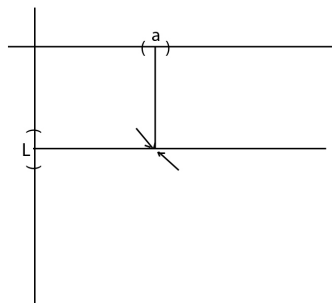
STAV 2: Neka je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, ($L \in \mathbf{R}$, $L \neq 0$). Tada važi:

$\exists \dot{u}_a$, t.d. $\text{sgn} f(x) = \text{sgn} L$, $\forall x \in \dot{u}_a$

Štaviše: ako je $L > 0$: $\exists \dot{u}_a$, t.d. $f(x) > \frac{L}{2}$, $\forall x \in \dot{u}_a$ (slika 2.9.)
 $L < 0$: $\exists \dot{u}_a$, t.d. $f(x) < \frac{L}{2}$, $\forall x \in \dot{u}_a$ (slika 2.10.)



Slika 2.8.



Slika 2.9.

Dokaz (za $L > 0$):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff_{def} \forall \varepsilon > 0, \exists \dot{u}_a \implies f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

$$\text{Neka je } \varepsilon = \frac{L}{2} : \exists \dot{u}_a \implies \underbrace{L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2}}_{\frac{L}{2} < f(x)}.$$

□.

STAV 3: Neka je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, ($L_1, L_2 \in \mathbf{R}$). Tada važi:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$(3) \text{ Ako je } L_2 \neq 0 \implies^{S2} g(x) \neq 0, x \in \dot{u}_a \implies \text{ima smisla napisati } \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

$$(4) f(x) \leq g(x), x \in \dot{u}_a \implies L_1 \leq L_2$$

Dokaz:

$$(1) \text{ Hoćemo da dobijemo: } |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon, x \in \dot{u}_a \\ |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \text{ (na osnovu N 2.1.)}$$

$$\exists \dot{u}_a, x \in \dot{u}_a : |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists \dot{v}_a, x \in \dot{v}_a : |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\dot{u}_a \cap \dot{v}_a = \dot{z}_a$$

$$x \in \dot{z}_a \implies \begin{cases} |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \implies |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□.

$$(2) |f(x)g(x) - L_1L_2| = |f(x)g(x) - L_1g(x) + L_1g(x) - L_1L_2| \overset{N 2.1.}{\leq} \underbrace{|f(x)g(x) - L_1g(x)|}_{|g(x)| \cdot |f(x) - L_1|} + \underbrace{|L_1g(x) - L_1L_2|}_{|L_1| \cdot |g(x) - L_2|} \\ \leq |f(x) - L_1| \cdot M \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot |L_1|} \text{ (jer je } g(x) \text{ ogr.)}$$

$$\leq M \cdot |f(x) - L_1| + |L_1| \cdot |g(x) - L_2|$$

$$\circ \text{ Neka je } \frac{\varepsilon}{2 \cdot |L_1|} \text{ novo } \varepsilon \text{ (}\hat{\varepsilon}\text{) za koje biramo } \dot{u}_a, \text{ t.d. } x \in \dot{u}_a \implies |g(x) - L_2| < \frac{\hat{\varepsilon}}{2}$$

$$\circ \text{ Isto je i za levi sabirak, pa je zbir } < \frac{\hat{\varepsilon}}{2} + \frac{\hat{\varepsilon}}{2} = \hat{\varepsilon}$$

□.

(3) Dovoljno je da dokažemo da važi:

$$L_2 \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2} \text{ (Implikacija 2.3.)}$$

$$\text{zato što važi: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \overset{I 2.3.}{=} \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \\ \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Dokaz za [I 2.3.]:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$$

Treba da pokažemo: $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \left| \frac{L_2 - g(x)}{g(x) \cdot L_2} \right| = \frac{\overbrace{|g(x) - L_2|}^{\text{znamo da je malo}}}{g(x) \cdot L_2}$

Prema (S2), $L_2 \neq 0$, $\exists \dot{u}_a : |g(x)| \geq \frac{|L_2|}{2}$, tj. $\frac{1}{|g(x)|} \leq \frac{2}{|L_2|}$
 $\frac{|g(x) - L_2|}{|g(x)| \cdot |L_2|} \leq \frac{|g(x) - L_2| \cdot 2}{|L_2|^2} = M \cdot |g(x) - L_2|$, gde je M neki konkretan broj.

□.

(4) Pretpostavimo suprotno. tj. da $L_1 > L_2$, tj. $L_1 - L_2 > 0$, tj:
 $\lim_{a \rightarrow a} (f(x) - g(x)) > 0 \implies \exists \dot{u}_a$ na kojoj je funkcija strogo pozitivna (S2):
 $f(x) - g(x) > 0, \forall x \in \dot{u}_a$
 $f(x) > g(x) \perp$

□.

2.3.1 Stav o neprekidnosti funkcije

STAV 4:

- (1) f je neprekidna u $a \implies f$ je ograničena na u_a za neko u_a
- (2) $\left. \begin{array}{l} f \text{ je neprekidna u } a \\ f(a) \neq 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \exists u_a, \text{ t.d. } f(x) \neq 0 \text{ na } u_a \\ \text{tj. } \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(a) \text{ na } u_a \end{array} \right.$
- (3) f, g su neprekidne u $a \implies \left\{ \begin{array}{l} f + g, f \cdot g \text{ su neprekidne u } a \\ (g(a) \neq 0) \frac{f}{g} \text{ je neprekidna u } a \end{array} \right.$

Dokaz:

- (1) sledi iz (S1) za $L = f(a)$
- (2) sledi iz (S2) za $L = f(a)$
- (3) sledi iz (S3) za $L_1 = f(a), L_2 = g(a)$

□.

Važni primeri

- (1) $f(x) = c$, gde je c neka konstanta, neprekidna je na $\mathbf{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c = f(a)$$

- (2) $f(x) = x$ neprekidna je na $\mathbf{R}$
 $|f(x) - f(a)|$ treba da bude $< \varepsilon$ ako je $|x - a| < \delta$ (po definiciji)
 $|x - a| < \varepsilon$

- (3) Svaki polinom $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ neprekidan je jer je:
 $\forall k : x^k \text{ neprekidno}$

Dokaz:

x je neprekidno $\implies x^2(x \cdot x)$ je neprekidno $\implies \dots \implies x^k$ je neprekidno i još
 $a_k - \text{const}$ je neprekidno
 $\implies a_k x^k$ je neprekidno
 $\implies \sum_{k=0}^n a_k x^k$ je neprekidno

□.

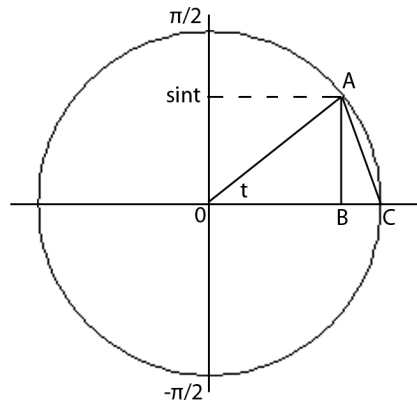
(4) Svaka racionalna funkcija $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$, gde su $P_n(x)$, $Q_m(x)$ polinomi, neprekidna je
 $\mathbf{R}$ je neprekidna na svom domenu: $D_R = \{Q_m \neq 0\}$
 Tamo gde nije definisana, tu ni ne govorimo o neprekidnosti.

(5) Funkcije $\sin x$, $\cos x$ su neprekidne na $\mathbf{R}$

Dokaz za $f(x) = \sin x$:

Prvo treba dokazati lemu: $|\sin t| \leq |t|$ (Lema 2.4.)

Dokaz:



Slika 2.11.

$P_{\Delta OAC} \leq P_{\triangle OAC}$, gde je $P_{\triangle OAC}$ kružni isečak

$$\begin{aligned}
 (1) \quad P_{\triangle, \alpha} &= \frac{\alpha}{2} \quad (\alpha \text{ je u rad}) \implies P_{\triangle, t} = \frac{t}{2} \\
 P_{\Delta OAC} &= \frac{|OC| \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot \sin t}{2} = \frac{\sin t}{2} \\
 \Downarrow \\
 \frac{\sin t}{2} &\leq \frac{t}{2} \\
 \frac{\sin t}{t} &\leq 1, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\
 (2) \quad \left| \frac{\sin t}{t} \right| &= \left| \frac{\sin(-t)}{-t} \right| \leq 1, \quad -t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\
 \implies |\sin t| &\leq |t|
 \end{aligned}$$

□.

Zašto je $\sin x$ neprekidna funkcija?

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(a)| &= |\sin x - \sin a| = \left| 2 \cdot \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right| = 2 \cdot \underbrace{\left| \sin \frac{x-a}{2} \right|}_{2.4.} \cdot \underbrace{\left| \cos \frac{x+a}{2} \right|}_{\leq 1} \leq \\
 2 \cdot \left| \frac{x-a}{2} \right| \cdot 1 &\leq x - a
 \end{aligned}$$

□.

Slično se dokazuje za $\cos x$, primenom $\cos x - \cos a = -2 \cdot \sin \frac{x-a}{2} \cdot \sin \frac{x+a}{2}$

2.4 Jednostrani limesi

DEFINICIJA 8. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ / $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$, ($a \in \mathbf{R}$)

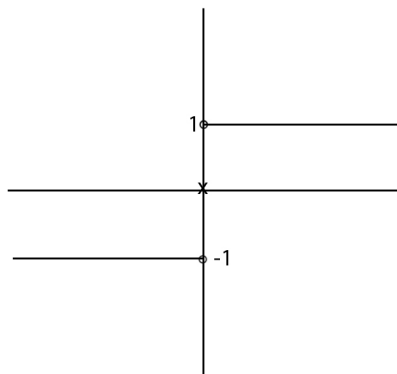
$L \in \mathbf{R}$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $0 < |x - a| < \delta$, $x > a$ / $x < a \implies |f(x) - L| < \varepsilon$
ili

$L \in \mathbf{R}$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $0 < x - a < \delta$, / $0 < a - x < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

Očigledno važi:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \end{matrix}$$

Primer 1: $f(x) = \operatorname{sgn} x$



Slika 2.12. Grafik funkcije $f(x) = \operatorname{sgn} x$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$

iii) Da li je f neprekidna u 0? Ne, jer da bi bila, mora da postoji $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ i da bude jednaka vrednosti funkcije.

Primer 2: $f(x) = [x]$

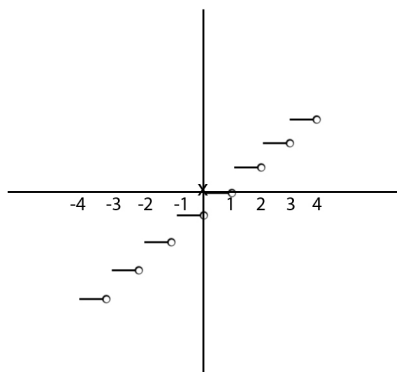
$[x] = m \in \mathbf{Z}$, ako je $m \leq x < m + 1$

Pitanja: Šta je $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$?

Šta je $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x)$, $n \in \mathbf{Z}$?

U kojim tačkama je ova funkcija neprekidna, a u kojima nije?

Rešenje:



Slika 2.13. Grafik funkcije $f(x) = [x]$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n, \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1$$

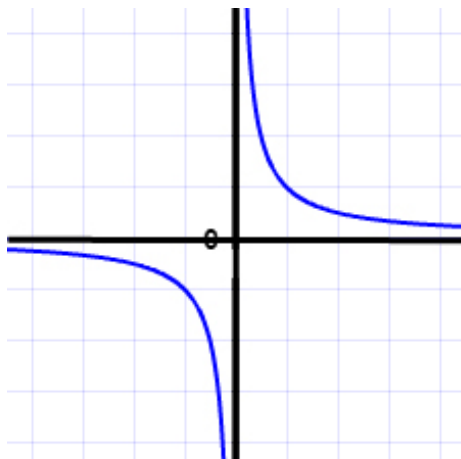
Funkcija nije neprekidna u celim brojevima.

DEFINICIJA 9. $\lim_{x \rightarrow a^+ / a^-} f(x) = +\infty / -\infty$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta / 0 < a - x < \delta (za a^-) \implies f(x) > M$$

Primer 3: Šta je $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$? Šta je $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$?

Rešenje:



Slika 2.14. Grafik funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

TREĆA NEDELJA

STAV 5: Za $x_0 \in \bar{\mathbf{R}}, L \in \mathbf{R}$

- $$\begin{aligned} (1) \quad & \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \pm\infty \\ (2) \quad & \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (\operatorname{sgn}(L))\infty \\ (3) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \\ (4) \quad & \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \\ |g(x)| \leq M, \forall x \in \dot{U}_{x_0} \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0 \end{aligned}$$

Domaći zadatak: Dokazati prethodna tvrđenja

Pišemo:

- $$\begin{aligned} (1) \quad & \infty + L = \infty \\ (2) \quad & \infty \cdot L = \infty, \quad L \neq 0 \\ (3) \quad & \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

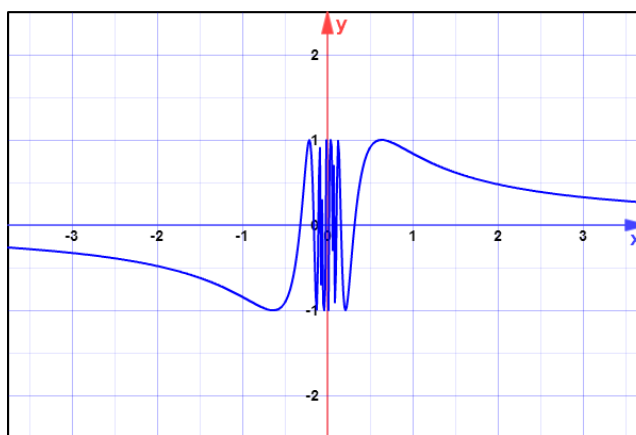
Primer 1: (1) Šta je $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$? (2) Šta je $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$?

Rešenje:

- (1) Znamo da $x \rightarrow 0$ kada $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$ nije definisan u 0, pa je na osnovu (S4) i $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

Zašto $\sin \frac{1}{x}$ nema limes u 0?

Posmatrajmo grafik funkcije $\sin \frac{1}{x}$:



Slika 2.15. Grafik funkcije $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Kada bi postojao limes, mogli bismo da posmatramo interval $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. Ovde postoje tačke $x = \frac{1}{2n\pi}$, za dovoljno veliko n . Za njih važi:

$$\sin \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = \sin(2n\pi) = 0$$

Neka je sada $x = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Važi da je:

$\sin \frac{1}{x} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(2n\pi) + \sin \frac{\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Limes onda nije ni 0, ni 1, a zapravo nije ništa iz intervala $[-1, 1]$.

$$(2) \left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{\sin x}{x} = \sin x \cdot \frac{1}{x} \\ \sin x \text{ je ograničena kada } x \rightarrow 0 \\ \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ kada } x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Napomena:

Ne postoji $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$, odnosno, ne gomila se oko nijedne tačke, slično kao i kod $\sin \frac{1}{x}$.

2.5 Neodređeni oblici

(1) $\infty - \infty$, (2) $\frac{\infty}{\infty}$, (3) $\frac{0}{0}$, (4) $0 \cdot \infty$, (5) 1^∞ , (6) 0^0 , (7) ∞^0

Primer 2:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x) = x, \quad g(x) = x + 1 \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x - 1) = -1 \end{aligned}$$

Domaći zadatak: U (2), (3), (4), (5), (6), (7) navesti primere funkcija tako da se dobije:

- a) konačan limes
- b) beskonačan limes

Šta je $f(x)^{g(x)}$?

Koristimo činjenicu da je $A^B = e^{\ln(A^B)} = e^{B \cdot \ln A}$
 $\Rightarrow f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ (Jednačina 2.5.)

Ovo ćemo koristiti da pokažemo da su 1^∞ i 0^0 neodređeni oblici:

Neka je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\infty \cdot 0}$, a oblik $\infty \cdot 0$ je neodređen, pa je i 1^∞ neodređen.

Neka je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{0 \cdot (-\infty)}$, a oblik $0 \cdot (-\infty)$ je neodređen, pa je i 0^0 neodređen.

Primer 3: Ako je $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = \pm\infty$ ($\pm$ jer zavisi od $\text{sgn}(a_n)$).

Ovo važi jer ako zapišemo polinom $P_n(x)$ drugačije: $P_n(x) = x^n \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right)$,

svaki od razlomaka teži 0 kada $x \rightarrow +\infty$, odnosno, $\lim_{x \rightarrow x_0} P_n(x) = +\infty \cdot a_n = (sgn(a_n))\infty$

$$\text{Primer 4: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \pm\infty, & n > m \\ 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_n}, & n = m \end{cases}$$

$$\underline{n > m:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{Q_n}{P_n}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\underline{n < m:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{P_n(x)}{x^n}}{\frac{Q_n(x)}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}{b_m x^{m-n} + b_{m-1} x^{m-n-1} + \dots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_n}{\infty} = 0$$

$$\underline{m = n:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{P_n(x)}{x^n}}{\frac{Q_n(x)}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_n}{b_n}$$

$$\text{Primer 5: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^6 + 2x + 1}{-7x^6 + 4x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 \cdot (3 + \frac{2}{x^5} + \frac{1}{x^6})}{x^6 \cdot (-7 + \frac{4}{x^4} + \frac{10}{x^6})} = -\frac{3}{7}$$

$$\text{Primer 6: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 13}{\sqrt[3]{x^6 + x^2} - \sqrt{x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{13}{x^2}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^4} - x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x}}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{Primer 7: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 - 3x^2 + 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}}{2x^6 + 4x^5 - 3\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{20}{3}} - 3x^{\frac{5}{3}} + 2}{2x^{\frac{17}{3}} + 4x^{\frac{14}{3}} - 3} = -\frac{2}{3}$$

$$0 < a < 1 \implies a^\alpha < a^\beta, \quad \alpha > \beta$$

Napomena:

Ukoliko imamo količnik polinoma oblika $ax^{\alpha_1} + bx^{\alpha_2} + \dots$ ($\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$), onda:
 ako $x \rightarrow \infty$, gledamo (i delimo) najveći stepen uz x ,
 ako $x \rightarrow 0$, gledamo (i delimo) najmanji stepen uz x .

Napomena:

U Primeru 6 uradili smo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^4}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x^4})} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}} = \sqrt[3]{1} = 1$ (akcenat je na prvoj jednakosti)
 Ovo možemo da uradimo za sve funkcije koje su neprekidne i to nam obezbeđuje sledeća teorema:

TEOREMA 2.1. Neka je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ i funkcija φ je neprekidna u tački L .
 Onda je:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = \varphi(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

Rečima: „Neprekidna funkcija i Limes komutiraju.”

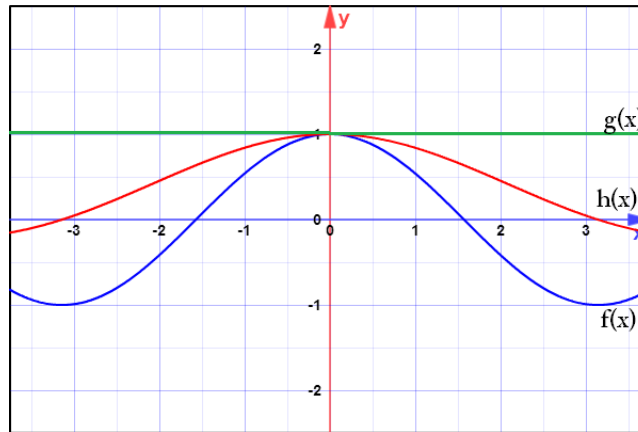
Dokazali smo da su polimoni, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, racionalne funkcije neprekidne na svom domenu, kao i sve njihove kompozicije, zbrovi, razlike, proizvodi i kolicnici neprekidni.

Dokazaćemo da su e^x , a^x , $\ln x$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\text{arccot} x$, x^α ($\alpha \in \mathbf{R}$) i sve njihove kompozicije, zbrovi, razlike, proizvodi i kolicnici neprekidni, kao i sve njihove inverzne funkcije.

Sve prethodno navedene funkcije nazivaju se *ELEMENTARNE FUNKCIJE*.

TEOREMA 2.2. Teorema o tri limesa („Teorema o dva policajca”, „Teorema o sendviču”):

Ako je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$, ($x_0, L \in \mathbf{R}$) i ako je $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \dot{U}_{x_0}$, onda postoji $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$. Važi i za jednostrane limese.



Slika 2.16. Primer funkcija za koje važi Teorema 2.2. ($x_0 = 0$, $L = 1$)

Dokaz:

Neka je L konačno i x_0 konačno. Pošto je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, neka je zadato $\varepsilon > 0$.

Sledi: $\exists \delta_1$ t.d. $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\}$ ($\iff 0 < |x - x_0| < \delta_1$). Tada je $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ ($\iff |f(x) - L| < \varepsilon$). Isto važi i za $g(x)$, s time da δ_2 može biti različito od δ_1 , odnosno: $\exists \delta_2$ t.d. $x_0 - \delta_2 < x < x_0 + \delta_2$, $x \neq x_0$ ($\iff 0 < |x - x_0| < \delta_2$). Tada sledi: $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$

Uzmimo da je δ manji od δ_1 i δ_2 . Onda važi:

$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon$, a znamo da je $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, pa sledi:

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

$\Updownarrow$

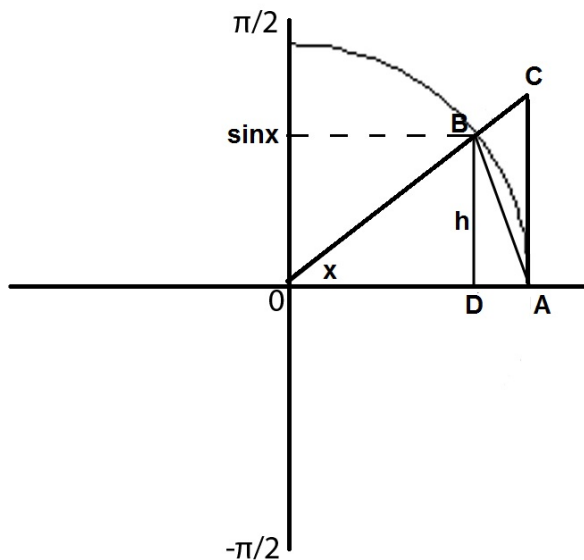
$$h(x) \rightarrow L \text{ kada } x \rightarrow x_0$$

□.

2.6 Osnovni limesi (i njihove posledice)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dokaz:



Slika 2.17.

Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$P_{\triangle OAB} = \frac{|OA| \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$$

$$P_{\triangle OAB} = \frac{x}{2} \cdot |OA|^2 = \frac{x}{2} \quad (x \text{ je u rad})$$

$$\frac{|AC|}{|OA|} = \frac{|BD|}{|OD|} \iff |AC| = \frac{|BD|}{|OD|} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$P_{\triangle OAC} = \frac{|OA| \cdot |AC|}{2} = \frac{|AC|}{2} = \frac{\sin x}{2 \cdot \cos x}$$

$$P_{\triangle OAB} \leq P_{\triangle OAC} \leq P_{\triangle OAC}$$

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{2 \cdot \cos x}$$

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\left(\frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad i \quad \frac{\sin x}{x} \geq \cos x \right)$$

$\Downarrow$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

važi za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Ako je $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, možemo da uzmemo $t = -x$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

Znamo za t da važi:

$$\cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1$$

$$\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq 1$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$(\text{Teorema 2.2.}) \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

□.

Posledica 2.3:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + 2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \\ \left| \begin{array}{l} \text{smena : } t = \frac{x}{2} \\ x \rightarrow 0 \iff t \rightarrow 0 \end{array} \right| &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad e =_{\text{def}} \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Posledica 2.4:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \left| \begin{array}{l} \text{smena : } t = -x \\ x \rightarrow -\infty \iff t \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1}}_{\substack{\text{smena : } y = t-1 \\ t \rightarrow +\infty \iff y \rightarrow +\infty}} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)}_{\rightarrow 1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = e \cdot 1 = e$$

Posledica 2.5:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

Dobijamo iz Posledice 2.4. smenom $x = \frac{1}{t}$

Posledica 2.6:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\ln(\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}) = \ln e = 1$$

$\Updownarrow$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

Posledica 2.7:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \left| \begin{array}{l} \text{smena : } x = \ln(1+t) \\ t \rightarrow 0 \iff x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Posledica 2.8:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \ln a = \left| \begin{array}{l} \text{smena : } t = x \ln a \\ x \rightarrow 0 \iff t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \ln a = \ln a$$

Posledica 2.9:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \left| \begin{array}{l} \text{smena : } t = \alpha \ln(1+x) \\ x \rightarrow 0 \iff t \rightarrow 0 \end{array} \right| =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \alpha = \alpha$$

TEOREMA 2.3. Teorema o smeni promenljive u limesu:

(1) Ako $\varphi : (a, b) \rightarrow_{1-1}^n (c, d)$ (φ je neprekidna bijekcija) i $\varphi(t_0) = x_0$
 $t_0 \in (a, b)$
 $x_0 \in (c, d)$
 Onda je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t))$

Ovo svojstvo smo koristili u smenama, na primer:

$$x = \ln(1+t), \quad x = -t, \quad x = e^t - 1, \quad \dots$$

(2) Ako $\varphi : (a, b) \rightarrow_{1-1}^n (c, d)$ je neprekidna bijekcija, gde su $a, b, c, d \in \bar{\mathbf{R}}$
 i još je $\lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t) = c$, onda je $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow a^+} f(\varphi(t))$

Ovo svojstvo smo koristili u smeni, na primer:

$$x = \frac{1}{t}, \quad x \rightarrow 0^+ \iff t \rightarrow +\infty$$

Može i: Ako $\lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t) = d$, onda $\lim_{x \rightarrow d^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow a^+} f(\varphi(t))$

2.7 Limes monotone funkcije

DEFINICIJA 10. Funkcija f je monotono rastuća ako $x < y \implies f(x) \leq f(y)$

DEFINICIJA 11. Funkcija f je strogo monotono rastuća ako $x < y \implies f(x) < f(y)$

DEFINICIJA 12. Funkcija f je monotono opadajuća ako $x < y \implies f(x) \geq f(y)$

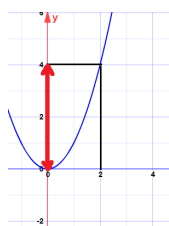
DEFINICIJA 13. Funkcija f je strogo monotono opadajuća ako $x < y \implies f(x) > f(y)$

DEFINICIJA 14. Supremum funkcije f na skupu A je supremum skupa $\{f(x) \mid x \in A\}$ u oznaci $\sup_A f$

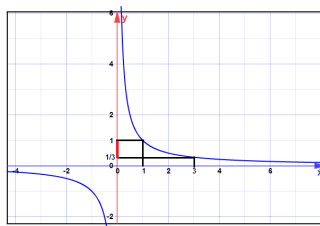
Primer 5: Naći $\sup_A f$ ako je:

1. $f(x) = x^2$, $A = (0, 2)$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = (1, 3)$
3. $f(x) = x^2$, $A = [-4, 2)$

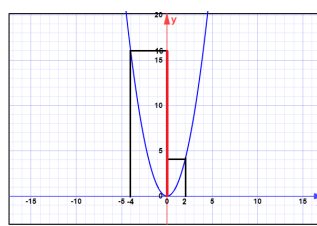
Rešenje:



Slika 2.18.



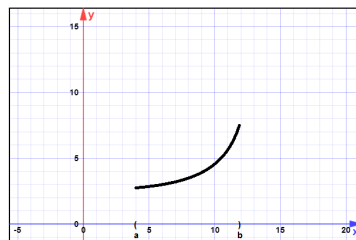
Slika 2.19.



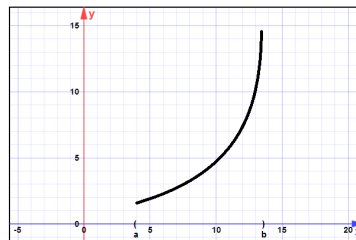
Slika 2.20.

1. $f((0, 2)) = (0, 4)$, $\sup_A f = 4$ (Slika 2.18.)
2. $f((1, 3)) = (\frac{1}{3}, 1)$, $\sup_A f = 1$ (Slika 2.19.)
3. $f([-4, 2)) = [0, 4) \cup (4, 16]$, $\sup_A f = 16$ (Slika 2.20.)

DEFINICIJA 15. Ako je $\sup_A f = f(x_0)$, $f(x_0) \in f(A)$ za $x_0 \in A$, onda se $\sup_A f$ zove *maksimum* u oznaci $\max_A f$.



Slika 2.21. Funkcija f raste i ograničena je



Slika 2.22. Funkcija f raste i neograničena je

TEOREMA 2.4. Neka $f \nearrow (a, b)$ (čitamo: „Funkcija f monotono raste na intervalu (a, b) ”). Tada:

- (1) Funkcija f je ograničena odozgo $\implies \exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$
- (2) Funkcija f nije ograničena odozgo $\implies \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$

Domaći zadatak: Ispitati situacije:

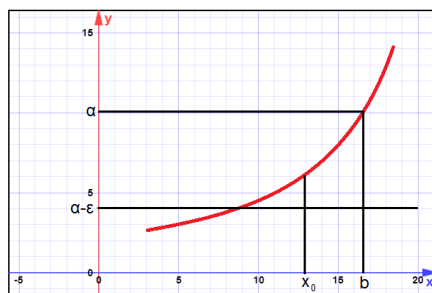
- (1) $f \nearrow \lim_{x \rightarrow a^+}$
- (2) $f \searrow \lim_{x \rightarrow a^+}$
- (3) $f \searrow \lim_{x \rightarrow b^-}$

Dokaz za Teoremu 2.4. (1):

Ako je f ograničena odozgo, sledi: $f(a, b)$ je ograničen odozgo, pa na osnovu (SUP) sledi: $\exists \alpha = \sup f(a, b)$. Treba da pokažemo: $\alpha = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

Hoćemo da nađemo δ t.d. $x \in (b - \delta, b) \implies L - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$, pri čemu je desna nejednakost tačna jer je $\alpha \geq f(x)$.

Uzmemo dovoljno $\varepsilon > 0$: $\alpha - \varepsilon < \alpha$, pa $\alpha - \varepsilon$ više nije majoranta $\implies \exists x_0$, $f(x_0) > \alpha - \varepsilon$



Slika 2.23.

$$f \nearrow \implies \forall x \in (x_0, b)$$

$$f(x) \geq f(x_0) > \alpha - \varepsilon$$

gde je $f(x_0) \rightarrow b - \delta$, što je i trebalo dokazati

□.

Zadatak: Naći limese:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sin(x-1)}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(7x)}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{tg^2(3x)}$ (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{2x-3} \right)^{x-3}$ (7) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

Rešenje:

(1) I način: Koristeći svojstvo racionalisanja $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$

II način: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x \rightarrow 1 \frac{\sqrt{1+(x-1)}-1}{\sqrt[3]{1+(x-1)}-1} = \left| \begin{array}{l} \text{smena: } t = x - 1 \\ x \rightarrow 1 \iff t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1} =$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}-1}{t}}{\frac{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1}{t}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sin(x-1)} = \left| \begin{array}{l} \text{smena: } t = x - 1 \\ x \rightarrow 1 \iff t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)^{\frac{1}{3}}-1}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)^{\frac{1}{3}}-1}{\frac{t}{\sin t}} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(7x)}{7x}} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

Uopštenjem prethodnog primera dobijamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(1-2\sin^2 \frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{-2\sin^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\ln(1-2\sin^2 \frac{x}{2})}{-2\sin^2 \frac{x}{2}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-2\sin^2 \frac{x}{2}}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2\sin^2 \frac{x}{2})}{-2\sin^2 \frac{x}{2}}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$$

Ostali zadaci se rade po sličnom principu (koriste se određene transformacije svodeći na neki od osnovnih limesa).

ČETVRTA NEDELJA

3 Asimptotske relacije o i $\sim$

3.1 Relacija o

Posmatramo funkcije f i g koje su definisane $\dot{u}_a$, gde je $\dot{u}_a$ interval $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ ako je a konačno, $(M, +\infty)$ ako je $a = +\infty$ ili $(-\infty, -M)$ ako je $a = -\infty$ i želimo da uporedimo koja brže teži nekoj vrednosti (najčešće 0 ili ∞).

DEFINICIJA 1. $f = o(g)$ ili $(f \ll g)$, $x \rightarrow a$ (ovo je važno pisati, jer bez ovoga, oznaka o ne bi imala smisla) nazivamo „ f je zanemarljivo mala (beskonačno mala) u odnosu na g “, „ f je malo o od g “ ako postoji funkcija $\varepsilon(x)$ definisana na $\dot{u}_a$ t.d.

$$f(x) = \varepsilon(x) \cdot g(x) \text{ i } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Napomena:

- Ako je $g(x) \neq 0$ na $\dot{u}_a$:

$$f = o(g), x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Primer 1:

- i) $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$ jer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$
- ii) $x^3 = o(x)$, $x \rightarrow 0$
 $x^3 = o(x^2)$, $x \rightarrow 0$
 $x^2 = o(\sqrt{x})$, $x \rightarrow 0$ jer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{5}{2}} = 0$

Uopštenjem prethodnog primera dobijamo:

$$x^\alpha = o(x^\beta), x \rightarrow 0 \text{ kad } \alpha > \beta \text{ jer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-\beta} = 0, (\alpha - \beta > 0)$$

Primer 2:

- i) $x = o(x^2)$, $x \rightarrow \infty$ jer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

Opštije:

$$x^\alpha = o(x^\beta), x \rightarrow \infty \text{ kad } \alpha < \beta \text{ jer } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha-\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} = \frac{1}{\infty} = 0, (\beta - \alpha > 0)$$

- ii) $\sin x = o(x)$, $x \rightarrow \infty$ jer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\sin x}_{ogr.} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} = 0$

OSOBINE RELACIJE $\mathbf{o}$

$$(1) \mathbf{o}(g) + \mathbf{o}(g) = \mathbf{o}(g), x \rightarrow a$$

„Ako saberemo neku funkciju f_1 i drugu funkciju f_2 , gde su obe funkcije zanemarljivo male u odnosu na funkciju g , dobijamo funkciju koja je zanemarljivo mala u odnosu na funkciju g ”.

$$(2) f \cdot \mathbf{o}(g) = \mathbf{o}(f \cdot g), x \rightarrow a$$

„Ako pomnožimo funkciju potčinjenu u odnosu na funkciju g funkcijom f , dobijamo funkciju potčinjenu $f \cdot g$ ”.

$$(3) \mathbf{o}(f) \cdot \mathbf{o}(g) = \mathbf{o}(f \cdot g)$$

$$(4) \text{ Ako je } c - \text{const}, c \neq 0 \\ c \cdot \mathbf{o}(f) = \mathbf{o}(c \cdot f) = \mathbf{o}(f)$$

Dokaz:

$$(1) \varphi_1 = \mathbf{o}(g), x \rightarrow a$$

$$\varphi_2 = \mathbf{o}(g), x \rightarrow a$$

Treba dokazati: $\varphi_1 + \varphi_2 = \mathbf{o}(g), x \rightarrow a$

$$\varphi_1(x) = \varepsilon_1(x) \cdot g(x), \text{ gde je } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0 \quad (3.1)$$

$$\varphi_2(x) = \varepsilon_2(x) \cdot g(x), \text{ gde je } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(x) = 0 \quad \text{pretpostavka} \quad (3.2.)$$

Hoćemo da dokažemo: $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \mathbf{o}(g)$.

Sabiranjem (3.1.) i (3.2.) dobijamo:

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \varepsilon_1(x)g(x) + \varepsilon_2(x)g(x) = \underbrace{[\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)]}_{=\varepsilon(x)}g(x) = \varepsilon(x)g(x),$$

$$\text{pri čemu je } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) = 0 + 0 = 0.$$

Ova osobina oznake $\mathbf{o}$ je posledica svojstva $0 + 0 = 0$.

□.

(2) Znamo:

$$\varphi(x) = \mathbf{o}(g), x \rightarrow a \text{ i } \varphi(x) = \varepsilon(x)g(x), \text{ pri čemu je } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Hoćemo:

$$f \cdot \varphi = \mathbf{o}(f \cdot g)$$

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot \varepsilon(x) \cdot g(x) = \varepsilon(x) \cdot (f(x) \cdot g(x))$$

□.

$$(3) \begin{matrix} \varphi_1 = \mathbf{o}(f), x \rightarrow a \\ \varphi_2 = \mathbf{o}(g), x \rightarrow a \end{matrix} \stackrel{?}{\LongRightarrow} \varphi_1 \cdot \varphi_2 = \mathbf{o}(f \cdot g)$$

$$\varphi_1(x) = \varepsilon_1(x) \cdot f(x), \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\varphi_2(x) = \varepsilon_2(x) \cdot g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) &= \varepsilon_1(x) \cdot f(x) \cdot \varepsilon_2(x) \cdot g(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) \cdot \varepsilon_2(x))}_{=\varepsilon(x)} \cdot (f(x) \cdot g(x)) = \\ &= \varepsilon(x) \cdot (f(x) \cdot g(x)) \end{aligned}$$

$$\text{pri čemu je } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\varepsilon_1(x) \cdot \varepsilon_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(x) = 0 \cdot 0 = 0$$

Ova osobina oznake $\mathcal{O}$ je posledica svojstva $0 \cdot 0 = 0$

□.

$$(4) \quad \begin{array}{c} c - \text{const} \\ c \neq 0 \\ \varphi = \mathcal{O}(f), \quad x \rightarrow a \end{array} \quad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{l} i) \quad c \cdot \varphi = \mathcal{O}(c \cdot f) \\ ii) \quad \mathcal{O}(c \cdot f) = \mathcal{O}(f), \quad x \rightarrow a \end{array}$$

i) Direktno sledi iz (2)

$$\begin{aligned} ii) \quad \mathcal{O}(c \cdot f) &= \mathcal{O}(d), \quad x \rightarrow a \\ \varphi &= \mathcal{O}(c \cdot f) \implies \varphi = \mathcal{O}(f), \quad x \rightarrow a \end{aligned}$$

⇕

$$\begin{array}{c} \varphi(x) = \varepsilon(x) \cdot c \cdot f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \end{array} \quad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{c} \varphi(x) = \varepsilon_1(x) \cdot f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0 \end{array}$$

Ako uzmemo da je $c \cdot \varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)$ (primetimo da je $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} c \cdot \varepsilon(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = c \cdot 0 = 0$), dobijamo desnu strane implikacije iz leve.

Ovo je posledica svojstva $c \cdot 0 = 0$

Zadatak 1: Kako uporediti funkcije $\ln x$, x^α i a^x , ($\alpha > 0$, $a > 1$)?

Rešenje: $\ln x \ll x^\alpha \ll a^x$

ili, drugačije zapisano:

$$\ln x = \mathcal{O}(x^\alpha), \quad x \rightarrow +\infty$$

$$x^\alpha = \mathcal{O}(a^x), \quad x \rightarrow +\infty$$

Dokaz će biti izložen na drugom mestu.

3.2 Relacija $\sim$

DEFINICIJA 2. Ako su funkcije f i g definisane na $\dot{u}_a$ ($a \in \mathbf{R}$) kažemo da je $f \sim g$ kad $x \rightarrow a$ („ f je ekvivalentna, slična g ”) ako postoji funkcija α definisana na $\dot{u}_a$, t.d.

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \text{ i } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$$

Drugim rečima: $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$, kad $x \rightarrow a$

Napomena: $\sim$ je relacija ekvivalencije (RST).

Dokaz:

(R): $f \sim f, x \rightarrow a$

Ako je $f(x) = \alpha(x) \cdot f(x)$, treba da $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$.

Neka je $\alpha(x) \equiv 1$ ($\alpha(x)$ je identički jednaka 1, odnosno, jednaka je 1 $\forall x \in u_a$).

□.

(S): $f \sim g, x \rightarrow a \implies g \sim f, x \rightarrow$

Znamo: $f \sim g, x \rightarrow a \iff f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$

Hoćemo: $g(x) = \alpha_1(x) \cdot f(x), \lim_{x \rightarrow a} \alpha_1(x) = 1$.

Neka je $\alpha_1(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ (ovo je moguće uraditi jer $\alpha(x) > 0$ na nekoj $\dot{u}_a$). Tada je $\lim_{x \rightarrow a} \alpha_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\alpha(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)} = \frac{1}{1} = 1$

Ovo je posledica svojstva $\frac{1}{1} = 1$

□.

(T): $f \sim g, x \rightarrow a \wedge g \sim h, x \rightarrow a \implies f \sim h, x \rightarrow a$

Znamo: $f \sim g, x \rightarrow a \wedge g \sim h, x \rightarrow a \iff f(x) = \alpha_1(x) \cdot g(x) \wedge g(x) = \alpha_2(x) \cdot h(x)$, pri čemu je $\lim_{x \rightarrow a} \alpha_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha_2(x) = 1$

Hoćemo: $f \sim h, x \rightarrow a \iff f(x) = \alpha(x) \cdot h(x)$

$f(x) = \alpha_1(x) \cdot g(x) = \underbrace{\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)}_{=\alpha(x)} \cdot h(x) = \alpha(x) \cdot h(x)$, a važi i:

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \alpha_2(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

Ovo je posledica svojstva $1 \cdot 1 = 1$

□.

Primer 3:

i) $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$

jer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ii) $\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$

iii) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \rightarrow 0$

$$\text{jer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{iv) } e^x - 1 \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{v) } a^x - 1 \sim x \cdot \ln a, \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{jer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln a = 1$$

$$\text{vi) } (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad x \rightarrow 0$$

ZADATAK 1: Naći α tako da je $f(x) \sim c \cdot x^\alpha$, $x \rightarrow a$:

$$\text{i) } f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 7, \quad a = +\infty$$

$$\text{ii) } f(x) = -x + \sqrt{x} + 3, \quad a = +\infty$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{x^2 - 3x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1}, \quad a = +\infty$$

$$\text{iv) } f(x) = 2x^2 + 3x - 7\sqrt{x}, \quad a = 0$$

$$\text{v) } f(x) = \frac{x^7 - 3x + \sqrt{x}}{x^6 + 2x + 2\sqrt[3]{x}}, \quad a = 0$$

Rešenje:

$$\text{i) } f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 7 \sim x^3, \quad \alpha = 3, \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\text{jer } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 2x - 7}{x^3} = 1$$

$$\text{ii) } f(x) = -x + \sqrt{x} + 3 \sim -x, \quad \alpha = 1, \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\text{jer } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{x} + 3}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} \right) = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{x^2 - 3x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} \sim x^{2-\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{3}}, \quad \alpha = \frac{5}{3}, \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\text{jer } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + \sqrt{x}}{x^{\frac{5}{3}} \cdot (x^{\frac{1}{3}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + \sqrt{x} \setminus : x^2}{x^2 + x^{\frac{5}{3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + x^{-\frac{3}{2}}}{1 + x^{-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{iv) } f(x) = 2x^2 + 3x - 7\sqrt{x} \sim -1\sqrt{x}, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{jer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{-7\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x - 7\sqrt{x}}{-7\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{7}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{7}\sqrt{x} + 1 \right) = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\text{v) } f(x) = \frac{x^7 - 3x + \sqrt{x}}{x^6 + 2x + 2\sqrt[3]{x}} \sim \frac{1}{2}x^{\frac{1}{6}}, \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{jer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{6}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 - 3x + \sqrt{x}}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{6}} \cdot (x^6 + 2x + 2\sqrt[3]{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 - 3x + \sqrt{x} \setminus : \sqrt{x}}{\frac{1}{2}x^{\frac{37}{6}} + x^{\frac{7}{6}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{13}{2}} - 3\sqrt{x} + 1}{\frac{1}{2}x^{\frac{34}{6}} + x^{\frac{4}{6}} + 1} = \frac{0 - 0 + 1}{0 + 0 + 1} = 1$$

3.3 Veza između $\mathbf{o}$ i $\sim$

Pitanje: Šta bi značilo kada bismo napisali $f = \mathbf{o}(1)$, $x \rightarrow a$ ($g(x) \equiv 1$)?

Odgovor: Ovo je zapravo oznaka za $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ili $f(x) = \varepsilon(x) \cdot 1 = \varepsilon(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$

STAV:

- (1) $f \sim g \implies \mathbf{o}(f) = \mathbf{o}(g)$, $x \rightarrow a$
 (2) $f \sim g \iff f(x) = g(x) + \mathbf{o}(g)$, $x \rightarrow a$

Dokaz:

(1) Ako je funkcija φ koja je zanemarljiva za f , onda je zanemarljiva za g , ako su f i g ekvivalentne, odnosno:

Ako $f \sim g$: $\varphi = \mathbf{o}(f) \implies \varphi = \mathbf{o}(g)$, $x \rightarrow a$

Znamo:

$$f \sim g, x \rightarrow a \iff f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$$

$$\varphi = \mathbf{o}(f), x \rightarrow a \iff \varphi(x) = \varepsilon(x) \cdot f(x), \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Hoćemo:

$$\varphi(x) = \varepsilon_1(x) \cdot g(x)$$

$$\varphi(x) = \varepsilon(x) \cdot f(x) = \underbrace{\varepsilon(x) \cdot \alpha(x)}_{= \varepsilon_1(x)} \cdot g(x) = \varepsilon_1(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\varepsilon(x) \cdot \alpha(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \cdot 1 = 0$$

□.

(2)

$$\begin{aligned} (\implies) f \sim g, x \rightarrow a &\iff f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1 = (\alpha(x) - 1 + 1)g(x) = \\ &g(x) + \underbrace{(\alpha(x) - 1)g(x)}_{= \varepsilon(x)} = g(x) + \varepsilon(x)g(x) = g(x) + \mathbf{o}(g) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) - 1) = 1 - 1 = 0$$

□.

($\impliedby$) Neka je $f = g + \mathbf{o}(g)$, $x \rightarrow a$, $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Tada je:

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) = \underbrace{(1 + \varepsilon(x))g(x)}_{= \alpha(x)} = \alpha(x)g(x) \iff f \sim g$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} (1 + \varepsilon(x)) = 1 + 0 = 1$$

□.

Primer 4: Napisati osnovne limese na jeziku $\mathbf{o}$, odnosno, napisati $f \sim g \iff f = g + \mathbf{o}(g)$, $x \rightarrow a$ za osnovne limese.

Rešenje:

i)	$\sin x \sim x, x \rightarrow 0$	$\iff \sin x = x + o(x), x \rightarrow 0$
ii)	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$\iff 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \rightarrow 0$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \rightarrow 0$
iii)	$e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0$	$\iff e^x - 1 = x + o(x), x \rightarrow 0$ $e^x = 1 + x + o(x), x \rightarrow 0$
iv)	$\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$	$\iff \ln(1+x) = x + o(x), x \rightarrow 0$
v)	$a^x - 1 \sim x \ln a, x \rightarrow 0$	$\iff a^x - 1 = x \ln a + o(x \ln a), x \rightarrow 0$ $a^x = 1 + x \ln a + o(x), x \rightarrow 0$
vi)	$(1+x)^\alpha - 1 \sim x, x \rightarrow 0$	$\iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), x \rightarrow 0$

ZADATAK 2: Rešiti zadatke pomoću jezika o :

Koristićemo sledeće osobine relacije o :

$$\frac{o(x)}{x} = o(1)$$

$$o(1) \rightarrow 0 \text{ kad } x \rightarrow 0$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sin(x-1)} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(7x)}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{tg^2(3x)} \quad (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{2x-3} \right)^{x-3} \quad (7) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin \frac{x}{2}}}$$

Rešenje:

$$U (1) \text{ i } (2): \left| \begin{array}{l} \text{smena : } t = x - 1 \\ x \rightarrow 1 \iff t \rightarrow 0 \end{array} \right|$$

$$(1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt[3]{1+t}-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}t + o(t) - 1}{1 + \frac{1}{3}t + o(t) - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}t + o(t)}{\frac{1}{3}t + o(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+t}-1}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{3}t + o(t) - 1}{t + o(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}t + o(t)}{t + o(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{1}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + o(x)}{7x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + o(1)}{7 + o(1)} = \frac{3}{7}$$

$$(4) \sin^2 x = (x + o(x))^2 = (x + o(x)) \cdot (x + o(x)) = x^2 + x o(x) + x o(x) + o(x) o(x) =$$

$$x^2 + \underbrace{o(x^2) + o(x^2) + o(x^2)}_{= o(x^2)} = x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \left| \text{smena : } t = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right| = \ln(1+t) =$$

$$t + o(t) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + \underbrace{o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}_{= o(x^2)} = -\frac{x^2}{2} + \underbrace{o(x^2) + o(x^2)}_{= o(x^2)} = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Napomena: Ukoliko imamo funkciju unutar funkcije, uvek prvo razvijamo unu-

trašnju, pa onda spoljašnju.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2) \setminus x^2}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = -2$$

$$(5) \quad tg^2(3x) = \frac{\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)} = \frac{(3x + o(x)) \cdot (3x + o(x))}{(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)) \cdot (1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2))} =$$

$$\frac{9x^2 + o(x^2)}{(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2))^2} = \frac{9x^2 + o(x^2)}{A}$$

Napomena 1: $x \rightarrow 0$: $o(x) + o(x^2) = o(x)$ jer $o(x^2) = o(x)$ kad $x \rightarrow 0$ (oprez!
– ova jednakost važi isključivo u smeru $\rightarrow$, odnosno, ne važi $o(x) = o(x^2)$)

To znači: ako $\frac{f(x)}{x^2} \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$, onda $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ jer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot x = 0 \cdot 0 = 0$, a ne važi obrnuto!

Primer za ovu napomenu: $f(x) = x^{\frac{3}{2}} = o(x)$, $x \rightarrow 0$, nije $x^{\frac{3}{2}} = o(x^2)$, $x \rightarrow 0$
Uopštenjem dobijamo:

$$Kad \ x \rightarrow 0, \text{ onda } \overrightarrow{o(x^n) = o(x^m)}, \ n \geq m$$

Napomena 2:

$$Kad \ x \rightarrow \infty, \text{ onda } \overrightarrow{o(x^n) = o(x^m)}, \ n \leq m$$

$$f = o(x^n), \ x \rightarrow \infty \xRightarrow{?} f = o(x^m), \ x \rightarrow \infty$$

$$\frac{f}{x^n} \rightarrow 0, \ x \rightarrow \infty \xRightarrow{?} \frac{f}{x^m} \rightarrow 0, \ x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{x^m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{x^n} \cdot x^{n-m} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$A = (1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)) \cdot (1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)) = 1 - \frac{9x^2}{2} + \underbrace{o(x^2)}_{-\frac{9x^2}{2} \cdot o(x^2)} - \frac{9x^2}{2} + \frac{81x^4}{4} +$$

$$\underbrace{o(x^4)}_{o(x^2) \cdot o(x^2)} + \underbrace{o(x^2)}_{o(x^2) \cdot o(x^2)} + \underbrace{o(x^4)}_{o(x^2) \cdot o(x^2)} = 1 - 9x^2 + o(x^2)$$

$$tg^2(3x) = \frac{9x^2 + o(x^2)}{1 - 9x^2 + o(x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{tg^2(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1}{\frac{9x^2 + o(x^2)}{1 - 9x^2 + o(x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)) \cdot (1 - 9x^2 + o(x^2)) \setminus x^2}{9x^2 + o(x^2)} =$$

$$\frac{-\frac{1}{2} \cdot 1}{9} = -\frac{1}{18}$$

Domaći zadatak: Rešiti primer (6)

$$(7) (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}} = e^{\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \ln(\cos x)}$$

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 \frac{x}{2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{\frac{1}{4} + o(1)}} = e^{-2}$$

PETA NEDELJA

4 Svojstva neprekidnih funkcija

Podsetnik: f je neprekidna u tački $x_0 \in D_f$ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ili pišemo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

- f je neprekidna na skupu A ako je neprekidna u svakoj tački iz A
- $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, polinomi, racionalne funkcije su neprekidne funkcije

4.1 Lokalna svojstva neprekidnih funkcija

Lokalna svojstva se nazivaju tako zato što razmatramo njihovo ponašanje u nekoj tački (to će biti 1 i 2), ili u okolini neke tačke (3 i 4).

1) f , g su neprekidne u $x_0 \implies f \pm g, f \cdot g$, (ako je $g(x) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ su neprekidne u x_0

Sledi iz svojstva limesa.

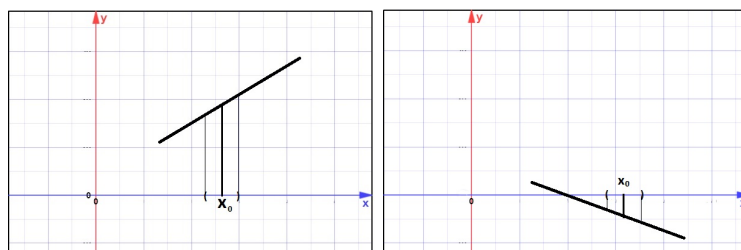
2) f je neprekidna u tački $y_0 = g(x_0)$ i g je neprekidna u $x_0 \implies f \circ g$ je neprekidna u tački x_0

Sledi iz činjenice da $\lim_{x \rightarrow x_0} f = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ kad je f neprekidna:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) &= f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \\ &= \underbrace{f}_{\text{zato što je } f \text{ neprekidna}} \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}_{g(x_0) \text{ zato što je } g \text{ neprekidna}} \right) = f(g(x_0)) = f \circ g(x_0) \end{aligned}$$

Primer 1: Važi da je $\frac{\sin(x^2 + 2x) - \tan \frac{2x}{x^3 + 1}}{\cos^7(\sin(x^4 + 2))}$ neprekidna jer ako prodemo kroz sve pojedinačne funkcije koje su neprekidne, i njihove kombinacije su neprekidne.

3) f je neprekidna u x_0 i $f(x_0) \neq 0 \implies \exists u_{x_0}$ t.d. f je istog znaka na u_{x_0} kao i $f(x_0)$.

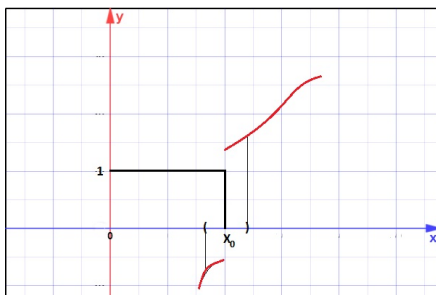


Slika 4.1.

Sledi iz drugog stava limesa ako je:

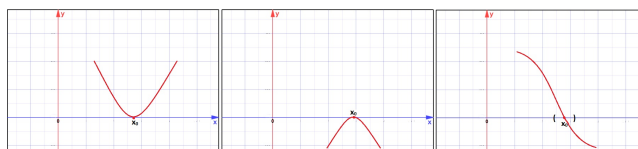
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, L \neq 0 \implies \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(L)$$

Primer 2: $f(x_0) = 1 > 0$, ali f je prekidna



Slika 4.2.

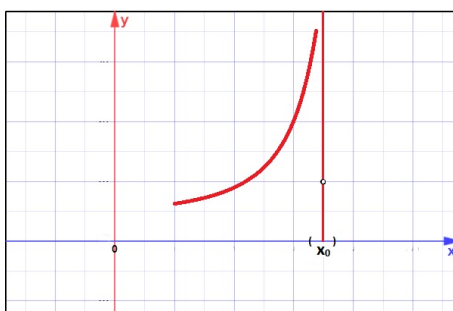
Primer 3: Ako je $f(x_0) = 0$, onda nemamo zaključak kojeg je znaka, npr:



Slika 4.3.

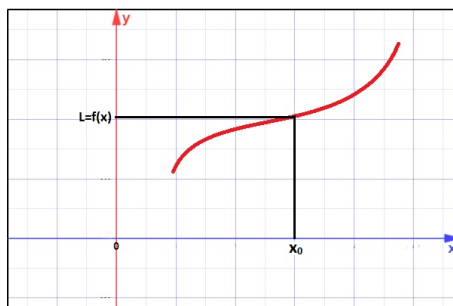
4) f je neprekidna u $x_0 \implies \exists u_{x_0}$ na kojoj je f ograničena.

Primer 4: Primer kada ne važi ovo svojstvo, odnosno, kada nije neprekidna



Slika 4.4.

Primer 5: $\forall x \in u_{x_0} : |f(x)| \leq M \iff m \leq f(x) \leq M$

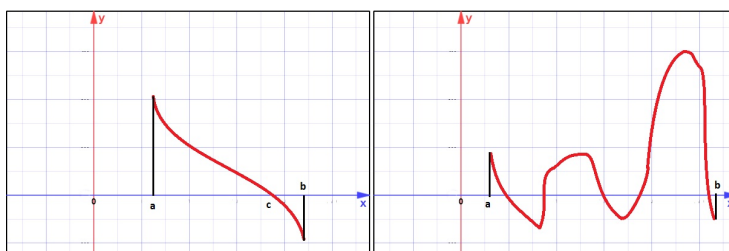


Slika 4.5.

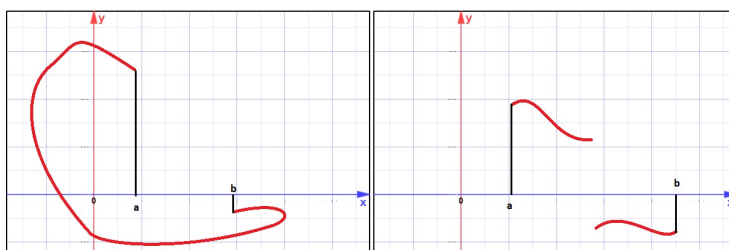
4.2 Globalna svojstva neprekidnih funkcija

4.2.1 Koši - Bolcanova teorema

$$\left. \begin{array}{l} f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R} \\ f \text{ je neprekidna na } [a, b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \implies \exists c \in (a, b) \text{ t.d. } f(c) = 0$$

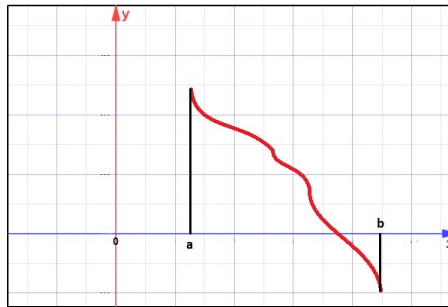


Slika 4.6. Primeri funkcija gde važi Koši-Bolcanova teorema



Slika 4.7. Slika 1 nije dobra jer to nije funkcija, a slika 2 nije u kontradikciji sa teoremom jer funkcija nije neprekidna

Dokaz: Posmatrajmo sledeću sliku:



Slika 4.8.

Uzmimo vrednost $\frac{a+b}{2}$. Gledamo koliko je $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$:

- 1) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \implies$ kraj dokaza jer $c = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
- 2) (slučaj koji odgovara slici SLIKA) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0 \implies$ gledamo upola manji

interval $[a_2, b_2] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

- 3) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \implies$ gledamo upola manji interval $[a_2, b_2] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$

Važi da je $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

Ponavljamo postupak polovljenja za interval $[a_2, b_2]$, ...

Nakon n koraka, imamo interval: $I_n = [a_n, b_n]$, t.d. $f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$ (da bi bilo u skladu sa slikom, ali važi i obrnuto). Takođe je: $I_{n+1} \subseteq I_n$ i dužina intervala I_n je $\frac{b-a}{2^{n-1}}$ (prvi je $\frac{b-a}{2^0}$, drugi je $\frac{b-a}{2^1}$, ..., n -ti je $\frac{b-a}{2^{n-1}}$), pa prema

teoremi KAN sledi:

$\exists c \in \bigcap I_n \neq \emptyset$, i, štaviše važi: $\exists_1 c$ (postoji tačno jedno c).

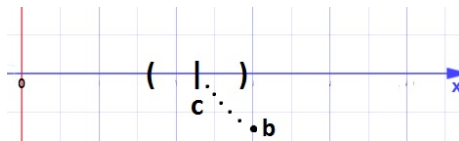
Zašto je $f(c) = 0$?

Ako nije, bilo bi:

- 1) $f(c) > 0$

$\Downarrow$

$f(x) > 0$ na nekom $(c - \delta, c + \delta)$, a to je nemoguće jer:



Slika 4.9.

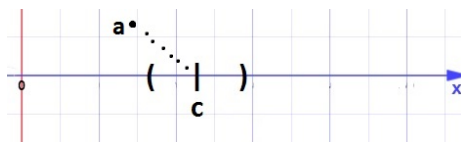
$$|b - c| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

$c \in [a_n, b_n]$, a važi $f(b_n) < 0$

$$\frac{b - a}{2^n}$$

$\perp$

2) $f(c) < 0$ je nemoguće jer je $f(a_n) > 0$ (važi isto kao i pod 1, samo što prilazimo c sa druge strane):



Slika 4.10.

pa ponovo dolazimo do kontradikcije ($\perp$) što znači da $f(c) = 0$.

□.

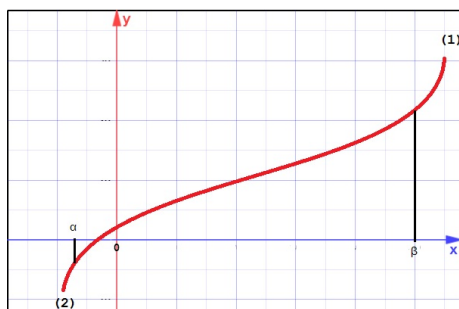
Primer 6: Dokazati da svaki polinom trećeg stepena ima barem 1 realnu nulu.

Dokaz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$

Neka je $a > 0$:

$f(x) \rightarrow +\infty$, kad $x \rightarrow +\infty$ (*)

$f(x) \rightarrow -\infty$, kad $x \rightarrow -\infty$ (**)



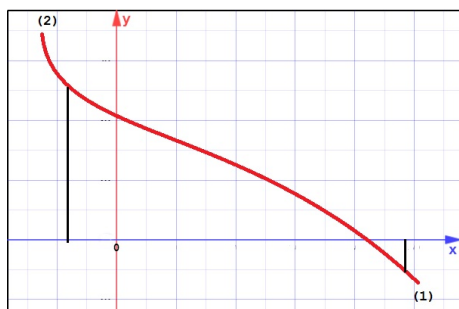
Slika 4.11.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ je neprekidna na } [\alpha, \beta] \\ \exists \beta \text{ t.d. } f(\beta) > 0 \\ \exists \alpha \text{ t.d. } f(\alpha) < 0 \end{array} \right\} (KBT) \implies \exists \gamma \in (\alpha, \beta) \text{ t.d. } f(\gamma) = 0$$

Neka je $a < 0$:

$f(x) \rightarrow -\infty$, kad $x \rightarrow +\infty$ (*)

$f(x) \rightarrow +\infty$, kad $x \rightarrow -\infty$ (**)



Slika 4.12.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ je neprekidna na } [\alpha, \beta] \\ \exists \beta \text{ t.d. } f(\beta) < 0 \\ \exists \alpha \text{ t.d. } f(\alpha) > 0 \end{array} \right\} (KBT) \implies \exists \gamma \in (\alpha, \beta) \text{ t.d. } f(\gamma) = 0$$

□.

Primer 7: Ne možemo da primenimo KBT na polinom stepena 2 jer važi:

$$f(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow \pm\infty, a > 0$$

$$f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow \pm\infty, a < 0$$

Primer 8: Svaki polinom neparnog stepena ima bar jednu realnu nulu.

Postoji jedna bitna posledica KBT koju ćemo sada razmatrati.

4.2.2 Teorema o međuvrednosti

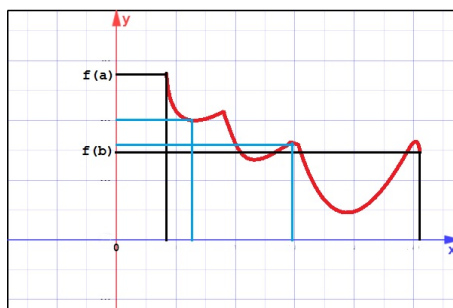
Ako imamo neprekidnu funkciju na intervalu ($f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je neprekidna) i γ je između $f(a)$ i $f(b)$ (gde ne mora da važi $f(a) \cdot f(b) < 0$), tada:

$\exists c \in [a, b]$ t.d. $f(c) = \gamma$ i to čitamo kao:

„Svaka vrednost između $f(a)$ i $f(b)$ se dostiže” ili „Neprekidna slika intervala je interval”.

$a_1, b_1 \in [a, b], f(a_1), f(b_1) \in f([a, b])$

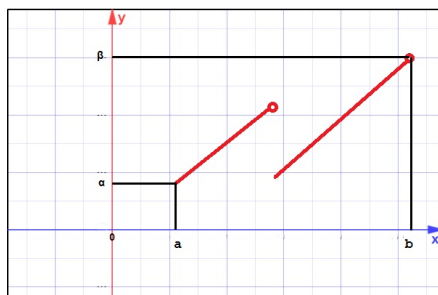
$f : [a_1, b_1]$ – primenimo teoremu: $\forall \gamma$ između $f(a_1)$ i $f(b_1)$ $\exists c \in [a_1, b_1]$ t.d. $f(c) = \gamma$



Slika 4.13.

Napomena: Teorema o međuvrednosti je jednosmerna, odnosno:

Ako je $f([a, b])$ interval, ne mora da znači da je f neprekidna. Pokažimo da je ovo tačno na kontraprimeru:



Slika 4.14.

$f([a, b]) = [\alpha, \beta]$, ali je f prekidna.

Napomena: Ako skup A nije interval i f je neprekidna na A , onda $f(A)$ ne mora da bude interval. Pokažimo da je ovo tačno na kontraprimeru:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ nije interval

$f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Ali: $f((0, +\infty)) = (0, +\infty)$ i $f((-\infty, 0)) = (-\infty, 0)$.

Dokaz:

(1) $f(a) = f(b) = \gamma$

(2) $f(a) \neq f(b)$ (ubraja i $f(a) > f(b)$ i $f(a) < f(b)$)

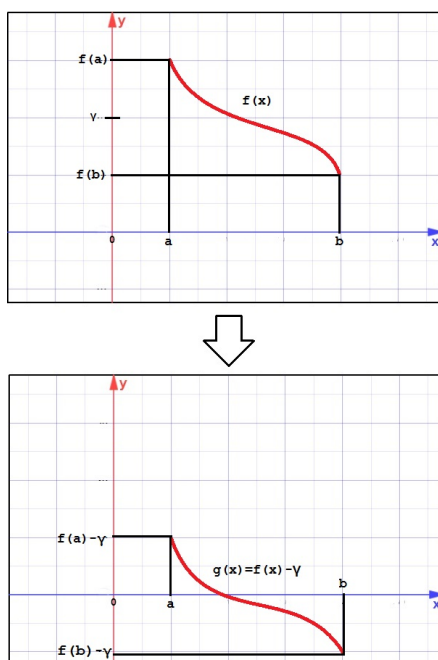
Neka je $g(x) = f(x) - \gamma$, g je neprekidna funkcija

$g(a) \cdot g(b) = (f(a) - \gamma) \cdot (f(b) - \gamma)$

$$\begin{array}{l|l} f(a) < f(b) & f(a) > f(b) \\ f(a) < \gamma < f(b) & f(b) < \gamma < f(a) \\ f(a) - \gamma < 0 & f(b) - \gamma < 0 \\ f(b) - \gamma > 0 & f(a) - \gamma > 0 \end{array}$$

(KBT na g) $\implies \exists c \in (a, b)$ t.d. $g(c) = 0$

Pa je $f(c) - \gamma = 0 \iff f(c) = \gamma$



Slika 4.15.

□.

4.2.3 Vajerštrasova teorema

Podsetnik:

$$\sup_A f = \sup\{f(x) \mid x \in A\} = f(A)$$

f je ograničena (dovoljno je da bude odozgo ograničena) na A (SUP) $\implies \exists \sup_A f$

Ako je $\sup_A f = f(x_0)$ za neko $x_0 \in A$, onda je $f(x_0) = \max_A f$ maksimum funkcije i kažemo da se maksimum dostiže.

(Slično važi i za infimum ($\inf_A f$) i minimum ($\min_A f$).)

Primer 9: Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = (0, 1)$. Da li je f ograničena na A ? Nije, jer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

Primer 10: Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = (1, 2)$.

$$1 < x < 2 \implies \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$$

$\sup_A f = 1$, ali se supremum ne dostiže

Primer 11: Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = [1, 2]$.

$$1 \leq x \leq 2 \implies \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

$\sup_A f = 1 = f(1)$, i supremum (maksimum) se dostiže

Primer 12: Neka je $f(x) = \sin x$, $A = [0, \pi]$.

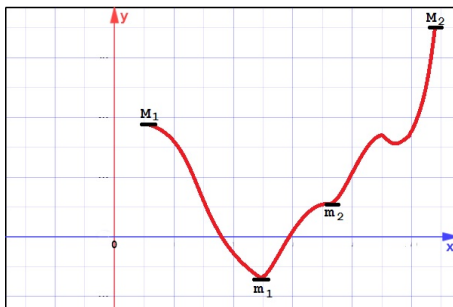
$$\begin{aligned} \sup_A f &= 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \max_A f \\ \inf_A f &= 0 = f(0) = \min_A f \end{aligned}$$

Vajerštrasova teorema:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \text{ je neprekidna} \implies \begin{aligned} (1) & f \text{ je ograničena} \\ (2) & f \text{ dostiže svoj } \max \text{ i } \min \text{ na } [a, b] \end{aligned}$$

Dokaz:

(1) Ako f nije ograničena na $[a, b]$, onda f ili nije ograničena na $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ili nije ograničena na $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, jer, ako je $m_1 \leq f(x) \leq M_1$ na $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ i $m_2 \leq f(x) \leq M_2$ na $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, onda je: $m \leq f(x) \leq M$, gde je:
 $m = \min\{m_1, m_2\}$
 $M = \max\{M_1, M_2\}$



Slika 4.16.

Izaberemo onu polovinu na kojoj f nije ograničena. Neka je to novi interval I_2 . Postupak prepolovljenja primenimo na I_2 , pa na $I_3, I_4, \dots, I_n$, i tako dobijamo niz umetnutih segmenata: $I_{n+1} \subseteq I_n \implies f$ je neograničena na I_n

$$(\text{KAN}) \implies \exists c = \bigcap I_n$$

f je neograničena $\implies \exists u_c = (c - \delta, c + \delta)$ na kojoj je f ograničena, a ovo je kontradikcija ($\perp$) jer za dovoljno veliko n važi $I_n \subseteq (c - \delta, c + \delta)$.

□.

(2) Dokazali smo da je f ograničena. Neka je $s = \sup_{[a,b]} f$. Hoćemo da pokažemo da je $s = f(x_0)$ za neko x_0 .

Pretpostavimo suprotno, tj. $s \neq f(x), \forall x \in [a, b]$

$$s > f(x), \forall x \in [a, b]$$

$$\text{Definišimo funkciju } g(x) := \frac{1}{s - f(x)}$$

$$s - f(x) > 0 \implies g \text{ je neprekidna na } [a, b]$$

(1) $\implies g$ je ograničena.

Sa druge strane, važi:

$$\forall \varepsilon > 0 : s - \varepsilon \text{ više nije majoranta} \implies \exists x_0 \in [a, b] : f(x) > s - \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
& f(x) > s - \varepsilon \\
& s - f(x) < \varepsilon \\
& g(x_0) = \frac{1}{s - f(x_0)} > \frac{1}{\varepsilon} \\
& \implies g \text{ nije ograničena. } (\perp)
\end{aligned}$$

□.

Zaključak: Ako je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekidna funkcija, onda sledi $f([a, b]) = [\underbrace{f_{min}}, \underbrace{f_{max}}] = D$.
 $\quad \quad \quad = \min_{[a, b]} f \quad = \max_{[a, b]} f$

D je interval zbog KBT.

$\min_{[a, b]} f$ i $\max_{[a, b]} f$ postoje zbog VAJER.

Zadatak 1: Odrediti $f([a, b])$.

- 1) $f(x) = x^2$, $[a, b] = [1, 4]$
- 2) $f(x) = x^2$, $[a, b] = [-2, -1]$
- 3) $f(x) = x^2$, $[a, b] = [-2, 5]$
- 4) $f(x) = \sin x$, $[a, b] = [0, \frac{3\pi}{2}]$

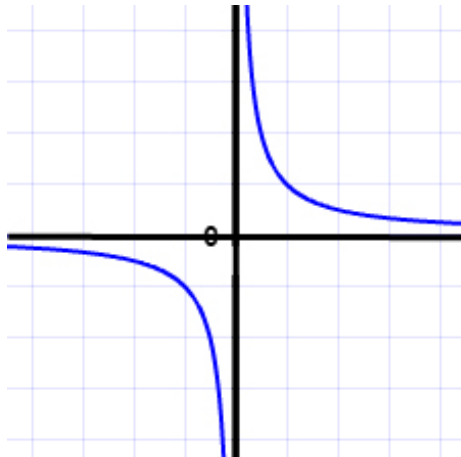
Rešenje:

4.3 Vrste prekida

DEFINICIJA 1. Ako je $x_0 \in D_f$, onda je ona tačka prekida ako f nije neprekidna u tački x_0

Primer 1: i) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

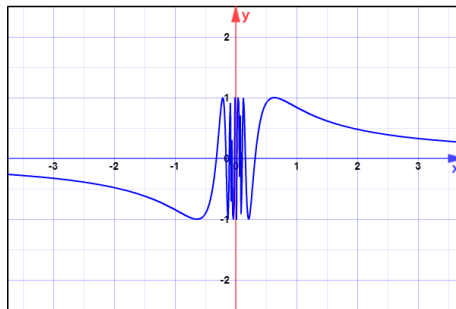
Tačka $x_0 = 0$ je tačka prekida funkcije $f(x)$ jer ne postoji $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$



Slika 4.17.

ii) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

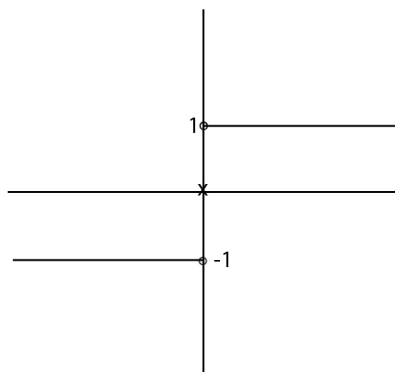
Tačka $x_0 = 0$ je prekid jer ne postoji konačan limes funkcije $f(x)$.



Slika 4.18.

iii) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Tačka $x_0 = 0$ je prekid jer je $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.



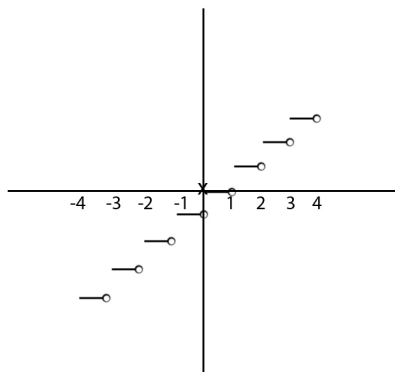
Slika 4.19.

iv) $f(x) = [x]$

Za svako $x_0 \in \mathbf{Z}$, x_0 je tačka prekida funkcije jer je

$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n = [n] = f(n)$ — neprekidna je zdesna,

a $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1 \neq [n]$ — nije neprekidna sleva



Slika 4.20.

DEFINICIJA 2. Neka je tačka x_0 tačka prekida funkcije f . Kažemo da je:

(1) tačka x_0 *prekid prve vrste* ako $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \mathbf{R}$ i $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \in \mathbf{R}$

(2) tačka x_0 *prekid druge vrste* ako nije prekid prve vrste.

U primeru 1, x_0 je prekid:

i) i ii) II vrste

iii) i iv) I vrste

Napomena: Ako je x_0 prekid prve vrste i važi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, onda

se x_0 nekada naziva *otklonjiv prekid*.

5 Neprekidnost monotone i inverzne funkcije

Kada posmatramo osobine nekih funkcija, mi uglavnom posmatramo one funkcije f tako da $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Ipak, za neke funkcije biće nam potrebno da suzimo domen ili kodomen ukoliko želimo da nam za funkciju važi ta neka osobina. Pogledajmo primere nakon sledeće implikacije:

Ako je f strogo monotona $\implies f$ je „1-1” ($x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$)

Primer 1:

i) $f(x) = x^2$

◦ $f(x)$ nije monotona na $\mathbf{R}$.

◦ $f(x)$ jeste monotona na $\mathbf{R}^+$ (suzili smo D_f) $\implies f$ jeste „1-1”

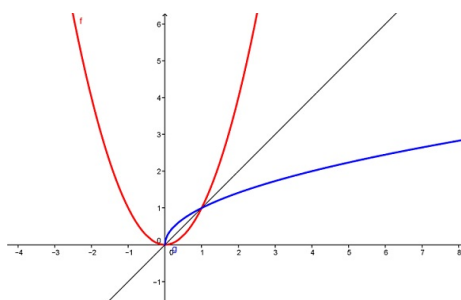
Slično:

◦ $f(x)$ nije „na” ako $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

◦ $f(x)$ jeste „na” ako $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$

Iz svega ovoga možemo zaključiti da je $f(x)$ bijekcija na $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$.

Osobina funkcije f i njene inverzne funkcije f^{-1} : simetrične su u odnosu na pravu $y = x$.



Slika 5.1.

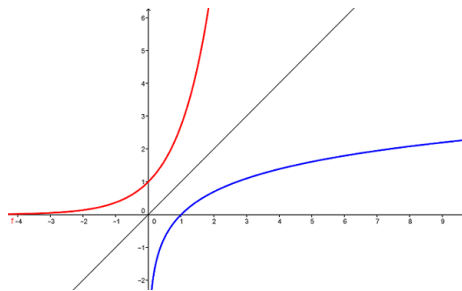
Ako grafik neke funkcije označimo Γ , onda je:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$$

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(f(x), x)\}$$

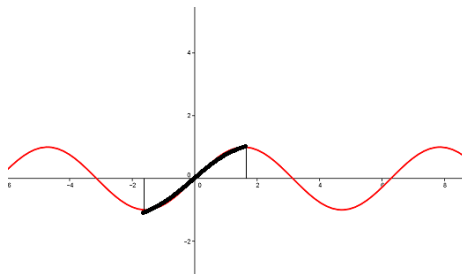
$$(x_0, y_0) \in \Gamma_f \iff f(x_0) = y_0 \iff x_0 = f^{-1}(y_0) \iff (y_0, x_0) \in \Gamma_{f^{-1}}$$

ii) $f(x) = e^x$, $f : \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ je bijekcija



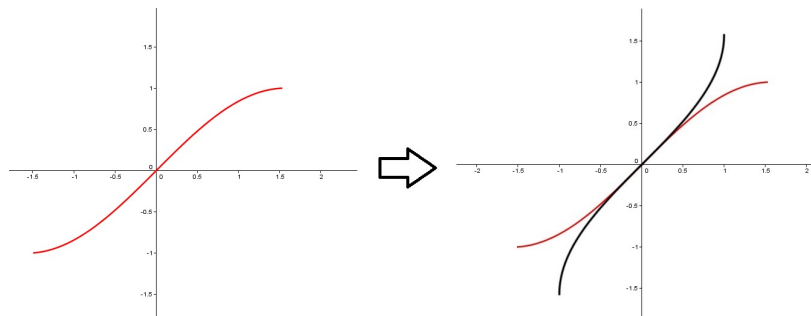
Slika 5.2.

iii) $f(x) = \sin x$



Slika 5.3.

Ako smanjimo $D_f = \mathbf{R}$ na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tu će funkcija biti „1-1”.



Slika 5.4.

Ukoliko smanjimo Cod_f na $[-1, 1] \Rightarrow f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ je bijekcija.

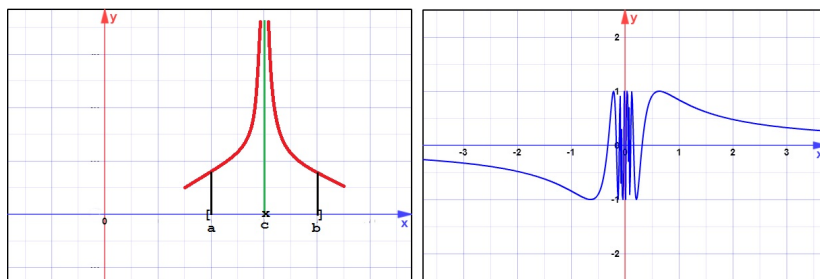
Domaći:

iv) $f(x) = \cos x$, $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ je bijekcija.

v) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbf{R}$ je bijekcija.

(Pomoć: $f^{-1}(x) = \arctg x$, $f : \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.)

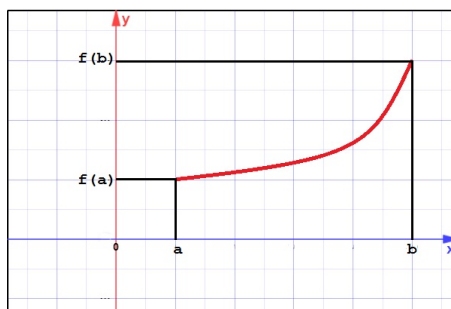
STAV: Monotona funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ može imati samo prekide I vrste.



Slika 5.5. Funkcije na obe slike imaju prekide 2. vrste, ali nisu u kontradikciji sa teoremom

Dokaz:

f je monotona $\implies f(x)$ je između $f(a)$ i $f(b)$

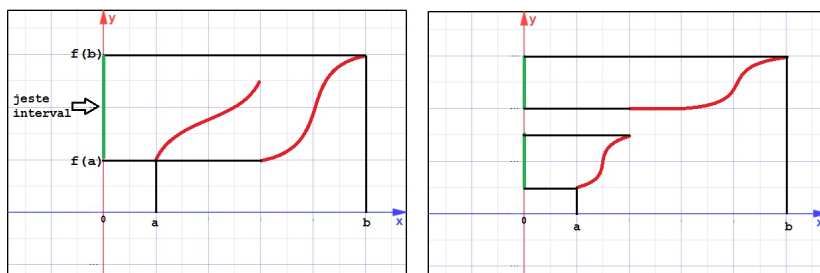


Slika 5.6.

$\forall x_0 \in [a, b], \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ i $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ zbog stava o limesu monotone funkcije.

□.

„Neprekidna slika intervala je interval”. (Ne važi obrnuto!)



Slika 5.7.

TEOREMA 5.1. *Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ monotona. Tada je f neprekidna akko je $f([a, b])$ interval.*

$f([a, b]) = [\alpha, \beta], \alpha, \beta \in \{f(a), f(b)\}.$

$$\begin{aligned} f \nearrow &\implies \alpha = f(a), \beta = f(b) \\ f \searrow &\implies \alpha = f(b), \beta = f(a) \end{aligned}$$

Dokaz: (zbog *akko* razbijamo na desni i levi smer)

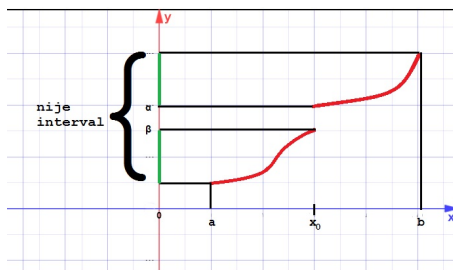
($\implies$) „ f je neprekidna $\implies f([a, b])$ je interval”.

Ovo važi čak i kad funkcija f nije monotona (iz Teoreme o međuvrednosti.)

($\Leftarrow$) Ukoliko pokažemo da ako je f monotona i prekidna, onda $f([a, b])$ nije interval, onda smo dokazali da važi u levom smeru (zahvaljujući kontrapoziciji).

Pretpostavimo da je funkcija f rastuća (u slučaju da je opadajuća, možemo definisati funkciju $g(x) =_{def} -f(x)$, pa dokaz ide potpuno isto, samo za funkciju $g(x)$).

Ako je x_0 prekid ($STAV$) $\implies x_0$ je prekid prve vrste.



Slika 5.8.

$\alpha = f(x_0^-) < f(x_0^+) = \beta$ (ne može da bude $\leq$ jer smo pretpostavili da je prekid)
 $f(x_0) \in [\alpha, \beta]$
 $f(a) \leq \alpha < \beta \leq f(b) \implies f([a, b])$ nije interval.

Zašto, osim $f(x_0)$ ništa u intervalu $[\alpha, \beta]$ nije nastalo kao slika (nije oblika $f(x)$)?

To jednostavno važi jer:

$$x \in [a, x_0] \implies f(x) \leq \alpha$$

$$x \in [x_0, b] \implies f(x) \geq \beta$$

□.

Napomena: Važi sledeće:

$$f \nearrow \wedge \exists f^{-1} \implies f^{-1} \nearrow$$

$$f \searrow \wedge \exists f^{-1} \implies f^{-1} \searrow$$

Dokaz:

Ako pretpostavimo $f \nearrow$, a f^{-1} ne raste:

$$\exists y_1 < y_2$$

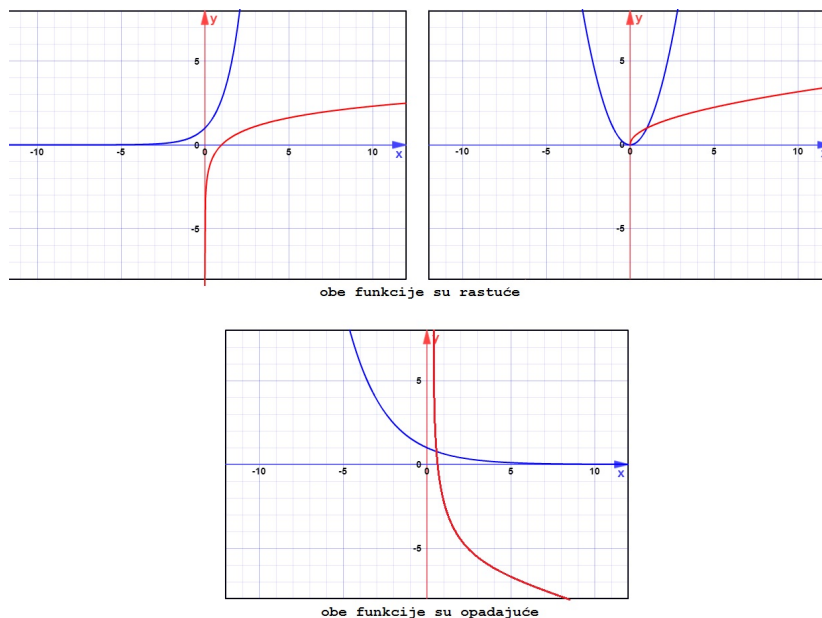
$$\underbrace{f^{-1}(y_1)}_{x_1} \geq \underbrace{f^{-1}(y_2)}_{x_2}, (y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2))$$

$$x_1 \geq x_2$$

$$f(x_1) < f(x_2) (\perp)$$

□.

Primeri:



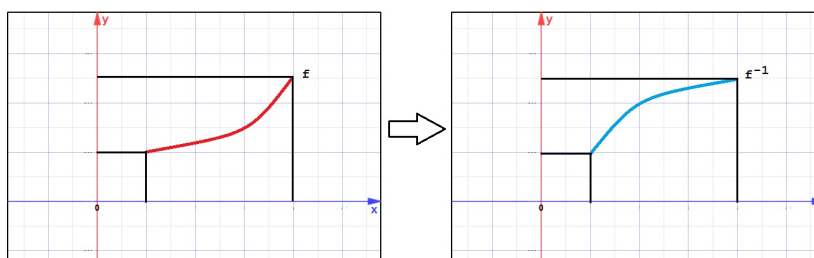
Slika 5.9.

TEOREMA 5.2. Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ strogo monotona, tada je f^{-1} takođe neprekidna.

Dokaz:

Neka je $f \nearrow$ i važi $f([a, b]) = \overbrace{[f(a), f(b)]}^{[\alpha, \beta]}$.
 f^{-1} je takođe $\nearrow$ i $f^{-1}([\alpha, \beta]) = [a, b]$.
 $(T\ 5.2.) \Rightarrow f^{-1}$ je neprekidna.

□.



Slika 5.10.

Posledica: Dokazali smo da su funkcije polinoma, trigonometrijske funkcije, kao i sve njihove kombinacije neprekidne. Na osnovu T 5.2. sledi da su $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[n]{x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arcctg } x$ takođe neprekidne.

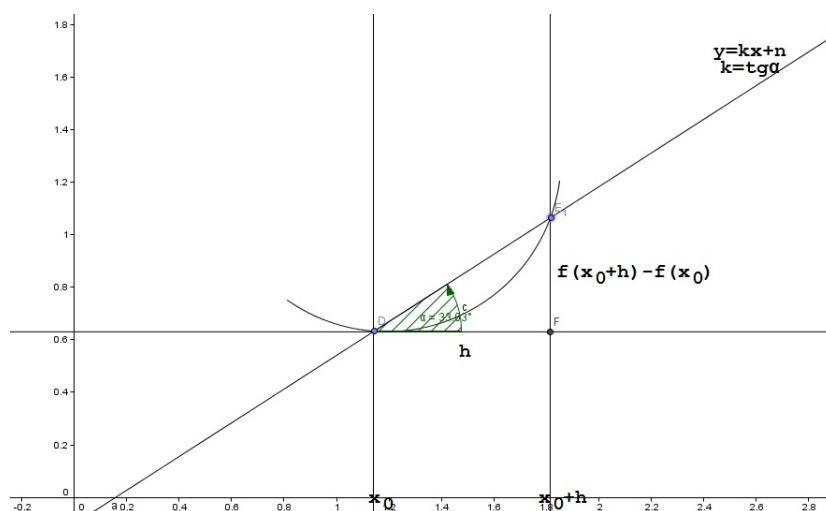
Ostalo nam je da pokažemo da važi:
 a^x je neprekidna $\implies \log_a x$ je neprekidna
 e^x je neprekidna $\implies \ln x$ je neprekidna

ŠESTA NEDELJA

6 Izvodi

6.1 Definicija izvoda

Uzmimo tačku $x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f$. Posmatramo količnik $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, u kojem ono što je u brojiocu ($f(x_0 + h) - f(x_0)$) nazivamo „priraštaj funkcije”, a ono što je u imeniocu (h) nazivamo „priraštaj promenljive”.



Slika 6.1. Definicija izvoda

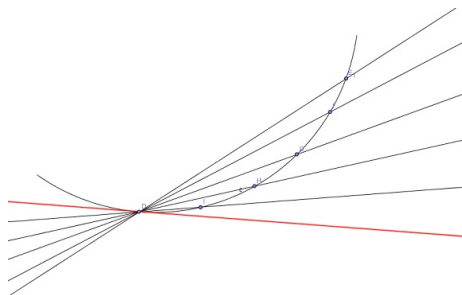
Posmatrani količnik je $\tan h$. Ako postoji limes ovog količnika, kada $h \rightarrow 0$, onda taj limes nazivamo „izvod” funkcije f u tački x_0 , u oznaci $f'(x_0)$. Prava $y = kx + n$, $k = \tan \alpha$ je sečica funkcije f u x_0 .

$$f'(x) =_{\text{def}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

6.2 Interpretacije izvoda

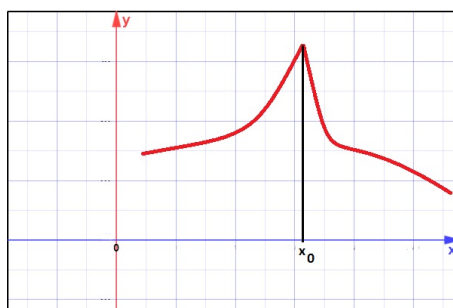
6.2.1 Geometrijska interpretacija izvoda

Geometrijska interpretacija izvoda je koeficijent $k = \tan h$ pravca tangente na grafik u tački $(x_0, f(x_0))$.



Slika 6.2. Geometrijska interpretacija izvoda

Ukoliko je na grafiku vidljiv šiljak u tački x_0 , onda funkcija nije diferencijabilna u toj tački.



Slika 6.3.

6.2.2 Mehanička interpretacija izvoda

x – vreme

$f(t)$ – pređeni put za vreme t

Količnik $\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ ili $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ je srednja brzina (što se označava $V = \frac{\Delta s}{\Delta t}$), a $f'(t_0)$ je trenutna brzina.

6.3 Neki izvodi

$$1) \boxed{f(x) = c, f'(x) = 0}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$2) \boxed{f(x) = x^n, f'(x) = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbf{N}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \binom{n}{1}x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

$$3) \boxed{f(x) = e^x, f'(x) = e^x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \right| = e^x$$

$$4) \boxed{f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \left| \begin{array}{l} \text{smena : } t = \frac{h}{x} \\ h \rightarrow 0 \iff t \rightarrow 0 \end{array} \right| =$$

$$\frac{1}{x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x}$$

$$5) \boxed{f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}, x > 0}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left[\left(\frac{x+h}{x} \right)^\alpha - 1 \right]}{h} = x^\alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{x} \right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{smena : } t = \frac{h}{x} \\ h \rightarrow 0 \iff t \rightarrow 0 \end{array} \right| = x^{\alpha-1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$6) \boxed{f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\rightarrow 1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\cos \left(x + \frac{h}{2} \right)}_{\rightarrow \cos x} =$$

$\cos x$

$$7) \boxed{f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{h}{2} \sin \left(x + \frac{h}{2} \right)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\rightarrow 1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\sin \left(x + \frac{h}{2} \right)}_{\rightarrow \sin x} =$$

$-\sin x$

6.4 Diferencijabilnost funkcije

DEFINICIJA 1. Kažemo da je f diferencijabilna u tački x_0 ako $\exists f'(x_0)$.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. $f'(x_0)$ ne postoji jer:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h-0| - 0}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{\text{sgn}(h) \cdot h}{h} = \text{sgn}(h), \text{ a funkcija } \text{sgn}(x) \text{ nema limes kad } x \rightarrow 0.$$

DEFINICIJA 2. Ako $\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, onda se on zove desni izvod,

u oznaci $f'_+(x_0)$. Ako $\exists \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, onda se on zove levi izvod, u oznaci $f'_-(x_0)$.

Primer 1: $f(x) = |x|$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1.$$

Napomena:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \iff f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

Šta znači $\alpha(h) \rightarrow A, h \rightarrow 0$? To je isto što i:

$$\alpha(h) - A \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0$$

$\Updownarrow$

$$\alpha(h) - A = o(1), \quad h \rightarrow 0$$

$$\alpha(h) = A + o(1), \quad h \rightarrow 0$$

Primenimo ovo na: $\alpha(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \quad A = f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1) / \cdot h, \quad h \rightarrow 0$$

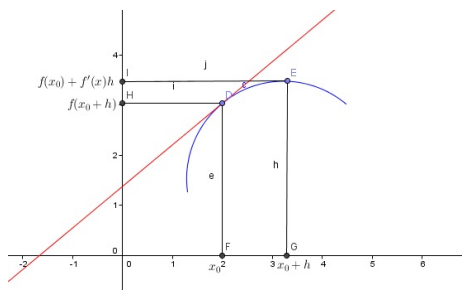
$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$f(x_0) + f'(x_0)h$ je zapravo prava koja aproksimira $x_0 + h$ po h

$\Updownarrow$

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h, \text{ za malo } h$$



Slika 6.4.

STAV: Funkcija f je diferencijabilna u $x_0 \implies f$ je neprekidna u x_0
(zapisano oznakama: $f \mathcal{D} x_0 \implies f \mathcal{C} x_0$)

Dokaz:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h), \quad h \rightarrow 0 / \lim_{h \rightarrow 0}$$

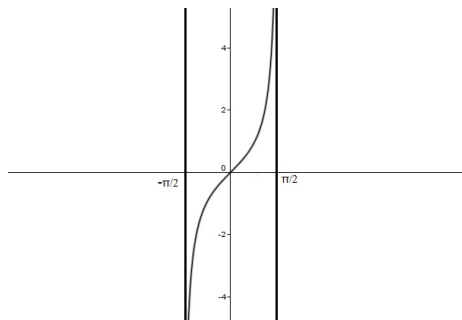
$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0+h)) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)h}_{\rightarrow 0} + \underbrace{o(h)}_{\rightarrow 0})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0+h)) = f(x_0)$$

□.

Napomena: Ako se ne naglasi, onda je f diferencijabilna u x_0 ako $\exists f'(x_0) \in \mathbf{R}$ (možemo da proširimo i na $\bar{\mathbf{R}}$).

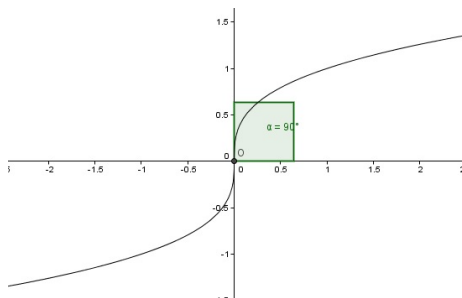
Napomena: Šta geometrijski predstavlja $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = +\infty$? Odgovor: vertikalnu tangentu, jer tg ima u $\frac{\pi}{2}$ vertikalnu asimptotu (videti Sliku 6.5.)



Slika 6.5. $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} \alpha = +\infty$

Primer 2:

i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

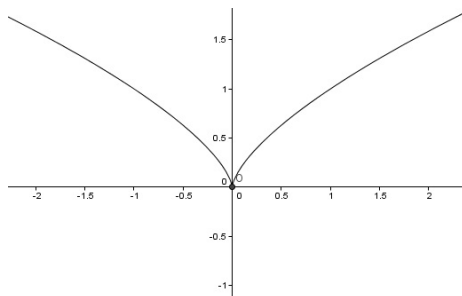


Slika 6.6.

Tangenta krive $\sqrt[3]{x}$ je y -osa, odnosno, prava $x = 0$ jer:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} \right) = +\infty, \text{ ako posmatramo u proširenom smislu.}$$

ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$



Slika 6.7.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} \begin{matrix} \nearrow +\infty, & h \rightarrow 0^+ \\ \searrow -\infty, & h \rightarrow 0^- \end{matrix},$$

pa u ovom slučaju ne postoji tangenta ni u osnovnom, a ni u proširenom smislu.

Ni jedna od ovih funkcija nije diferencijabilna u osnovnom smislu.

6.5 Pravila izvoda

STAV 1: Neka važi $f, g \mathcal{D}x_0$. Tada važi sledeće:

- (1) Ako $(f + g) \mathcal{D}x_0$, onda $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- (2) Ako $cf \mathcal{D}x_0$, onda $(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
- (3) Ako $(f \cdot g) \mathcal{D}x_0$, onda $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- (4) Ako $g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g} \mathcal{D}x_0$, onda $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$

Dokaz: (dokazi za (1) i (2) se izvide na osnovu linearnosti operatora limesa)

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

□.

(2) slično kao u (1)

□.

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h)}{h} + \frac{f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{= f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x_0 + h)}_{\rightarrow g(x_0)} + f(x_0) \cdot \underbrace{\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}_{= g'(x_0)} \right] = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

(4) Izvod od $\frac{1}{g}$ je:

$$\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x_0 + h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0) - g(x_0 + h)}{g(x_0 + h) \cdot g(x_0) \cdot h} = - \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x_0) \cdot g(x_0)}}_{\rightarrow \frac{1}{g^2(x_0)}}.$$

$$\underbrace{g(x_0 + h) - g(x_0)}_{= g'(x_0)} = - \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \left(f(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)}\right)' \stackrel{(3)}{=} f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$8) \quad \boxed{f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9) \quad \boxed{f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

6.6 Izvod složene i inverzne funkcije

6.6.1 Izvod složene funkcije

$$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

STAV 2: Neka je $f \mathcal{D}x_0$, $f(x_0) = y_0$, $g \mathcal{D}y_0$. Tada je $(g \circ f) \mathcal{D}x_0$ i $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Neformalan dokaz:

$$g(f(x_0))' \frac{d(f(x_0+h) - g(f(x_0)))}{h} = \frac{\overbrace{g(f(x_0+h))}^{y_0+k} - \overbrace{g(f(x_0))}^{y_0}}{\underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}_{y_0+k}} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

...

Biramo $k := f(x_0+h) - f(x_0)$

$$\dots = \underbrace{\frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k}}_{= g'(y_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{= f'(x_0)} = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Zbog ponašanja funkcije f u okolini tačke x_0 , nekada ne smemo da napišemo $\frac{1}{f(x_0+h) - f(x_0)}$, na primer, ukoliko je funkcija konstantna u okolini tačke x_0 .

Formalan dokaz:

$$g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) = \boxed{A} \cdot h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

Ono što dobijemo na mestu A je zapravo $(g \circ f)'(x_0)$.

Neka je $k := f(x_0+h) - f(x_0)$ ($= f'(x_0) \cdot h + o(h)$), onda je $f(x_0+h) = y_0 + k$. S obzirom da je funkcije f neprekidna, važi $h \rightarrow 0 \implies k \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
& g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = \\
& = g(y_0 + k) - g(y_0) = \\
& = g'(y_0) \cdot k + \mathbf{o}(k) = \\
& = g'(f(x_0)) \cdot [f(x_0 + h) - f(x_0)] + \mathbf{o}(k) = \\
& = g'(f(x_0)) \cdot [f'(x_0) \cdot h - \underbrace{\mathbf{o}(h)}_{= \mathbf{o}(h)}] + \mathbf{o}(f'(x_0) \cdot h + \mathbf{o}(h)) = \\
& g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \cdot h + \mathbf{o}(h)
\end{aligned}$$

Dobili smo:

$$\begin{aligned}
& g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \cdot h + \mathbf{o}(h), \text{ odnosno:} \\
& (g \circ f)(x_0 + h) = g \circ f(x_0) + \boxed{g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)} \cdot h + \mathbf{o}(h), \quad h \rightarrow 0 \\
& \implies g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \text{ je izvod od } g \circ f
\end{aligned}$$

□.

Primer 3: Naći izvod funkcije $f(x) = a^x$.

$$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a$$

$$10) \boxed{f(x) = a^x, \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a}$$

Primer 4: Naći izvode funkcija:

$$a) f(x) = \sin \left(x^2 e^x - \frac{a^x}{\ln(\cos x)} \right)$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos \left(x^2 e^x - \frac{a^x}{\ln(\cos x)} \right) \cdot \left(x^2 e^x - \frac{a^x}{\ln(\cos x)} \right)' = \cos \left(x^2 e^x - \frac{a^x}{\ln(\cos x)} \right) \cdot \\
&\quad \left(2xe^x + x^2 e^x - \frac{a^x \ln a \ln(\cos x) - a^x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}}{(\ln(\cos x))^2} \right)
\end{aligned}$$

$$b) f(x) = x^x$$

$$f'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

$$c) h(x) = f(x)^{g(x)}$$

$$\begin{aligned}
h'(x) &= (f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \ln f(x)})' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \ln f(x))' = f(x)^{g(x)} \cdot \\
&\quad (g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x))
\end{aligned}$$

6.6.2 Izvod inverzne funkcije

STAV 3: Neka je $f: \mathcal{D}x_0 \rightarrow \mathcal{D}y_0$ takva da je inverzna funkciji f na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Neka je $g = f^{-1}$, $f(x_0) = y_0$ i $g \in \mathcal{D}y_0$ i $f'(x_0) \neq 0$. Tada je: $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ ili, preciznije $g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= x \quad /' \\
 g'(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}) \cdot f'(x_0) &= 1 \\
 \implies g'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)}
 \end{aligned}$$

□.

SEDMA NEDELJA

$$\left. \begin{array}{l} (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \implies g = f' \\ x = f(y) \\ y = g(x) \\ g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \end{array} \right\} \implies g'(y) = \frac{1}{f'(f(y))}$$

Posledica:

$$1. (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2. (\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3. (\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4. (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$5. \sqrt{x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Dokazi:

$$\begin{aligned} 1. \quad & f(x) = \arcsin(x) = y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x = \sin(y) = g(y), x \in [-1, 1] \\ & f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos(y)} \\ & \sin(y) = \sin(x) \\ & 1 - \sin^2(y) = 1 - x^2 \\ & \cos^2(y) = 1 - x^2 \\ & \cos(y) = +\sqrt{1-x^2}, + \text{ jer je } y \text{ ugao u prvom ili četvrtom kvadrantu, a } \cos \\ & \text{ je tu pozitivan} \end{aligned}$$

□.

$$\begin{aligned} 2. \quad & f(x) = \arccos(x) = y, x \in [-1, 1] \\ & \cos(y) = x = g(y), y \in [0, \pi] \\ & f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{-\sin(y)} \\ & 1 - \cos^2(y) = 1 - x^2 \\ & \sin^2(y) = 1 - x^2 \\ & \sin(y) = +\sqrt{1-x^2}, + \text{ jer je } y \text{ ugao u prvom ili drugom kvadrantu, a tu je } \sin \\ & \text{ pozitivan} \end{aligned}$$

□.

$$3. f(x) = \operatorname{arctg}(x) = y \iff x = \operatorname{tg}(y) = g(y), x \in \mathbf{R}, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
& / \text{-----} \\
& t = \operatorname{tg}(x) \\
& \cos^2(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(x) + 1} = \frac{1}{t^2 + 1} \\
& \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{t^2 + 1} = \frac{t^2}{t^2 + 1} \\
& \text{-----} / \\
& f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{x^2 + 1}
\end{aligned}$$

□.

$$\begin{aligned}
4. \quad & y = \ln(x) = f(x) \\
& x = e^y = g(y) \\
& f'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

□.

7 Osnovne teoreme diferencijalnog računa

7.1 Fermaova teorema

Definicija Tačka $x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f$, kažemo da je x_0 :

- lokalni maksimum ako $\exists \delta_1$ tako da je $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.
- lokalni minimum ako $\exists \delta_1$ tako da je $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.
- strogi maksimum ako $\exists \delta_1$ tako da je $f(x_0) > f(x) \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.
- strogi minimum ako $\exists \delta_1$ tako da je $f(x_0) < f(x) \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.

Lokalni ekstremum je lokalni maksimum ili lokalni minimum.

Napomena: Da bismo definisali lokalni ekstremum ne mora da $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f$, to nam treba za izvod. Može samo: $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap D_f \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$.

Teorema 7.1 (Ferma) $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f$

Neka je funkcija f diferencijabilna u $x_0 (\exists f'(x_0))$ i ima lokalni ekstremum u $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

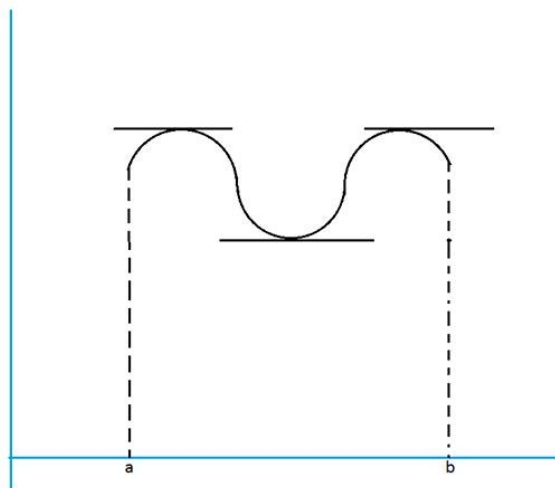
Dokaz: Pretpostavimo da je $x_0 = \max$ (za minimum se radi slično).

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \\
 f'_+(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \overbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}^{\leq 0} \leq 0 \\
 f'_-(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \overbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}^{\substack{\geq 0 \\ \geq 0}} \geq 0 \quad f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \\
 f'_+(x_0) \leq 0 \wedge f'_-(x_0) \geq 0 &\Rightarrow f'(x_0) = 0
 \end{aligned}$$

7.2 Tri teoreme o srednjoj vrednosti

7.2.1 Rolova teorema

Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ neprekidna i diferencijabilna na (a, b) , i $f(a) = f(b)$. Tada $\exists c \in (a, b)$ tako da je $f'(c) = 0$.



Dokaz: $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je neprekidna, na osnovu Vajerštrasove teoreme, funkcija dostiže svoj maksimum i minimum.

I slučaj: $x_{max}, x_{min} \in a, b$, to znači da je $f(a) = f(b) = x_{max} = x_{min}$. Ako ima istu vrednost za minimum i maksimum znači da je $f(x) = const \implies f'(x) = 0 \forall x$.

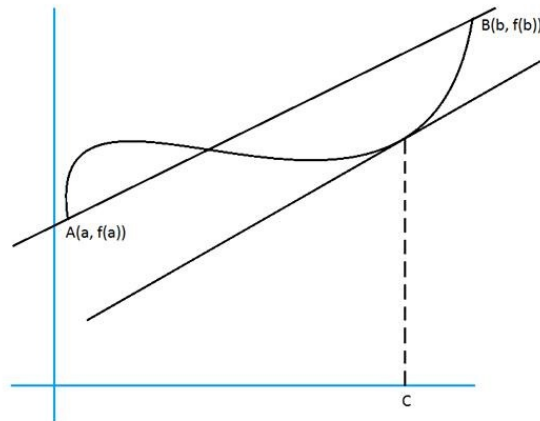
II slučaj: Ili x_{max} ili $x_{min} \in (a, b)$, na osnovu Fermaove teoreme $f'(x_{max}) = 0$ ili $f'(x_{min}) = 0$

□.

7.2.2 Lagranževa teorema

Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ neprekidna i diferencijabilna na (a, b) , i $f(a) = f(b)$. Tada $\exists c \in (a, b)$ tako da je $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Geometrijska interpretacija



$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ je koeficijent pravca prave kroz a i b . Postoji tačka c tako da tangenta kroz nju bude paralelna u odnosu na pravu kroz $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$

Fizička interpretacija

Postoji tačka u kojoj se srednja brzina ($\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$) poklapa sa trenutnom ($f'(c)$)

Dokaz:

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

Ideja: Nova funkcija koja će da „iskrivi” funkciju f , na nju primenjujemo Rolovu teoremu.

Treba da proverimo:

1. $F(x)$ je neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b) .

2. $F(a) = F(b)$

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a = \frac{(b - a) \cdot f(a) - a \cdot f(b) + a \cdot f(a)}{b - a} = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b - a}$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b = \frac{(b - a) \cdot f(b) - b \cdot f(b) + b \cdot f(a)}{b - a} = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b - a}$$

Pošto važi jednakost, po Rolovoj teoremi $\exists c$ tako da je $F'(c) = 0$

$$F'(x) := f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F'(c) = 0 \iff f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□.

Posledica: Funkcija je diferencijabilna na (a, b)

1. $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \implies f = \text{const}$
2. $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b) \implies f \nearrow$
 $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \implies f \text{ strogo } \nearrow$
3. $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b) \implies f \searrow$
 $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b) \implies f \text{ strogo } \searrow$

Dokaz: Direktno iz Lagranževe teoreme

$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \text{ za neko } c \in (x_1, x_2)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$$

1. $f'(x) = 0 \implies f(x_2) - f(x_1) = 0$
 $f(x_1) = f(x_2), \forall x_1, x_2 \in (a, b), f = \text{const}$
2. $f'(x) \geq 0, \forall x, f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$, što znači da funkcija raste.
3. $f'(x) \leq 0, \forall x, f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\leq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \leq 0 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$, što znači da funkcija opada.

□.

OPREZ!!!

Posledica (kao i Lagranževa teorema) se primenjuje na intervale.

(I) $f(x) = [x]$ na $(m, m+1), m \in \mathbf{Z}, f'(x) = 0$ na svakom posebnom intervalu je konstanta, ali ne i na celom $\mathbf{R}$.

(II) $f(x) = \frac{1}{x}, D_f = \mathbf{R} \setminus 0$ nije interval!

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ali funkcija f nije opadajuća na D_f jer $f(-1) = -1 < f(1) = 1$, ali funkcija f jeste opadajuća na $(-\infty, 0)$ i na $(0, \infty)$ nije tačno reći da opada svuda (može da se kaže da opada na svim intervalima).

7.2.3 Košijeva teorema (o srednjim vrednostima diferencijalnog računa)

Kriva se u ravni može zadati na tri načina:

1. eksplicitno (kao grafik), $y = f(x), x \in D_f$
2. implicitno (nekad jeste, nekad nije grafik):
 - (a) $x^2 + y^2 = 1$ - krug, nije grafik
 - (b) $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ - prava, nekad je grafik, a nekad nije
3. parametarski:

$$x = f(t), y = g(t), t \in T \subseteq \mathbf{R}$$

- npr. parametarska jednačina kruga $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$,
 $t \in [0, 2 \cdot \pi]$
- parametarska jednačina prave kroz tačku (x_0, y_0) sa vektorom pravca (a, b)
 $x = a \cdot t + x_0$
 $y = b \cdot t + y_0$

$$A_0(x(t_0), y(t_0)) = (f(t_0), g(t_0))$$

$$A_h(x(t_0 + h), y(t_0 + h)) = (f(t_0 + h), g(t_0 + h))$$

$$k_h = \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{x(t_0 + h) - x(t_0)} = \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{f(t_0 + h) - f(t_0)} = \frac{\frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h}}{\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}}$$

$$\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

-----/

Teorema 7.2.3: $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ neprekidna i diferencijabilna na (a, b) ,
 $f'(c) \neq 0 \forall c \in (a, b)$, tada $\exists c \in (a, b)$ tako da je $\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}$

Komentari:

1. $f(b) - f(a) \neq 0$, jer ako bi $f(a) = f(b)$ onda bi po Rolovoj teoremi
 $\exists c \in (a, b)$ tako da je $f'(c) = 0$
2. geometrijska interpretacija:
 $x = f(t)$, $y = g(t)$
 $\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = k$
 $A(f(a), g(a))$
 $B(f(b), g(b))$
3. Ako u Košijevoj teoremi uzmemo da je $f(x) = x$ dobićemo Lagranževu teoremu.

Dokaz:

$F(x) := (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x)$, funkcija F zadovoljava uslove Rolove teoreme:

1. Funkcija F je neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b) jer je nastala od funkcija f i g množenjem konstantom i oduzimanjem
2. $F(a) = (f(b) - f(a)) \cdot g(a) - (g(b) - g(a)) \cdot f(a) = \boxed{f(b) \cdot g(a) - g(b) \cdot f(a)}$
 $F(b) = (f(b) - f(a)) \cdot g(b) - (g(b) - g(a)) \cdot f(b) = \boxed{f(b) \cdot g(a) - g(b) \cdot f(a)}$

$F(a) = F(b)$, po Rolovoj teoremi sledi da $\exists c \in (a, b)$, tako da je $F'(c) = 0$
 $F'(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(x)$

$$\begin{aligned}
& F'(c) = 0 \\
& \Updownarrow \\
& \underbrace{(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(c)}_{\neq 0} / : \underbrace{f'(c) \cdot (f(b) - f(a))}_{\neq 0} \\
& \frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}
\end{aligned}$$

7.3 Lpitalova pravila

Teorema 7.3: Funkcije $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ su diferencijabilne.

Pretpostavimo da je $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \bar{\mathbf{R}}$. Pretpostavimo i da je $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$ na (a, b) .

Ako je:

1. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$, - oblik $\frac{0}{0}$
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$ - oblik $\frac{\infty}{\infty}$, dovoljno je da samo $g(x) \rightarrow \infty$

tada je $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Napomena:

1. važi i ako umesto a^+ piše a^- , dokaz ide isto
2. važi i ako umesto $\lim_{x \rightarrow a^+}$ stavimo $\lim_{x \rightarrow a}$
3. važi i za $a = \pm\infty$ jer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{/*uvodimo smenu } t = \frac{1}{x}, t \rightarrow 0^{+*}/$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t}) \cdot \frac{-1}{t^2}}{g'(\frac{1}{t}) \cdot \frac{-1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
 dokazali smo za $a \in \mathbf{R} \implies$ lpital važi za $a = +\infty$

Dokaz:

1. iz Košijeve teoreme

Pretpostavke:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= A \end{aligned} \right\} \implies? \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Ideja: $\frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{?}{=} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ po Košijevoj teoremi

Dodefinišemo funkcije $f(a) = g(a) = 0$, sad su one neprekidne na $[a, x]$ za $x \in (a, b)$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, c_x \rightarrow a^+, a < c_x \\
\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A
\end{aligned}$$

Primer:

$$\ln(x) \ll x^\alpha \ll a^x, x \rightarrow \infty$$

$$\ln(x) = o(x^\alpha), x^\alpha = o(a^x), x \rightarrow \infty$$

Dokaz:

$$1. \ln(x) = o(x), x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$2. \ln(x) = o(x^\alpha), x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0$$

$$3. x = o(a^x), x \rightarrow \infty, (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a^x \cdot \ln(a)} = 0$$

$$4. x^\alpha = o(a^x), x \rightarrow \infty, (a > 1), \alpha > 0$$

$$\begin{aligned} a^x &= t \\ x &= \log_a t = \frac{\ln(t)}{\ln(a)} \\ \frac{x^\alpha}{a^x} &= \frac{\left(\frac{\ln(t)}{\ln(a)}\right)^\alpha}{t} = \underbrace{\left(\frac{1}{\ln(a)}\right)^\alpha}_{c \geq 0} \cdot \frac{(\ln(t))^\alpha}{t} = c \cdot \left(\frac{\ln(t)}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha \rightarrow 0 \text{ kad } t \rightarrow \\ &+\infty \end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\begin{aligned} 6. \alpha > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha \cdot \ln(x)) &= 0 \text{ jer } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha \cdot \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = \\ &\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha \cdot x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot x^{\alpha+1} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\overbrace{\alpha}^{>0}} = -\frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

OSMA NEDELJA

7.4 Izvodi višeg reda

DEFINICIJA 1. Funkcija f je n puta diferencijabilna u tački x_0 ako postoji $f^{(n)}(x_0)$

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$$

Primer 1: Naći n -ti izvod sledećih funkcija:

$$i) (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$ii) (\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & n = 4k + 1 \\ -\sin x, & n = 4k + 2 \\ -\cos x, & n = 4k + 3 \\ \sin x, & n = 4k \end{cases}$$

$$iii) (\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\sin x, & n = 4k + 1 \\ -\cos x, & n = 4k + 2 \\ \sin x, & n = 4k + 3 \\ \cos x, & n = 4k \end{cases}$$

$$iv) (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\ln x)''' = (-x^{-2})' = \frac{2}{x^3}$$

$$(\ln x)^{(4)} = -\frac{3 \cdot 2}{x^4}$$

$$(\ln x)^{(5)} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{x^5}$$

$\vdots$

$$I(n) : (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}$$

Dokaz: (indukcijom po n)

$$(1) \text{ BAZA INDUKCIJE: } n = 1: (\ln x)' = \frac{1}{x} = \frac{(-1)^2 \cdot 0!}{x^1} \quad \checkmark$$

(2) INDUKTIVNI KORAK: Pretpostavimo da važi $I(n)$ (INDUKTIVNA HIPOTEZA). Treba dokazati da važi $I(n+1)$:

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{x^n} \quad /'$$

$$(\ln x)^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (x^{-n})' = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-n) \cdot (n-1)!}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+2} \cdot n!}{x^{n+1}}$$

□.

$$v) (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) \cdot x^{\alpha-n}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$(x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2}$$

$$(x^\alpha)''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot x^{\alpha-3}$$

$\vdots$

Dokaz se izvodi indukcijom po n .

7.4.1 Svojstva izvoda višeg reda

(1)

$$(f+g)^{(n)} = (f)^{(n)} + (g)^{(n)}$$

(2) $c = \text{const}$

$$(c \cdot f)^{(n)} = c \cdot (f)^{(n)}$$

(3) Lajbnicova formula:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$(f \cdot g)' = (f'g + fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(f \cdot g)''' = (f''g + 2f'g' + fg'')' = f'''g + f''g' + 2(f''g' + f'g'') + f'g'' + fg''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

$\vdots$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

uz dogovor: $f^{(0)} =_{\text{def}} f(x)$

Dokaz se izvodi indukcijom po n . (Dokaz ide isto kao u dokazu binomne formule)

8 Tejlorov polinom

Znamo da je $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$, $h \rightarrow 0$. Ako je $x = x_0 + h$ (jer je $h = x - x_0$), onda je:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0.$$

Oдавde zaključujemo da je funkcija $f(x)$ aproksimirana linearnom funkcijom do na tačnost o , odn. $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Podsetimo se: Kažemo da je funkcija f n puta diferencijabilna u tački x_0 ako postoji $f^{(n)}(x_0)$.

DEFINICIJA 1. Funkcija f je klase C^n ako je $f^{(n)}$ neprekidna.

Cilj nam je da pokažemo:

$f(x) \approx a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$. Postavlja se pitanje šta je a_k , $k = 0, \dots, n$?

Ako krenemo od polinoma $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, dobijamo: $a_0 = f(0)$. Diferenciramo li ovaj polinom, dobijamo:

$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + n \cdot a_nx^{n-1}$, odakle je $a_1 = f'(0)$. Daljim diferenciranjem dobijamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot x^2 + \dots + n(n-1)x^{n-2} \implies a_2 = \frac{f''(0)}{2} \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \cdot x + \dots + n(n-1)(n-2)x^{n-3} \implies a_3 = \frac{f'''(0)}{3 \cdot 2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_k + \square x + \square x^2 + \dots + \square x^{n-k} \implies \\ a_k &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \end{aligned}$$

Posmatrajmo polinom $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$. Potrebno je odrediti koeficijente a_k u ovom slučaju. To će zapravo biti isti koeficijenti iz gornjeg teksta, samo što će biti translirani za vrednost x_0 , odnosno:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ &\vdots \\ a_k &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \end{aligned}$$

DEFINICIJA 2. Neka je funkcija f n puta diferencijabilna u tački x . Tejlorov polinom funkcije f stepena n u okolini tačke x_0 se definiše:

$$P_n(x, x_0, f) =_{def} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Postavlja se pitanje koliko dobro ovaj polinom aproksimira funkciju f ?

DEFINICIJA 3. Ostatak Tejlorovog polinoma se definiše:

$$R_n(x, x_0, f) =_{def} f(x) - P_n(x, x_0, f), \quad tj.$$

$$f(x) = P_n(x, x_0, f) + R_n(x, x_0, f)$$

STAV 1: $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0, x_0, f)$; $k = 0, \dots, n$

Dokaz:

$$P_n^{(k)}(x, x_0, f) = k! \cdot \underbrace{a_k}_{\substack{\text{koef. Tejlorovog} \\ \text{polinoma} \\ \text{uz } (x - x_0)^k}} = k! \cdot \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = f^{(k)}(x_0)$$

□.

TEOREMA 7.4. Peanova teorema – Peanov oblik ostatka:
Ako je funkcija f klase C^n u okolini tačke x_0 . Tada je:

$$R_n(x, x_0, f) = o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \text{Hoćemo da } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x, x_0, f)}{(x - x_0)^n} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x, x_0, f)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x, x_0, f)}{(x - x_0)^n} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P'_n(x, x_0, f)}{n(x - x_0)^{n-1}} \stackrel{L}{=} \\ \dots &\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x, x_0, f)}{n!} = \frac{0}{n!} = 0 \end{aligned}$$

□.

8.1 Maklorenov polinom

DEFINICIJA 5. Ako je $x_0 = 0$, onda se $P_n(x, 0, f) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ naziva Maklorenov polinom. Tada je $R_n(x, 0, f) = o(x^n)$, $x \rightarrow 0$.

Maklorenov polinom za neke osnovne funkcije

Znamo:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + o(x), & x \rightarrow 0 \\ \sin x &= x + o(x), & x \rightarrow 0 \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), & x \rightarrow 0 \\ \ln(1+x) &= x + o(x), & x \rightarrow 0 \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha \cdot x + o(x), & x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$1) (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= 1, \forall n \in \mathbb{N} \\ P_n(x, 0, e^x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \end{aligned}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

$$2) \sin^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & n = 4k + 1 \\ -\sin x, & n = 4k + 2 \\ -\cos x, & n = 4k + 3 \\ \sin x, & n = 4k \end{cases}$$

$$(\sin x)^{(0)} = \begin{cases} 1, & n = 4k + 1 \\ 0, & n = 4k + 2 \\ -1x, & n = 4k + 3 \\ 0, & n = 4k \end{cases}$$

$$P_n(x, 0, \sin x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}), \quad x \rightarrow 0$$

$$3) (\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\sin x, & n = 4k + 1 \\ -\cos x, & n = 4k + 2 \\ \sin x, & n = 4k + 3 \\ \cos x, & n = 4k \end{cases}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} 0, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2 \\ 0, & n = 4k + 3 \\ 1, & n = 4k \end{cases}$$

$$P_n(x, 0, \cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^l \cdot x^{3k}}{(2k)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^l \cdot x^{3k}}{(2k)!} + o(x^{2k}), \quad x \rightarrow 0$$

Ako razvijemo Maklorenov polinom u okolini 0, onda će on za parne funkcije imati parne koeficijente, a za neparne funkcije, neparne koeficijente. Razlog toga je u sledećoj činjenici:

$$\begin{aligned} f \text{ parna} &\implies f' \text{ neparna} \\ f \text{ neparna} &\implies f' \text{ parna} \end{aligned}$$

Dokaz da ovo važi sledi iz definicije izvoda (samo treba staviti $-x$ umesto x).

Neka je funkcija φ neparna: $\varphi(x) = -\varphi(-x)$

Ako je $x = 0$:

$$\varphi(0) = -\varphi(-0) = -\varphi(0)$$

$$2\varphi(0) = 0 \implies \varphi(0) = 0$$

$$4) (\ln(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!$$

$$\text{Uz } x^k \text{ imamo } \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$P_n(x, 0, \ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{Znamo: } \forall n, k \in \mathbf{N} : \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0! =_{\text{def}} 1$$

DEFINICIJA 6. $\forall \alpha \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N} \setminus \{0\} : \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$

$$5) ((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)$$

$$\text{Uz } x^k \text{ je } \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

$$P_n(x, 0, (1+x)^\alpha) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

Primer 1: Razviti $\frac{1}{1+x}$ u okolini tačke $x_0 = 0$.

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$\binom{-1}{k} = \frac{-1(-1-1)(-1-2) \cdot \dots \cdot (-1-k+1)}{k!} = \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-k)}{k!} =$$

$$\frac{(-1)^k \cdot k!}{k!} = (-1)^k$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

TEOREMA 7.7. Lagranžev oblik ostatka

Ako funkcija f pripada klasi C^n (ima n izvoda na $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ koji su neprekidni) i $\exists f^{(n+1)}(x)$ na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tada je:

$$R_n(x, x_0, f) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

za neko $x, c \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Dokaz:

Uvodimo funkcije $F(t) := f(x) - P_n(x, t, f)$ i $G(t) := (x - t)^{n+1}$. Primetimo da je $F(x_0) = R_n(x, x_0, f)$. Primenimo Košijevu teoremu na F i G :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}, \text{ gde je } c \text{ između } x \text{ i } x_0. \text{ Sada ćemo da računamo svaku}$$

$$\text{od } F(x) - F(x_0), G(x) - G(x_0), F'(c), G'(c) \text{ i da izračunamo vrednosti ubacimo}$$

$$\text{u } \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}:$$

$$F(x) - F(x_0) = f(x) - P_n(x, x, f) - f(x) + P_n(x, x_0, f) = f(x) - f(x) - f(x) + P_n(x, x_0, f) = -R_n(x, x_0, f)$$

$$G(x) - G(x_0) = 0 - (x - x_0)^{n+1} = -(x - x_0)^{n+1}$$

$$F(t) = f(x) - P_n(x, t, f) = f(x) - (f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n)$$

$$F'(t) = -(f'(t) + f''(t)(x-t) - f'(t) + \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2 - \frac{f''(t)2(x-t)}{2} + \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 - \frac{f'''(t)3(x-t)^2}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} \cdot n \cdot (x-t)^{n-1}) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n+1}$$

$$G'(t) = -(n+1)(x-t)^n$$

Nakon ubacivanja, dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} &= \frac{F'(c)}{G'(c)} \\ \frac{-R_n(x, x_0, f)}{-(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{-n!(n+1)(x-c)^n} \\ R_n(x, x_0, f) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

□.

Zadatak 2: Naći $P_3(x, 0, \operatorname{tg} x)$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{=t}\right)^{-1}$$

$$o(t) = o(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)) = o(x^2)$$

$$(1+t)^{-1} = 1 - t + o(t)$$

$$(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^{-1} = 1 - (-\frac{x^2}{2} + o(x^2)) + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\operatorname{tg} x = \sin x \cdot \cos^{-1} x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Zadatak 3: Naći Maklorenov polinom funkcije $f(x) = \ln(\cos x)$ (ili, drugačije rečeno, naći $P_6(x, 0, \ln(\cos x))$).

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)}_{=t}\right) = \ln(1+t)$$

$$t = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(t)$$

$$o(t) = o(x^2) \text{ jer je } t \sim -\frac{x^2}{2}, \text{ tj. } t = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), x \rightarrow 0$$

$$t^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^2)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4), x \rightarrow 0 \text{ jer su svi ostali stepena } \geq 6, \text{ pa se oni svi nalaze u } o(x^4).$$

$$o(t^3) = o(x^6), x \rightarrow 0 \text{ jer}$$

$$t^3 = \left(-\frac{x^2}{2} + \dots\right)^3 = -\frac{x^6}{8} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \mathcal{O}(t^3) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^6)\right) + \frac{1}{2}(A) + \frac{1}{3}(B) + \mathcal{O}(x^6)$$

$$A = t^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^6)\right)^2 = \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$B = t^3 = t^2 \cdot t = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \mathcal{O}(x^6)\right) \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^6)\right) = -\frac{x^6}{8} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\ln(1+t) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^6) - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \mathcal{O}(x^6) - \frac{x^6}{24} + \mathcal{O}(x^6) + \mathcal{O}(x^6) =$$

$$-\frac{x^2}{2} + x^4 \cdot \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) + x^6 \cdot \left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24}\right) + \mathcal{O}(x^6)$$

Zadatak 4: Naći $P_3(x, 1, \sqrt{x})$.

$$\sqrt{x} = \sqrt{1+(x-1)} = \left| \begin{array}{l} \text{smena: } x-1=t \\ x \rightarrow 1 \iff t \rightarrow 0 \end{array} \right| (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 +$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} t^3 + \mathcal{O}(t^3) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{32}(x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^3), \quad x \rightarrow 1$$

Zadatak 5: Naći $P_6(x, 0, \ln \frac{\sin x}{x})$.

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \ln \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^7)}{x} = \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \mathcal{O}(x^6)\right)$$

$$t = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \mathcal{O}(t^3), \quad t \rightarrow 0$$

$$t^2 = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \mathcal{O}(x^6)\right)^2 = \frac{x^4}{36} - 2 \cdot \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^6) = \frac{x^4}{36} - \frac{x^6}{360} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$t^3 = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \mathcal{O}(x^6)\right) \cdot \left(\frac{x^4}{36} - \frac{x^6}{360} + \mathcal{O}(x^6)\right) = -\frac{x^6}{216} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\ln \frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \mathcal{O}(x^6) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{36} - \frac{x^6}{360} + \mathcal{O}(x^6)\right) + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^6}{216} + \mathcal{O}(x^6)\right), \quad x \rightarrow 0$$

Zadatak 6: Naći $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^{-x^2}}{\operatorname{tg}^2(2x)}$.

$$\operatorname{tg} t = t + \mathcal{O}(t), \quad x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg}(2x) = 2x + \mathcal{O}(x), \quad x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg}^2(2x) = (2x + \mathcal{O}(x))^2 = 4x^2 + \mathcal{O}(x^2), \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^{-x^2}}{\operatorname{tg}^2(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{9x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2) - (1 - x^2 + \mathcal{O}(x^2))}{4x^2 + \mathcal{O}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{9}{2} + 1 + \mathcal{O}(1)}{4 + \mathcal{O}(1)} =$$

$$-\frac{7}{8}$$

Zadatak 7: Naći $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{3x^3 + x^4}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{3x^3 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right)}{x^3(3+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)}{x^3(3+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(1)}{3+x} =$$

$$\frac{1}{18}$$

Zadatak 8: Naći a, b, c, d tako da važi: $\sqrt{1+x^2} - x = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$

a) $x \rightarrow +\infty$ b) $x \rightarrow -\infty$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Smena: $t = \frac{1}{x^2}$, $\mathcal{O}(t) = \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$

$$(1+t)^2 = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \mathcal{O}(t^2) = 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^4})$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{1+x^2} - x &= x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x = x\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^4})\right) - x = x + \\ &\underbrace{\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^3})}_{\mathcal{O}(\frac{1}{x^2})} - x = \frac{1}{2x} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^2}) \implies a = 0, b = 0, c = \frac{1}{2}, d = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{1+x^2} - x &= -x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x = -x\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^4})\right) - x = -x - \\ &\underbrace{\frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^3})}_{\mathcal{O}(\frac{1}{x^2})} - x = -2x - \frac{1}{2x} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^2}) \implies a = -2, b = 0, c = -\frac{1}{2}, d = 0 \end{aligned}$$

DEVETA NEDELJA

9 Kose asimptote

DEFINICIJA 1. $y = kx + n$ je kosa asimptota funkcije $f(x)$ ako je $f(x) = kx + n + o(1)$, $x \rightarrow \pm\infty$

U zadatku 8 iz prošle nedelje imali smo:

$$\sqrt{1+x^2} - x = \begin{cases} \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}), & x \rightarrow +\infty \\ -2x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}), & x \rightarrow -\infty \end{cases} = \begin{cases} 0 + o(1), & x \rightarrow +\infty \\ -2x + o(1), & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Odatle čitamo asimptote:

- 1) $x \rightarrow +\infty$: $y = 0$ ($k = n = 0$)
- 2) $x \rightarrow -\infty$: $y = -2x$ ($k = -2$, $n = 0$)

Ako uspemo da razvijemo više od oblika $f(x) = ax + b + o(1)$ (na primer: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o(\frac{1}{x})$), onda znamo da li je funkcija $f(x)$ iznad ili ispod asimptote.

Pre nego što ovo vidimo, koristićemo jedno svojstvo:

$$\operatorname{sgn}(\varphi + o(\varphi)) = \operatorname{sgn}(\varphi),$$

koje važi jer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi + o(\varphi)}{\varphi} = \lim_{x \rightarrow x_0} (1 + o(1)) = 1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}), \quad x \rightarrow -\infty \\ f(x) - (-2x) &= \underbrace{-\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})}_{>0, \quad x \rightarrow -\infty} \end{aligned}$$

Dakle:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o(\frac{1}{x}), \quad x \rightarrow \pm\infty :$$

1) imamo $y = ax + b$ asimptotu

2) za $f(x) - (ax + b) = \frac{c}{x} + o(\frac{1}{x})$ diskutujemo znak izraza $\frac{c}{x}$

Vrednosti k i n možemo dobiti i na sledeći način:

$$f(x) = kx + n + o(1) \quad / : x, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{n}{x} + o(\frac{1}{x}) \quad / \lim_{x \rightarrow \infty}, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}} \in \mathbf{R}$$

Kad znamo šta je k , onda:

$$f(x) - kx = n + o(1) \quad / \lim_{x \rightarrow \infty}, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)} \in \mathbf{R}$$

Terminologija asimptota:

Ako je $k = 0$ i $\exists n \in \mathbf{R}$, tada se $y = n$ naziva horizontalna asimptota.

Suštinski razlikujemo samo dve vrste asimptota: vertikalnu i kosu.

Vertikalna asimptota

Ako je $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$, pri čemu tačka $x_0 \notin D_f$, ali je na rubu domena (na primer: $(0, x_0)$ ili $(x_0, b) \subseteq D_f$), onda se $x = x_0$ naziva vertikalnom asimptotom.

10 Dovoljni uslovi lokalnih ekstrema

$$\left[\begin{array}{l} A \text{ je dovoljan uslov za } B \text{ ako } A \implies B. \\ A \text{ je potreban (neophodan) uslov za } B \text{ ako } B \implies A. \end{array} \right]$$

Potreban uslov za lokalne ekstreme, ako je f diferencijabilna je $f'(x_0) = 0$. Ako znamo da f ima ekstremum u x_0 i $f\mathcal{D}x_0$, onda $f(x_0) = 0$, ali:

Neka je $f(x) = 3x^3$. Odatle je $f'(x) = 6x^2$, pa je $f'(x) = 0 \iff 6x^2 = 0 \iff x = 0$, ali tačka $x_0 = 0$ nije ni maksimum ni minimum jer $f(x) - f(x_0) = x^3 - 0^3 = x^3$, a x^3 nije stalnog znaka ni u jednom okruženju $(-\delta, \delta)$.

Neka je $f(x) = x^2$. Odatle je $f'(x) = 2x$, pa je $f'(x) = 0 \iff x = 0$. $f(x) - f(x_0) = x^2 - 0^2 = x^2 \geq 0$, pa je $x_0 = 0$ minimum.

DEFINICIJA 1. Tačka x_0 se zove *stacionarna (singularna, kritična) tačka* ako je $f'(x_0) = 0$.

STAV: Ako je f dva puta neprekidno diferencijabilna ($f \in C^2$) i x_0 je stacionarna tačka i $f''(x_0) \neq 0$, onda je x_0 ekstremum, i to:

- 1) MAKSIMUM, ako je $f''(x_0) < 0$
- 2) MINIMUM, ako je $f''(x_0) > 0$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \text{Iz } P_2(x, x_0, f) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} \\ f(x) &= f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x - x_0)}^0 + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + o((x - x_0)^2) \\ f(x) - f(x_0) &= \frac{f''(x_0)}{2} \underbrace{(x - x_0)^2}_{\geq 0} + o((x - x_0)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad f''(x_0) < 0 &\implies \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \leq 0 \\ \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) &\leq 0, \quad x \rightarrow x_0 \\ f(x) - f(x_0) &\leq 0, \quad x \rightarrow x_0 \\ f(x) &\leq f(x_0), \quad x \rightarrow x_0 \implies x_0 \text{ je maksimum} \end{aligned}$$

□.

(2) slično kao pod (1)

□.

Diskusija: Šta ako je $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, a $f'''(x_0) \neq 0$?

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x - x_0)}^0 + \cancel{\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}^0 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \\ &\quad o((x - x_0)^3), \quad x \rightarrow x_0 \\ f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3), \quad x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

$$f'''(x_0) > 0 : \quad \text{nema ekstrema jer za:}$$

$$x > x_0 : f(x) - f(x_0) > 0$$

$$x < x_0 : f(x) - f(x_0) < 0$$

Isto je za $f'''(x_0) < 0$.

Zaključak: Ako je $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, a $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, onda je:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$$

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{\neq 0}(x - x_0)^k$$

(1) Za $k = 2l$, $l \in \mathbf{N}$: jeste ekstremum, i to:

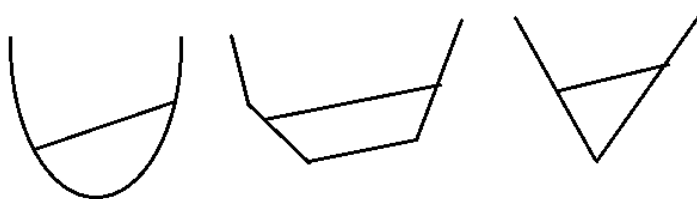
- $f^{(k)}(x_0) > 0 \implies \text{minimum}$
- $f^{(k)}(x_0) < 0 \implies \text{maximum}$

(2) Za $k = 2l + 1$, $l \in \mathbf{N}$: nije ekstremum

11 Konveksnost

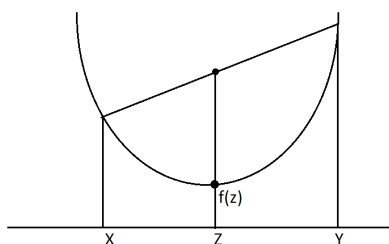
DEFINICIJA 1. Neka je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, gde je I interval. Kažemo da je funkcija f konveksna na I ako je:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$



Slika 11.1. Primeri konveksnih funkcija (grafički)

Konveksni grafici su svi oni kod kojih je svaka sečica grafika iznad tog grafika:



Slika 11.2. Grafički prikaz definicije konveksnosti grafika

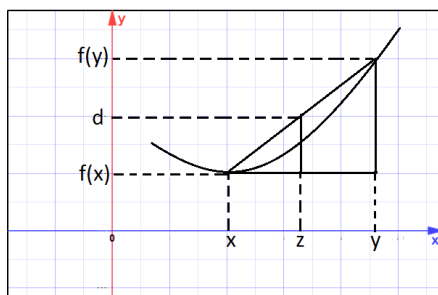
(1) Konveksnu kombinaciju nazivamo izraz $(1 - \lambda)x + \lambda y$ za $x < y$, $\lambda \in [0, 1]$.

Neka je z tačka na duži xy koja deli tu duž na sledeći način: $xz = \lambda xy$, odnosno, $a = \lambda b$. Tada je:

$$z - x = \lambda(y - x)$$

$$z = x + \lambda(y - x) = (1 - \lambda)x + \lambda y$$

Posmatrajmo sada sliku 11.3:



Slika 11.3.

Iz sličnosti trouglova, d deli duž $f(x)f(y)$ u istom odnosu u kojem z deli duž xy .

$$\implies \boxed{d = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)}.$$

Da je $d \geq f(z)$ znači „sečica je iznad grafika”.

$$\begin{aligned} d &\geq f(z) \\ (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) &\geq f((1 - \lambda)x + \lambda y) \end{aligned}$$

Vežbanje za domaći:

Dokazati da je sečica iznad grafika na sledeći način:

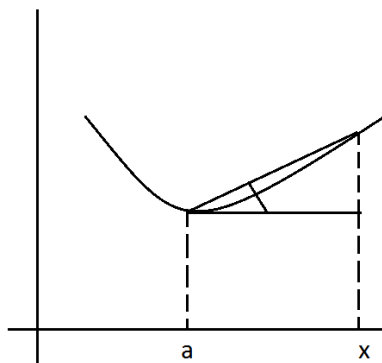
- napisati jednačinu prave kroz tačke $A(x, f(x))$ i $B(y, f(y))$ i dobiti $g(x) = kx + n$
- izračunati $g(z)$, $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$
- uveriti se da je $g(z) \geq f(z)$

Sada ćemo se baviti uspostavljanjem sledeće veze:

$$\begin{array}{ccccc} f \text{ je konveksna} & & f'' \geq 0 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{sečica} & \leftrightarrow \text{ nagib } & \leftrightarrow f' \text{ raste} \end{array}$$

Funkcija nagiba kroz a (pogledati sliku 11.4.) je

$$\nu_a(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \operatorname{tg} \alpha$$



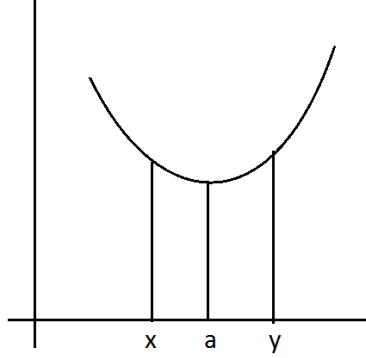
Slika 11.4. Funkcija nagiba

STAV 1: Za svake tri tačke u poretку $x < a < y$ važi:

$$f \text{ je konveksna} \iff \nu_a(x) \leq \nu_a(y)$$

Dokaz:

Pretpostavimo da jeste konveksna. To znači da, ako je $a = (1 - \lambda)x + \lambda y$, onda je $f(a) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.



Slika 11.5.

Dokaz za ($\implies$):

$$a = (1 - \lambda)x + \lambda y$$

$$a - x = \lambda(y - x)$$

$\lambda = \frac{a - x}{y - x}$. Ubacivanjem novodobijenog λ u definiciju konveksnosti, dobijamo:

$$f(a) \leq \left(1 - \frac{a - x}{y - x}\right) f(x) + \frac{a - x}{y - x} f(y) \quad / \cdot (y - x), \quad y - x > 0$$

$$(y - x)f(a) \leq (y - x - a + x)f(x) - (a - x)f(y)$$

$$(y - x)f(a) \leq (y - a)f(x) + (a - x)f(y)$$

$$(y - a)f(a) - (x - a)f(a) \leq (y - a)f(x) + (a - x)f(y)$$

$$(y - a)f(a) - (y - a)f(x) \leq (x - a)f(a) - (x - a)f(y)$$

$$(y - a)(f(a) - f(x)) \leq (x - a)(f(a) - f(y)) \quad / : (x - a), \quad x - a \leq 0$$

$$\frac{(y - a)(f(a) - f(x))}{x - a} \geq f(a) - f(y) \quad / : (y - a), \quad y - a \geq 0$$

$$\frac{f(a) - f(x)}{x - a} \geq \frac{f(a) - f(y)}{y - a} \quad / \cdot (-1)$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

$$\implies \nu_a(x) \leq \nu_a(y)$$

□.

Dokaz za ($\impliedby$):

$$\nu_a(x) \leq \nu_a(y)$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Potpuno isto kao u ($\implies$), samo u suprotnom smeru.

□.

STAV 2: Ako je funkcija f diferencijabilna na (a, b) , onda:

$$f \text{ je konveksna} \iff f' \nearrow$$

Dokaz za ($\implies$):

Pretpostavimo da je funkcija f konveksna. Neka je $x_1 < x_2$ (hoćemo da je $f(x_1) < f(x_2)$). Uzmimo $x \in (x_1, x_2)$, odnosno, važi da je $x_1 < x < x_2$. Iz STAVA 1, za tačke $x_1 < x < x_2$ važi:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \quad (*)$$

U (*), kada $x \rightarrow x_1$:

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = k$$

U (*), kada $x \rightarrow x_2$:

$$\lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

$$\implies f'(x_1) \leq k \leq f'(x_2)$$

□.

Dokaz za ($\Longleftarrow$):

Neka f' raste. Imamo tačke $x < a < y$. Hoćemo da je $\nu_a(x) \leq \nu_a(y)$.

$$\nu_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{\text{Lagranževa}} f'(\xi), \quad \xi \in (x, a) \text{ („ksi“)}$$

$$\nu_a(y) = \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \xrightarrow{\text{Lagranževa}} f'(\eta), \quad \eta \in (a, y) \text{ („eta“)}$$

Imamo: $x < \xi < a < \eta < y$, odn. $\xi < \eta \implies f'(\xi) \leq f'(\eta) \Longleftrightarrow \nu_a(x) \leq \nu_a(y)$

Na osnovu STAVA 1 $\implies f$ je konveksna.

□.

STAV 3: Neka $\exists f''$. Tada f je konveksna $\Longleftrightarrow f'' \geq 0$.

Dokaz:

Iz STAVA 2 imamo:

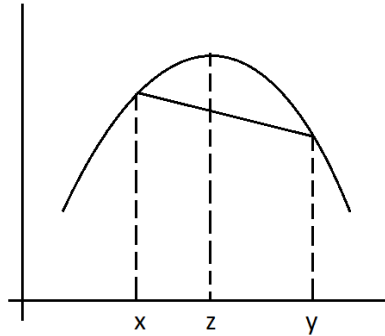
f je konveksna $\Longleftrightarrow f' \nearrow \Longleftrightarrow (f')' \geq 0$, to jest, $f'' \geq 0$

□.

11.1 Konkavnost

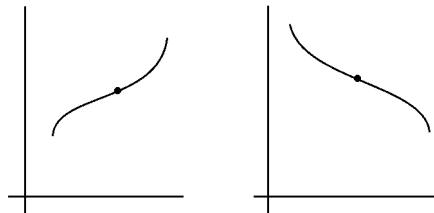
Terminologija konkavnosti:

- f je konkavna akko_{def} $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$



Slika 11.6.

- f je konkavna akko $-f$ je konveksna:
 STAV 1: f je konkavna $\iff \nu_a$ opada
 STAV 2: f je konkavna $\iff f' \searrow$
 STAV 3: f je konkavna $\iff f'' < 0$
- Tačka x_0 se naziva prevojna tačka funkcije f ako je f konveksna/konkavna na nekom (a, x_0) , a konkavna/konveksna na (x_0, b) .



Slika 11.7. Prevojne tačke

Često su prevojne tačke one u kojima je $f'' = 0$.

DESETA NEDELJA

12 Ispitivanje funkcija i skiciranje grafika

1. Domen (D_f):

- deljenje nulom
- $\sqrt{A(x)}$, $\sqrt[4]{A(x)}$, $\sqrt[6]{A(x)}$, ... $A(x) \geq 0$
 - neparni koreni su definisani na $\mathbf{R}$
- $\ln(x)$, $\log_a A(x)$; $A(x) > 0$
- $\arcsin A(x)$, $\arccos A(x)$; $-1 \leq A(x) \leq 1$
 - $\arctg$, arcctg su definisani na $\mathbf{R}$

2. Parnost:

- parna: $f(-x) = f(x)$ simetrična u odnosu na y -osu
- neparna: $f(-x) = -f(x)$ simetrična u odnosu na koordinatni početak
- „ni-ni”

3. Periodičnost: $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in D_f$

- razmatraćemo samo za trigonometrijske

4. Znak i nule:

- $f(x) > 0 \iff x \in \dots$
- $f(x) < 0 \iff x \in \dots$
- $f(x) = 0 \iff x \in \dots$

5. Nепrekidnost i diferencijabilnost:

- neprekidne su sve elementarne
- nediferencijabilne mogu da budu:
 - o apsolutne vrednosti
 - o $\sqrt{\quad}$, x^a za $a < 1$
 - o $\arcsin A(x)$, $\arccos A(x)$ za $A(x) = \pm 1$

Napomena:

$f(x) = \arcsin(x)$ je definisana na intervalu $[-1, 1]$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, a pitanje je da li je neprekidna i diferencijabilna u tačkama $x = \pm 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

Ako $\exists \lim_{x \rightarrow 1^-} \underbrace{f'(x)}_{=A} \in \mathbf{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A$$

Ovo važi po Lagranžovoj teoremi o srednjim vrednostima

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(\xi) \cdot (x_0 + h - x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f'(\xi) =$$

$$\xi \in (x_0, x_0 + h), \xi \rightarrow x_0 \text{ kada } h \rightarrow 0^+$$

6. Interval monotonosti i ekstremne vrednosti:

- $f' \geq 0$ na $(a, b) \iff f \nearrow (a, b)$
- $f' \leq 0$ na $(a, b) \iff f \searrow (a, b)$

• kandidati za ekstremne vrednosti su:

- $f' = 0$
- tačke gde funkcija nije diferencijabilna (šiljci)

7. Konveksnost (znak drugog izvoda) i prevojne tačke ($f'' = 0$)

- $f'' \geq 0$ na $(a, b) \iff f$ je konveksna na (a, b)
- $f'' \leq 0$ na $(a, b) \iff f$ je konkavna na (a, b)

8. Asimptote:

- vertikalna - to je prava $x = x_0$ ako je $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$
 x_0 u kojoj $f(x)$ nije definisana ali jeste na kraju domena npr. $(a, x_0) \subseteq D_f$, $(x_0, b) \subseteq D_f$
- kosa - to je prava oblika $y = k \cdot x + n$
 $f(x) = k \cdot x + n + o(x)$, $x \rightarrow +\infty$ ili $x \rightarrow -\infty \iff \exists k, n \in \mathbf{R}$
 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x)$
Ako možemo da predstavimo u obliku:
 $f(x) = \underbrace{a \cdot x + b}_{\text{asimptota}} + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow \infty$
 $f(x) - a \cdot x - b = \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow \infty$
- horizontalna - specijalan slučaj kose asimptote, kad je $k = 0$

Zadaci:

(1) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

1) Domen (i asimptote): $D_f = \mathbf{R} \implies$ nema vertikalnih asimptota. Kose:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{x} = \pm\infty \implies \text{nema kosih asimptota}$$

2) Parnost:

Pokažimo na kontraprimeru da je funkcija f „ni-ni“:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 - 4 + 10 = 7 \\ f(-1) = 1 + 4 + 10 = 15 \end{array} \right\} \implies f \text{ je „ni-ni“}.$$

3) Periodičnost:

- ima najviše 4 nule, a sa periodičnosti bi trebalo da ima beskonačno mnogo nula ili da nema nijednu

4) Znak i nule: (pogledati monotonost i ekstremne vrednosti)

5) Diferencijabilnost i neprekidnost:

Diferencijabilna je sigurno, a iz toga da je diferencijabilna sledi da je neprekidna na $\mathbf{R}$.

6) Monotonost i ekstremne vrednosti:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$, pa pošto je $4x^2 \geq 0, \forall x \in D_f$, sledi:
 $\text{sgn}(f') = \text{sgn}(x - 3)$.
 $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ili $x = 3$

	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Test drugog izvoda:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$

$$f'''(x) = 24x - 24$$

U $x = 0 : f''(x) = 0 \wedge f'''(x) = -24 \implies x = 0$ nije ni maksimum ni minimum

U $x = 3 : f''(x) = 36 \wedge f'''(x) = 48 \implies x = 3$ je minimum

Odavde možemo da zaključimo o znaku funkcije i nulama:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = -17 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$$

$(K - B) \implies$ postoji nula u intervalu $(-\infty, 3)$ i u $(3, +\infty)$

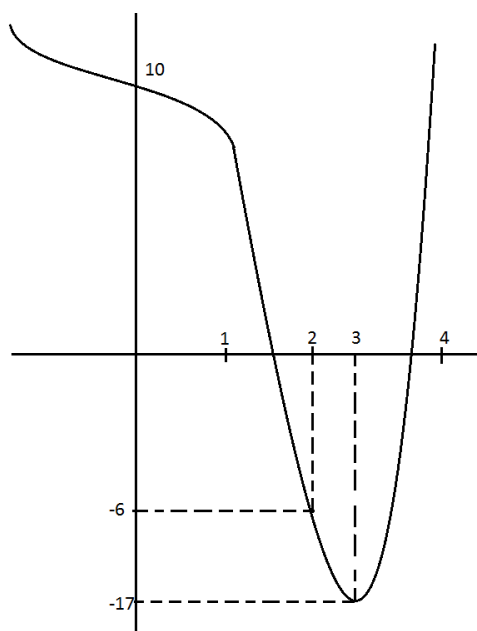
(monotonost $f(x)$) $\implies$ postoji tačno jedna nula u intervalu $(-\infty, 3)$, odnosno, u $(3, +\infty)$

7) Konkavnost i prevojne tačke:

$$f''(x) = 12x(x - 2)$$

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	$-$	$+$	$+$	
$x - 2$	$-$	$-$	$+$	
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	konveksna	konkavna	konveksna	

$\implies x = 0$ i $x = 2$ su prevojne tačke



Slika 12.1. Grafički prikaz funkcije $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

(2) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

1) Domen i asimptote: $D_f = \mathbf{R}$

$x^2 + 1 > 0 \implies$ nema vertikalnih asimptota

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-1} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \implies a = 0, b = 1, c = 2$$

zaključak:

1) $y = 1$ je horizontalna asimptota kad $x \rightarrow \pm\infty$

2) $x \rightarrow +\infty : f > 1$

3) $x \rightarrow -\infty : f < 1$

2) Parnost:

Nije parna jer je za $x \rightarrow +\infty$ funkcija f iznad H.A, a za $x \rightarrow -\infty$ ispod H.A.

Nije neparna jer je i za $x \rightarrow +\infty$ i $x \rightarrow -\infty$ asimptota $y = 1$ (inače bi bilo za $x \rightarrow -\infty : y = -1$)

3) Znak i nule:

$$f(x) \geq 0 : \forall x \in D_f$$

$$f(x) = 0 \iff x = -1$$

4) Periodičnost: Nije periodična (ima tačno 1 nulu)

5) Diferencijabilnost i neprekidnost: Oba su ispunjena jer je sastavljena od diferencijabilnih funkcija, pa nema šiljaka.

6) Monotonost i ekstremne vrednosti:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+1) - (x+1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(x^2+1-x^2-x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	$+$	$-$	
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

$x = -1$ je minimum

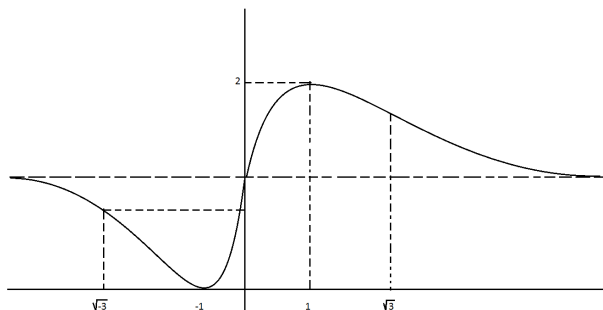
$x = 1$ je maksimum

7) Konkavnost i prevojne tačke:

$$f''(x) = \frac{2(-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}(-x^2-1-2(1-x^2)) = \frac{4}{(x^2+1)^3} \cdot x \cdot (x^2-3)$$

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
x^2-3	$+$	$-$	$-$	$+$	
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

$x = 0, x = \pm\sqrt{3}$ su prevojne tačke



Slika 12.2. Grafički prikaz funkcije $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

(3) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$.

1) Domen i asimptote: $D_f = \mathbf{R} \implies$ nema vertikalnih asimptota

Kose asimptote:

$$x \rightarrow \pm\infty : \frac{f(x)}{x} = \frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{x} = \left(\frac{x^2-1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \infty \implies \text{nema kosih asimptota}$$

2) Parnost:

$$f(-x) = ((-x)^2-1)^{\frac{2}{3}} = (x^2-1)^{\frac{2}{3}} = f(x) \implies \text{parna funkcija}$$

3) Znak i nule:

$$f(x) \geq 0 : \forall x \text{ jer je } f(x) = (\sqrt[3]{x^2-1})^2 \geq 0$$

$$f(x) = 0 \iff x = \pm 1$$

4) Periodičnost: Nije periodična jer ima tačno 2 nule

5) Diferencijabilnost i neprekidnost: Neprekidna je zbog kompozicije neprekidnih funkcija.

Funkcija $\varphi : x \rightarrow x^{\frac{2}{3}}$ nije diferencijabilna u 0. U našem slučaju su problem tačke $x = \pm 1$ jer je tada sve pod korenom jednako 0:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}, \text{ a ovo nije dobro na } \mathbf{R}:$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{3} \cdot \frac{x^1}{\sqrt[3]{x^2-1}^{0^+}} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{3} \cdot \frac{x^1}{\sqrt[3]{x^2-1}^{0^-}} = -\infty$$

Zbog parnosti, isto važi i za tačku $x_0 = -1$.

6) Monotonost i ekstremne vrednosti:

$$x \neq \pm 1 : f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
$\sqrt[3]{x^2-1}$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$x = 0$ je maksimum

$x = \pm 1$ su minimumi

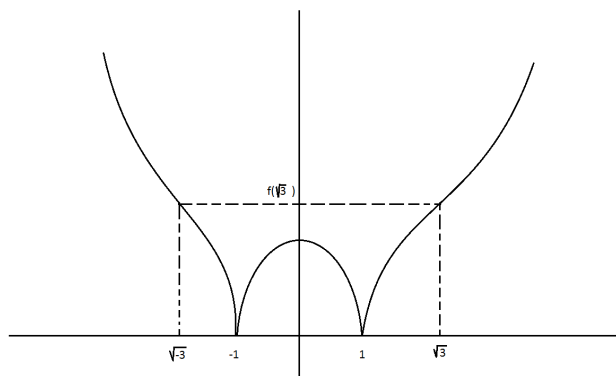
7) Konveksnost i prevojne tačke:

$$f''(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}} - x \cdot \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2-1-\frac{2}{3}x^2}{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} =$$

$$\frac{4}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} \cdot (\frac{1}{3}x^2-1) = \underbrace{\frac{4}{9(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}}_{\geq 0} \cdot (x^2-3)$$

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2-3	$+$	$-$	$+$	
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

$x = \pm\sqrt{3}$ su prevojne tačke



Slika 12.3. Grafički prikaz funkcije $f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$

(4) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}(x^2 - 7)$.

1) Domen i asimptote: $D_f = \mathbf{R} \Rightarrow$ nema vertikalnih asimptota
Kose asimptote:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 7}{x^{\frac{2}{3}}} = \pm\infty \Rightarrow \text{nema kosih asimptota}$$

2) Parnost:

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x}((-x)^2 - 7) = -\sqrt[3]{x}(x^2 - 7) = -f(x) \Rightarrow \text{neparna funkcija}$$

3) Znak i nule:

$$f(x) = 0 \iff x = 0, x = \pm\sqrt{7}$$

	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	0	$\sqrt{7}$	$+\infty$
x	-	-	+	+	
$x^2 - 7$	+	-	-	+	
$f(x)$	-	+	-	+	

5) Diferencijabilnost i neprekidnost: Neprekidna je, a možda nije diferencijabilna u $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x^2 - 7) + \sqrt[3]{x} \cdot 2x$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 - 7) + \sqrt[3]{x} \cdot 2x \right) = -\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 - 7) + \sqrt[3]{x} \cdot 2x \right) = -\infty$$

6) Monotonost i ekstremne vrednosti:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 - 7 + 3x \cdot 2x) = \frac{7x^{-\frac{2}{3}}}{3}(x^2 - 1)$$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	-	+	
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$x = -1$ je maksimum

$x = 1$ je minimum

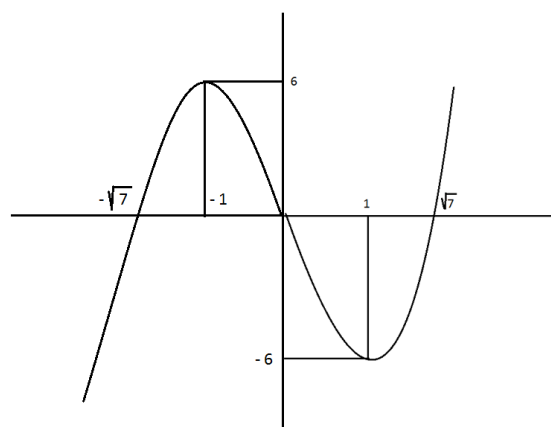
7) Konkavnost i prevojne tačke:

$$f''(x) = \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}(x^2 - 1) + \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x\right) = \frac{14}{9}x^{-\frac{5}{3}}(-(x^2 - 1) + 7x^2) = \frac{14}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}} \cdot \underbrace{(6x^2 + 1)}_{\geq 0}$$

$$x^{-\frac{5}{3}} > 0 : x > 0 \Rightarrow f \cup$$

$$x^{-\frac{5}{3}} < 0 : x < 0 \Rightarrow f \cap$$

$x = 0$ je prevojna tačka



Slika 12.4. Grafički prikaz funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}(x^2 - 7)$

JEDANAESTA NEDELJA

(1) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $f(x) = |x+2| \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

1) Domen: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

2) Asimptote:

a) Vertikalna asimptota: Kandidat za vertikalnu asimptotu je $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x+2| \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x+2|^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$\Rightarrow x = 0$ je vertikalna asimptota sa leve strane

b) Kosa asimptota:

$$e^{-\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{l} \text{smena: } t = -\frac{1}{x} \\ x \rightarrow +\infty \iff t \rightarrow 0 \end{array} \right| = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$x \rightarrow -\infty$:

$$|x+2|e^{-\frac{1}{x}} = (-x-2)\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -x-1 + \underbrace{\frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{<0} < -x-1$$

$\Rightarrow y = -x-1$ je kosa asimptota kad $x \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow +\infty$:

$$|x+2|e^{-\frac{1}{x}} = (x+2)\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x+1 - \underbrace{\frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{<0} < x+1$$

$\Rightarrow y = x+1$ je kosa asimptota kad $x \rightarrow +\infty$

3) Znak i nule:

$$e^{-\frac{1}{x}} > 0 : \forall x \in D_f$$

$$|x+2| \geq 0 : \forall x \in D_f$$

$$|x+2| = 0 \iff x = -2 \in D_f$$

4) Nепrekidnost i diferencijabilnost:

- neprekidna je na D_f

- možda nije diferencijabilna u $x_0 = -2$

STAV: $(|x|)' = \text{sgn}(x)$, $x \neq 0$

$$f'(x) = (|x+2|e^{-\frac{1}{x}})' = \text{sgn}(x+2)e^{-\frac{1}{x}} + |x+2|e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} e^{-\frac{1}{x}} \left(\text{sgn}(x+2) + \frac{|x+2|}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^-} e^{-\frac{1}{x}} (-1) = -\sqrt{e}$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{|x+2|}{x^2} \right) = \sqrt{e}$$

$f'_-(x_0) \neq f'_+(x) \Rightarrow$ nije diferencijabilna u $x_0 = -2$

5) Monotonost i ekstremne vrednosti:

$$\operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn}\left(\underbrace{\operatorname{sgn}(x+2) + \frac{|x+2|}{x^2}}_{=A}\right) \text{ jer je } e^{-\frac{1}{x}} > 0$$

$$x > -2 : A = 1 + \frac{x+2}{x^2} = \frac{x^2+x+2}{x^2} > 0 \implies f(x) \nearrow \forall x \in (-2, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$x < -2 : A = -1 - \frac{x+2}{x^2} = -\frac{x^2+x+2}{x^2} < 0 \implies f(x) \searrow \forall x \in (-\infty, -2)$$

$x = -2$ je lokalni minimum

6) Konveksnost i prevojne tačke:

$$f''(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}}\left(\operatorname{sgn}(x+2) + \frac{|x+2|}{x^2}\right)\right)' = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \left(\operatorname{sgn}(x+2) + \frac{|x+2|}{x^2}\right) +$$

$$e^{-\frac{1}{x}} \left(0 + \frac{\operatorname{sgn}(x+2)x^2 - 2x|x+2|}{x^4}\right) = \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{\geq 0} \left(\frac{\overbrace{x^2\operatorname{sgn}(x+2) + |x+2| + \operatorname{sgn}(x+2)x^2 - 2x|x+2|}^{=B}}{x^4}\right)$$

$$B = 2x^2\operatorname{sgn}(x+2) + |x+2|(1-2x)$$

$$x < -2 : B = -2x^2 - (x+2)(1-2x) = -2x^2 - (x-2x^2+2-4x) = -3\underbrace{\left(x - \frac{2}{3}\right)}_{<0} \implies$$

$$f''(x) < 0 : \forall x \in (-\infty, -2)$$

$$x > -2 : B = 2x^2 + (x+2)(1-2x) = 2x^2 + x - 2x^2 + 2 - 4x = 3\left(\frac{2}{3} - x\right) \implies$$

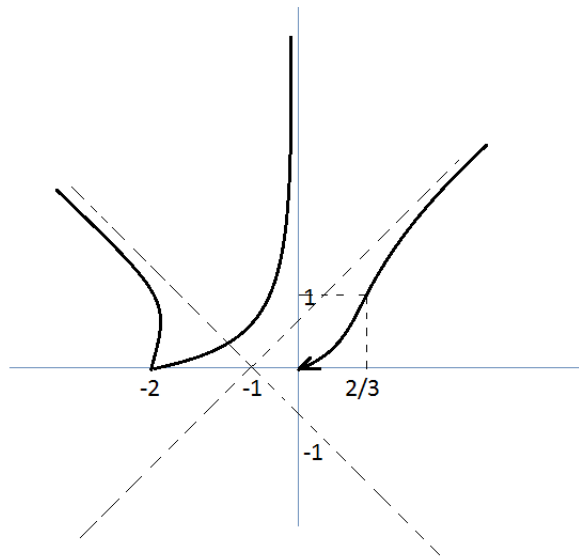
$$f''(x) > 0 : \forall x < \frac{2}{3} \wedge f''(x) < 0 : \forall x > \frac{2}{3}$$

Sveukupno:

$$f(x) \cup : \forall x \in (-2, 0) \wedge f(x) \cup : \forall x \in (0, \frac{2}{3})$$

$$f(x) \cap : \forall x \in (\frac{2}{3}, +\infty)$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ je prevojna tačka}$$



Slika 12.5. Grafički prikaz funkcije $f(x) = |x+2| \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

(2) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}}$.

1) Domen i asimptote:

koren: $2x^2 + 4x + 4 \geq 0 \iff x^2 + 2x + 2 \geq 0 \iff (x+1)^2 + 1 \geq 0 : \forall x \in \mathbf{R}$

razlomak: $x^2 + 4x + 4 \neq 0 : \forall x \in \mathbf{R}$

arcsin:

$$-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}} \leq 1 \quad /^2$$

$$\frac{x^2}{2x^2 + 4x + 4} \leq 1$$

$$x^2 \leq 2x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(x+2)^2 \geq 0 : \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\implies D_f = \mathbf{R} \implies \text{nema vertikalnih asimptota}$$

Kose asimptote:

$$x \rightarrow +\infty : f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$x \rightarrow -\infty : f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}} = \arcsin \frac{1}{\frac{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}}{-\sqrt{x^2}}} = \arcsin \frac{-1}{\sqrt{2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}} =$$

$$\arcsin -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

2) Parnost: funkcija je „ni-ni” jer:

$$f(-1) = \arcsin -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$f(1) = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} \neq -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4}$$

3) Znak i nule:

$$\arcsin a(x) > 0 \iff a(x) > 0$$

$$\arcsin a(x) < 0 \iff a(x) < 0$$

$$\arcsin a(x) = 0 \iff a(x) = 0$$

$$a(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}} \implies \operatorname{sgn}(a(x)) = \operatorname{sgn}(x) \implies$$

$$f(x) > 0 : x > 0$$

$$f(x) < 0 : x < 0$$

$$f(x) = 0 : x = 0$$

4) Diferencijabilnost i neprekidnost:

- neprekidna je kao kompozicija neprekidnih funkcija

- $\arcsin t$ nije definisana u $t = \pm 1$ jer $(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$:

Problematične tačke su:

$$\frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}} = \pm 1 \quad /^2$$

$$\frac{x^2}{2x^2 + 4x + 4} = 1$$

$$x^2 = 2x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$x = -2$$

$$\begin{aligned} x \neq -2 : f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2x^2 + 4x + 4}}} \left(\frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}} \right)' = \sqrt{\frac{2x^2 + 4x + 4}{2x^2 + 4x + 4 - x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2x^2 + 4x + 4} - \frac{x(4x+4)}{2\sqrt{2x^2 + 4x + 4}}}{2x^2 + 4x + 4} = \frac{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}}{\sqrt{(x+2)^2}} \cdot \frac{2x^2 + 4x + 4 - 2x(x+1)}{(2x^2 + 4x + 4)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{x+2}{|x+2|(x^2 + 2x + 2)} = \operatorname{sgn}(x+2) \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \end{aligned}$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \underbrace{\operatorname{sgn}(x+2)}_{=-1} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = -\frac{1}{2}$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \underbrace{\operatorname{sgn}(x+2)}_{=1} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{2}$$

$$f'_-(-2) \neq f'_+(-2) \implies \text{funkcija nije diferencijabilna u } x = -2$$

5) Monotonost i ekstremne vrednosti:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x+2) \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \implies \operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn}(x+2)$$

$$f \nearrow : \forall x \in (-2, +\infty)$$

$$f \searrow : \forall x \in (-\infty, -2)$$

$x = -2$ je minimum

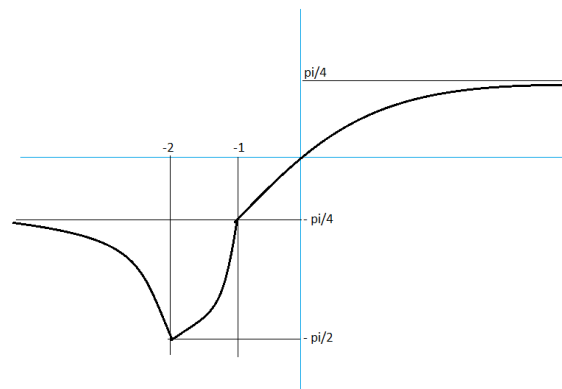
6) Konveksnost i prevojne tačke:

$$f''(x) = \left(\operatorname{sgn}(x+2) \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \right)' = \operatorname{sgn}(x+2) \cdot \frac{-1}{(x^2 + 2x + 2)^2} \cdot (2x + 2) = -\frac{2\operatorname{sgn}(x+2) \cdot (x+1)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$\operatorname{sgn}(x+2)$	$-$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	$-$	$+$	
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	

$x = -2, x = -1$ su prevojne tačke

Napomena: Raspored znakova u $|f''(x)| - | + | - |$ je takav zato što je $f''(x) = -\frac{2\operatorname{sgn}(x+2) \cdot (x+1)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$



Slika 12.6. Grafički prikaz funkcije $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}}$

Domaći zadatak: Data je funkcija $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}} \cdot (x+1)^{\frac{1}{3}}$.

- Napisati datu funkciju u obliku $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow \pm\infty$
- Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $f(x)$.

DVANAESTA NEDELJA

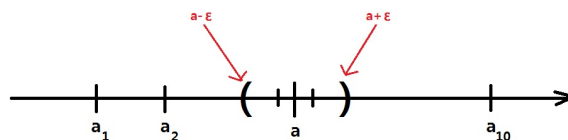
13 Nizovi

DEFINICIJA 1. Niz realnih brojeva (ili niz u $\mathbf{R}$ je preslikavanje $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$. Niz obeležavamo sa $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)$ ili $a(1), a(2), \dots, a(n)$ ili $x(1), x(2), \dots, x(n)$

Primeri:

1. $a_n = n!$ ovo je eksplicitno zadat niz, niz je rastući i određeno divergira.
Elementi su $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, \dots$
2. $a_n = \frac{1}{n}$, niz je opadajući i konvergira.
Elementi su $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$
3. $a_n + (-1)^n$, niz je skoro konstantan, uzima samo dve vrednosti i divergira.
Elementi su $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \dots$
4. $a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{2}$, ovo je rekurentno zadat niz
5. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, ovo je rekurentno zadat niz sa korakom 2.
Baza su dva elementa $a_1 = 1, a_2 = 2$

DEFINICIJA 2. $a \in \mathbf{R}$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ako važi
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) \forall n \geq n_0 |a_n - a| < \varepsilon$



Ako je niz nastao od funkcije i znamo limes te funkcije, onda je to i limes niza.

Primer:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \rightarrow n_0 = 11, \forall n \geq 11, \frac{1}{n} \in \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{700} \rightarrow n_0 = 701, \forall n \geq 701, \frac{1}{n} \in \left(-\frac{1}{700}, \frac{1}{700}\right)$$

DEFINICIJA 3. Ako $\exists a$ tako da je $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ kažemo da niz konvergira ili da je *konvergentan*. Ako nije konvergentan onda je *divergentan*.

DEFINICIJA 4. Kažemo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ako

$(\forall M)(\exists n_0) \forall n \geq n_0, a_n > M$ (određeno divergira).

Kažemo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ako

$(\forall M)(\exists n_0) \forall n \geq n_0, a_n < -M$

Napomena: Ako je $a_n = f(x)$, a $f(x)$ je funkcija definisana na nekom intervalu npr. $[1, +\infty)$ i $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \implies \lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 0$

Primer: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Elementi su $a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{3}, \dots$

Niz konvergira ka 0.

$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (isto kao da smo rekli da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) jer $|a_n - 0| < \varepsilon$ (za dato ε nađemo n_0)

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ako je $n \cdot \varepsilon > 1 \implies n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

DEFINICIJA 5. a_n je ograničen ako $\exists M$ tako da je $|a_n| \leq M$. Ograničen je odozgo ako $\exists M$ tako da je $a_n \leq M$. Ograničen je odozdo ako $\exists m$ tako da je $a_n \geq m$.

STAV 1: Konvergentan niz je ograničen.

Dokaz:

$$\varepsilon = 1$$

$$\forall n \geq n_0 \ a_n \in (a - 1, a + 1)$$

$$m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a - 1\}$$

$$M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a + 1\}$$

$$\forall n \ m \leq a_n \leq M$$

□.

DEFINICIJA 6. a_n monotono raste ako je $a_n \leq a_{n+1}$ i obeležava se sa $a_n \nearrow$, odnosno, niz monotono opada ako je $a_n \geq a_{n+1}$ i obeležava se sa $a_n \searrow$. Niz je monoton ako raste ili opada.

TEOREMA 9.1 (BERNULIJEVA NEJEDNAKOST). Ako je $a > -1$ onda važi da je $\boxed{(1+a)^n \geq 1+n \cdot a.}$

Dokaz: (indukcijom po n)

$$\text{BAZA: } n = 1 \ (1+a) \geq 1+a \ \checkmark$$

KORAK: i.h. $(1+a)^n \geq 1+n \cdot a \ / (1+a)$, sigurno veće od 0

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+n \cdot a) \cdot (1+a)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+n \cdot a + a + n \cdot a^2$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1) \cdot a + \underbrace{n \cdot a^2}_{\geq 0}$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1) \cdot a$$

□.

SVOJSTVA LIMESA NIZA:

I Pretpostavimo da imamo nizove a_n i b_n $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, oni su konvergentni. onda važi da su sledeći nizovi takođe konvergentni:

1. $a_n + b_n$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $a_n \cdot b_n$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. $\frac{a_n}{b_n}, b_n \neq 0$ i $b \neq 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
4. $a_n \leq b_n \implies a \leq b$

II Teorema o 3 limesa se primenjuje i na limese nizova

$a_n \leq b_n \leq c_n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \implies b_n$ konvergira i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

III

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, b \in \mathbf{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, b \in \mathbf{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0, b \in \mathbf{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \pm \infty$

IV Neodređeni oblici:

$\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{\infty}, 1^\infty, 0^0$

Primer: Dokazati da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

Dokaz:

($\Leftarrow$)

$$-|A| \leq A \leq |A|$$

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| / \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$0 \leq a_n \leq 0$$

Iz Teoreme o tri limesa $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

□.

($\Rightarrow$)

Znamo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, hoćemo $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) \forall n \geq n_0 \ ||a_n| - 0| < \varepsilon$$

pošto je $||a_n| = |a_n|$ onda je to $|a_n - 0| < \varepsilon$ jer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

□.

VAŽAN PRIMER:

$$a_n = q^n$$

($q \geq 0$):

- $q = 0$: $q^n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, ovo je konstantan niz, jedina vrednost koja se pojavljuje je 0
- $q = 1$: $q^n = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$, i ovo je konstantan niz, jedina vrednost koja se pojavljuje je 1
- $q^n > 1$: $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$
jer ako zamenimo $q = 1 + a$, dobijemo $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$
- $q \in (0, 1)$: $\frac{1}{q} \implies \left(\frac{1}{q}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$
 $q^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

($q < 0$):

- $-1 < q < 0 \implies 0 < |q| < 1$
znamo: $|q^n| \rightarrow 0 \implies q^n \rightarrow 0$
- $q = -1$: $q^n = (-1)^n$, niz divergira
- $q < -1$: $|q^n| \rightarrow \infty$ divergira jer nije ograničen

Zaključak:

$$q^n = \begin{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, & q \in (0, 1) \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, & q = 1 \\ \text{određeno divergira ka } \infty, & q > 1 \\ \text{divergira,} & q \leq -1 \end{cases}$$

13.1 Monotoni nizovi

TEOREMA 10.1. Neka je niz a_n monoton. Tada on konvergira ako i samo ako je ograničen. Ako nije, onda određeno divergira.

Dokaz:

($\implies$) Ako niz konvergira, on je ograničen. To važi za sve nizove.

□.

($\impliedby$): $a_n \nearrow$

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq M, \forall n$$

$$S = \sup a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$\text{hoćemo: } S = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$\text{odnosno: } \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 a_n \in (S - \varepsilon, S + \varepsilon)$$

$$a_n \leq S \leq S + \varepsilon$$

$S + \varepsilon$ više nije gornja granica tj. $\exists n_0$ tako da $a_{n_0} > S - \varepsilon$, ali pošto je $a_n \geq a_{n_0} > S - \varepsilon$, $n \geq n_0$, nije ga premašio samo jedan element, nego svi jer je niz rastući.

Slučaj kad a_n nije ograničen:

$\implies \forall M \exists n_0 a_{n_0} \geq M$, ali svi $n \geq n_0$, ako je n_0 prebacio, onda su ga svi prebacili jer $a_n \geq a_{n+1} > M$ iz čega sledi da je $a_n \nearrow$.

□.

NAJVAŽNIJI PRIMER

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a_n \nearrow$ znamo da je $a_n \leq 3$.

Dokazali smo da je $\sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} = e$

Ako dokažemo da je $a_n \leq a_{n+1}$ tj. da $a_n \nearrow$ po teoremi će slediti da je

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Dokazujemo da a_n raste tj. da je $a_{n-1} \leq a_n$ (može i sa $a_n \leq a_{n+1}$, ali ovako je lakše).

/*koristićemo Bernulijevu nejednakost za dokaz*/

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^{n-1}}{n^n \cdot n^{n-1}} = \\ &= \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^n}{n^n \cdot n^n} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{(n^2+1)^n}{(n^2)^n} \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \stackrel{\text{Bernuli}}{\geq} \left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

$$a = -\frac{1}{n^2} \Rightarrow a_n \geq a_{n-1} \text{ tj. } a_n \nearrow \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

□.

Iz ovoga sledi da je $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Dokaz:

Znamo: $\lim_{[x] \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e$ (jer je ceo deo broja je prirodan broja, a u prethodnom dokazu je pokazano da ovo važi za prirodne brojeve)

$$[x] \leq x \leq [x] + 1$$

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}$$

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}$$

Pošto i levi i desni teže broju e , po teoremi o tri limesa, i ovaj u sredini teži broju e .

Primeri: Dokažimo:

1. da za $a > 0$ važi da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(1) $a = 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ konstantan niz jedinica

(2) $a > 1$: $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha \cdot n$, $\alpha > 0$
 $\alpha \cdot n = \sqrt[n]{a} - 1$

hoćemo da $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot n = 0$

$a = (1 + \alpha \cdot n)^n \geq 1 + n \cdot \alpha_n$, po Bernulijevoj

$a - 1 \geq n \cdot \alpha_n$

$0 < \alpha_n \leq \frac{a-1}{n} / \lim_{n \rightarrow \infty}$

Po teoremi o tri limesa $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot n = 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \alpha \cdot n = 1 + 0$

(3) $a < 1 \iff \frac{1}{a} > 1$:

$a = \frac{1}{\frac{1}{a}}$

$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$

□.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha \cdot n, \alpha_n \geq 0$

hoćemo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot n = 0$

$$n = (1 + \alpha \cdot n)^n = 1 + \alpha \cdot n + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \alpha^2 \cdot n + \dots + \alpha^n}_{\text{binomna formula}} \geq \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

$$\alpha^2 \cdot n \Rightarrow \alpha^2 \cdot n \leq \frac{n}{n \cdot (n-1)} = \frac{2}{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \alpha \cdot n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot n = 0$$

□.

Zadaci:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$

$$2 < 2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\geq 1} \geq 3$$

$$\sqrt[n]{2} < \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{3}$$

pošto i $\sqrt[n]{2}$ i $\sqrt[n]{3}$ teži 1, po teoremi o tri limesa, i $\sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$ teži 1.

2. $\sqrt[n]{2^n + 5^n} = \sqrt[n]{5^n \cdot \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n + 1 \right)} = 5 \cdot \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{5} \right)^n}$

$$\frac{2}{5} < 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{2}{5} \right)^n < 1^n = 1$$

$$1 < 1 + \left(1 + \frac{2}{5}\right)^n \leq 1 + 1 = 2$$

$$1 < \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{5}\right)^n} \leq \sqrt[n]{2}$$

po teoremi o tri limesa, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{5}\right)^n} = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{5}\right)^n} = 5 \cdot 1 = 5$

3. $/*\ln(x) \ll x^\varepsilon \ll a^x, a > 1, \varepsilon > 0, x \rightarrow \infty^*/$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + 2^n}$$

$$\sqrt[n]{n + 2^n} = 2 \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{n}{2^n}}$$

$$\frac{n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\frac{n}{2^n} \leq 1, \text{ može se dokazati matematičkom indukcijom da važi za svako } n$$

$$2 \cdot \sqrt[n]{1} \leq 2 \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{n}{2^n}} \leq 2 \cdot \sqrt[n]{1 + 1} = 2 \cdot \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\rightarrow 1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{n}{2^n}} = 1$$

13.2 Podnizovi i tačke nagomilavanja

DEFINICIJA 7. Imamo neki niz a_n , onda je njegov podniz $a_{\varphi(n)}$ gde je $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija.

neki niz: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$

neki njegov podniz je: $a_1, a_3, a_4, a_{100}, a_{200}, a_{300}$

nije podniz: $a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_1$

Ako smo izabrali a_k da bude u podnizu, ne može da $k \geq k + 1$.

DEFINICIJA 8. Tačka nagomilavanja niza je $a \in \mathbf{R}$ ako postoji podniz niza a_n koji konvergira ka tački a .

Napomena: Ako niz a_n konvergira, on ima samo 1 tačku nagomilavanja, svaki podniz konvergira ka njoj.

Primer:

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_{2n} = 1 \text{ jer je } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1, \overline{\lim} (-1)^n = 1$$

$$a_{2n+1} = -1 \text{ jer je } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$$

Pošto ima dve tačke nagomilavanja, niz je divergentan.

DEFINICIJA 9. Gornji i donji limes niza su najveća i najmanja tačka nagomilavanja.

$$\overline{\lim} a_n = \limsup(a_n) \text{ (limes superior)}$$

$$\underline{\lim} a_n = \liminf(a_n) \text{ (limes inferior)}$$

Ako a_n konvergira važi:

$$\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Zadaci: Naći dve tačke nagomilavanja, gornji i donji limes.

$$\begin{aligned}
1. \quad a_n &= \frac{2 \cdot n + 1}{3 \cdot n + 2} + (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{3 \cdot n + 1}\right)^{3 \cdot n} \\
\alpha_n &= \frac{2 \cdot n + 1}{3 \cdot n + 2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \\
\beta_n &= \left(1 + \frac{1}{3 \cdot n + 1}\right)^{3 \cdot n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3 \cdot n + 1}\right)^{3 \cdot n + 1}}_{\searrow e} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3 \cdot n + 1}\right)^{-1}}_{\searrow 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e
\end{aligned}$$

$$a_n = \alpha_n + (-1)^n \cdot \beta_n$$

$$a_{2n} = \alpha_{2n} + (-1)^{2n} \cdot \beta_{2n} = \alpha_{2n} + \beta_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} + e$$

$$a_{2n+1} = \alpha_{2n+1} + (-1)^{2n+1} \cdot \beta_{2n+1} = \alpha_{2n+1} - \beta_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} - e$$

Tačke nagomilavanja su $\frac{2}{3} + e$ i $\frac{2}{3} - e$

$$\overline{\lim} a_n = \frac{2}{3} + e$$

$$\underline{\lim} a_n = \frac{2}{3} - e$$

$$2. \quad a_n = \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1, \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{2}\right) = 0, \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{2}\right) = \cos(2 \cdot \pi) = 1,$$

$$\cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{2}\right) = 0, \cos\left(\frac{6 \cdot \pi}{2}\right) = -1, \cos\left(\frac{7 \cdot \pi}{2}\right) = 0, \cos\left(\frac{8 \cdot \pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, n = 4 \cdot k + 1 \text{ ili } n = 4 \cdot k + 3 \\ -1, n = 4 \cdot k + 2 \\ 1, n = 4 \cdot k + 4 \text{ (tj. } n = 4 \cdot k) \end{cases}$$

Imamo 4 podniza, a 3 tačke nagomilavanja: -1, 0, 1.

$$\overline{\lim} a_n = 1$$

$$\underline{\lim} a_n = -1$$

$$3. \quad a_n = \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{3}\right)$$

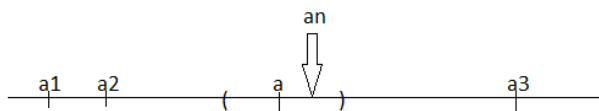
$$4. \quad a_n = \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$5. \quad a_n = 2^{(-1)^n \cdot n}$$

TRINAESTA NEDELJA

Ponavljjanje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$



- Podniz: $a_{\varphi(n)}$, $\varphi(n)$ – rastući niz prirodnih brojeva
 $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ je rastuća funkcija
- a je tačka nagomilavanja niza a_n ako niz konvergira ka a (za $(-1)^n$ t.n. su $1, -1$)

STAV 1: a je tačka nagomilavanja niza a_n akko u svakoj okolini broja a postoji beskonačno mnogo članova niza a_n

Dokaz:

($\implies$) a je tačka nagomilavanja $\implies \exists$ podniz $\varphi(n)$, $a_{\varphi(n)} \rightarrow a$

$\varepsilon > 0$, $n \geq n_0 : (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

$a_{\varphi(n)} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

□.

($\impliedby$) Neka u svakoj okolini tačke a postoji beskonačno mnogo članova niza. Uzmemo okolinu $(a - 1, a + 1)$. Uzmemo jedan član niza koji se nalazi u ovoj okolini, i neka je to $a_{\varphi(1)}$. Uzmemo okolinu $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$. Uzmemo $a_{\varphi(2)}$ t.d. $\varphi(2) > \varphi(1)$.

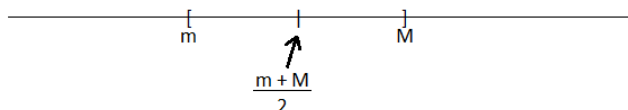
Ako smo našli $a_{\varphi(n)} \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$, onda biramo $a_{\varphi(n+1)}$ t.d. $a_{\varphi(n+1)} \in (a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1})$ i da je $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

Ovim smo napravili podniz $a_{\varphi(n)} \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$, $a_{\varphi(n)} \rightarrow a \implies a$ je tačka nagomilavanja.

□.

TEOREMA 13.1. (Bolcano-Vajerštrajsova): Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Dokaz: Neka je $m \leq a_n \leq M$. Posmatrajmo skup $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$. On može biti konačan ili beskonačan. Ako je konačan, postoji konstantan podniz $a_{\varphi(n)} \equiv a$ i ovo teži ka a . Ako je skup beskonačan, onda ga prepolovimo na pola:



Ili ima beskonačno mnogo u $\left[m, \frac{m+M}{2} \right]$ ili u $\left[\frac{m+M}{2}, M \right]$, pa biramo onaj koji ima beskonačno mnogo. Pravimo niz umetnutih odsečaka:

$$\begin{aligned}
I_1 &= [m, M] \\
I_2 &= \left[m, \frac{m+M}{2} \right] \text{ ili } \left[\frac{m+M}{2}, M \right], \text{ t.d. beskonačno mnogo članova niza } \in I_2 \\
&\vdots \\
I_{n+1} &\subseteq I_n \\
\forall n : I_n &\text{ je dužine } \frac{M-m}{2^{n-1}} \text{ i beskonačno mnogo članova niza } a_n \text{ je u } I_n. \\
(\text{KAN}) &\implies \exists a = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n
\end{aligned}$$

13.3 Košijevi nizovi

DEFINICIJA 1. Niz a_n je Košijev ako:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) \text{ t.d. } \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

STAV 2: Ako a_n konvergira, onda je a_n Košijev.

$$\text{Dokaz: } a_n \rightarrow a \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0$$

$$|a_n - a_m| = \underbrace{|a_n - a|}_{\alpha} + \underbrace{|a - a_m|}_{\beta} \overset{\text{nej.}\Delta}{<} |\alpha| + |\beta| = |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□.

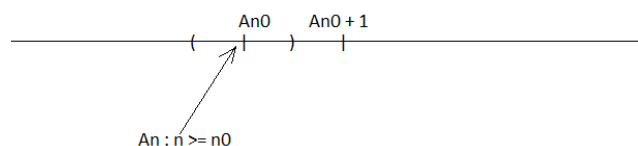
Primer 1: Niz $a_n = (-1)^n$ nije Košijev ((STAV2) $\implies$ nije konvergentan.)

$$|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^n| \cdot |(-1) - 1| = 1 \cdot 2 = 2.$$

Za $\varepsilon = 1$, za bilo koje n_0 ne može da važi Košijevo svojstvo $|a_n - a_m| < \varepsilon \implies$ nije Košijev.

STAV 3: Svaki Košijev niz je ograničen.

Dokaz: Neka je $\varepsilon = 1$. Njemu pridružujemo n_0 t.d. $\forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < 1$.



$$m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0} - 1\}$$

$$M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0+1}\}$$

□.

STAV 4: Košijev niz konvergira akko ima konvergentan podniz.

Dokaz:

($\implies$) Svaki konvergentan niz ima konvergentan podniz ($a_n \rightarrow a \implies$ svaki podniz $\rightarrow a$)

□.

$$\begin{aligned}
 (\Leftarrow) \text{ Treba pokazati: } & \left. \begin{array}{c} a_n \text{ je Košijev} \\ a_{\varphi(n)} \end{array} \right\} a_n \rightarrow a \\
 |a_n - a| = |a_n - a_{\varphi(n)} + a_{\varphi(n)} - a| \leq & \underbrace{|a_n - a_{\varphi(n)}|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ jer je niz Kosijev}} + \underbrace{|a_{\varphi(n)} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ jer } a_{\varphi(n)} \rightarrow a} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

□.

TEOREMA 13.2. a_n je konvergentan akko a_n je Košijev.

Dokaz:

($\Rightarrow$) STAV 2

□.

($\Leftarrow$) Neka je a_n Košijev:

(STAV 3) $\Rightarrow a_n$ je ograničen

(B-V) $\Rightarrow a_n$ ima konvergentan podniz

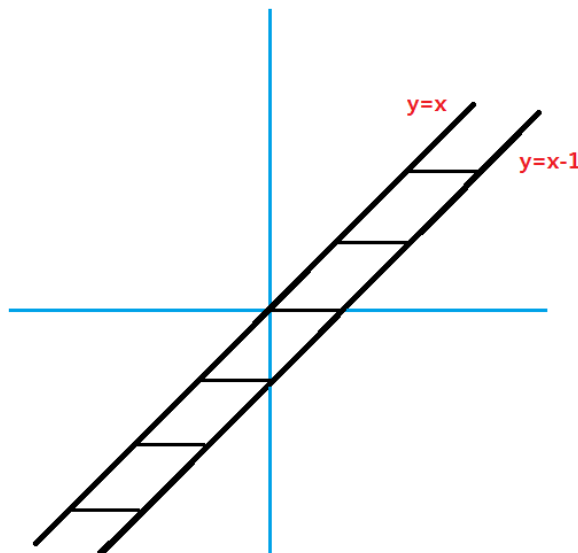
(STAV 4) $\Rightarrow a_n$ konvergira.

□.

Napomena: U $\mathbf{Q}$ postoje Košijevi nizovi koji ne konvergiraju u $\mathbf{Q}$.

1) Dokazati da $\forall n \in \mathbf{R}, \exists$ niz $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r, r_n \in \mathbf{Q}$

$$\text{Dokaz: } r \in \mathbf{R}, r_n = \frac{[n \cdot r]}{n} \in \mathbf{Q}$$



$$\begin{aligned}
 x - 1 &\leq [x] \leq x \\
 \frac{nr-1}{n} &\leq \frac{[nr]}{n} \leq \frac{nr}{n} = r \\
 r - \frac{1}{n} &\leq r_n \leq r \implies r_n \rightarrow r
 \end{aligned}$$

□.

2) Dati primer Košijevog niza u $\mathbf{Q}$ čiji limes nije u $\mathbf{Q}$.

$$a_n = \frac{[\sqrt{2} - n]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{2}}_{\notin \mathbf{Q}} \implies a_n \text{ je Košijev}$$

Primer 2:

1) Harmonijski red: $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ nije Košijev

Treba pokazati da je $|s_{2n} - s_n| \geq \frac{1}{2}$:

$$|s_{2n} - s_n| = |\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} - (\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{5}})| = |\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ sabiraka}} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \implies$$

divergira

2) Niz: $t_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ jeste Košijev

Treba pokazati: $|t_m - t_n| < \varepsilon$

$$\text{Neka je } m > n: |t_m - t_n| = |\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \frac{1}{3^2} + \cancel{\frac{1}{4^2}} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2} - (\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{3^2}} + \cancel{\frac{1}{4^2}})| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2} < \dots$$

$$\left[\left[\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right] \right]$$

$$\dots < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1} \right) + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0: n \geq n_0 \implies t_n \text{ je Košijev}$$

13.4 Veza limesa niza i limesa funkcije i neprekidnosti

STAV 5: (Hajneova definicija limesa funkcije):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \ (a, b \in \bar{\mathbf{R}}) \iff \forall \text{ niz } a_n \rightarrow a, \ n \rightarrow \infty \ (a_n \neq a) \text{ važi: } f(a_n) \rightarrow L$$

Dokaz:

($\implies$) ($\forall \varepsilon > 0$) ($\exists \delta > 0$): $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$ i neka $a_n \rightarrow a, \ n \rightarrow \infty \ (a_n \neq a)$. Onda je $0 < |a_n - a| < \delta$, za dovoljno veliko n :

$$\implies |f(a_n) - L| < \varepsilon$$

$$\implies f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

□.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da $a_n \rightarrow a \implies f(a_n) \rightarrow L \ (\forall a_n \neq a)$. Treba dokazati da $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta, \exists x_0: 0 < |x_0 - a| < \delta \implies |f(x_0) - L| \geq \varepsilon$

Neka je ε dato.

Uzmemo $\delta = \frac{1}{n}$ i nađemo njemu odgovarajuće x_n za koje važi $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, ali $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Ovim smo konstruisali niz $x_n \neq a, \ x_n \rightarrow a$, ali $f(x_n) \not\rightarrow L$, što je kontradikcija.

□.

Posledica:

$$a \in \mathbf{R}, f \text{ je neprekidna u } a \iff \forall \text{ niz } a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty \implies f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$$

$$\text{Primer 3: } f(x) = \sin \frac{1}{x} \text{ nema } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Pretpostavimo da postoji $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(STAV 5)} \implies \forall \text{ niz } x_n \rightarrow 0 \implies f(x_n) \rightarrow L \\ x_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = \sin(2n\pi) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ f(y_n) = \sin \frac{1}{y_n} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{array} \right\} \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\text{Primer 4: } \left. \begin{array}{l} f \text{ periodična} \\ f \neq \text{const} \end{array} \right\} \implies \nexists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ (nema H.A.)}$$

Hoćemo da konstruišemo 2 niza: $x_n \rightarrow \infty$, $y_n \rightarrow \infty$, ali da $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$.

$$\begin{array}{l} \exists x, y : f(x) \neq f(y) - \text{jer } f \neq \text{const} \\ T - \text{period} \\ x_n = x + nT \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \\ y_n = y + nT \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \\ \left. \begin{array}{l} f(x_n) = f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \\ f(y_n) = f(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(y) \end{array} \right\} \neq \end{array}$$

$$\text{Primer 5: } f(x) = [x] \text{ ima prekid u } x = m \in \mathbf{Z}$$

$$\begin{array}{l} x_n = m - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m \\ f(x_n) = \underbrace{\left[m - \frac{1}{n} \right]}_{\in (m-1, m)} = m - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m - 1 \neq [m] \end{array}$$

13.4.1 Dokazi pojedinih teorema (preko nizova)

$$(1) f \text{ neprekidna} \implies f\left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x})\right) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$$

Neka je $x_n \rightarrow x_0$ niz i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha$. Tada je $f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(\alpha)$.

$$\begin{array}{l} \text{(STAV 5)} \implies g(x_n) \rightarrow \alpha \\ f \text{ je neprekidna, pa } f(g(x_n)) \rightarrow f(\alpha) \\ \forall \text{ niz } x_n \rightarrow x_0 : f(g(x_n)) \rightarrow f(\alpha) \\ \text{(Hajne)} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\alpha) \end{array}$$

□.

(2) f, g neprekidne $\implies f \circ g$ je neprekidna

Za $x_n \rightarrow x_0$ hoćemo $f \circ g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \circ g(x_0)$

$$f \circ g(x_n) = f(\underbrace{g(x_n)}_{y_n})$$

$$x_n \rightarrow x_0 \implies \underbrace{g(x_n)}_{y_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{g(x_0)}_{y_0} \xRightarrow{\text{nep. } g} \underbrace{f(y_n)}_{f(g(x_n))} \rightarrow f(y_0) = f(g(x_0))$$

□.

(3) Koši–Bolcanova teorema:

f je neprekidna i $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c : f(c) = 0$

$$\bigcap I_n = c$$

$$I_n = [a_n, b_n]$$

$$f(a_n) > 0$$

$$f(b_n) < 0$$

$$a_n \rightarrow c \xRightarrow{f \text{ nepr.}} \overbrace{f(a_n)}^{>0} \rightarrow f(c) \geq 0$$

$$b_n \rightarrow c \implies f(b_n) \rightarrow f(c) \leq 0$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \quad c \in [a_n, b_n] \implies |a_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n} \text{ i } |b_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Odavde sledi da nizovi a_n i b_n konvergiraju ka c .

□.

(4) e^x je neprekidna

Dovoljno je da pokažemo da je $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ jer, inače, $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x-x_0} \cdot e^{x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x-x_0} = e^{x_0} \cdot e^0 = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$.

Neka niz $x_n \rightarrow 0$, a hoćemo $e^{x_n} \rightarrow 1$. Pretpostavimo da $x_n > 0$. Znamo da $\sqrt[n]{e} \rightarrow 1$, tj. $e^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

$0 < x_n \rightarrow 0 : \exists n_0, \forall n \geq n_0 : x_n < \frac{1}{m}$, za unapred zadato m .

$$1 = e^0 < e^{x_n} < e^{\frac{1}{m}}; \quad e^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$$

$$1 < e^n < 1 + \varepsilon$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1.$$

Sa druge strane:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^t} = \frac{1}{1} = 1$$

□.

(5.1.) Štolcova teorema za nizove:

$$x_n, y_n, y_n \nearrow \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

Bez dokaza!

(5.2.) Posledica: Košijeva teorema za nizove:

Ako $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, onda niz aritmetičkih sredina $S_n \rightarrow a$

$$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

$$x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$y_n = n \quad (y_n \nearrow \infty)$$

$$(\text{Štolc}) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{\cancel{y} + 1 - \cancel{y}} = a$$

□.

(6) STAV:

$$a_n > 0, \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a > 0 \implies G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

$$\left[\left[\begin{array}{c} H \leq G \leq A \\ \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \end{array} \right] \right]$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}} \stackrel{\text{Košić za A.S. } a_n}{=} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

$$\overset{a}{\nearrow} H_n \leq G_n \leq \overset{a}{\nearrow} A_n \implies G_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

□.

$$\text{ZADATAK 1: Izračunati } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{a_n}{\underbrace{a_{n-1}}_{=b_n}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$$

$$a_0 = 1$$

$$b_1 = \frac{a_1}{a_0} = a_1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n \cdot \dots \cdot b_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$b_n = \frac{\frac{n^n}{n!}}{\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{n} = \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1} =$$

$$\left(\frac{n-1+1}{n-1} \right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$$

$$\text{Posledica: } \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$$

$$\ln n \ll n^\varepsilon \ll a^n \ll n!$$