

АНАЛИЗА 2-И

Одређени интеграл (задачи за вежбу)

1. По дефиницији израчунати интеграле:

(а) $\int_0^1 e^x dx$;

(б) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ (упутство: користити вредности функције у тачкама $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$).

2. Користећи Њутн-Лајбницевоу формулу израчунати интеграле:

(а) $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx$;

(б) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 - 1}$.

3. Доказати да за све природне бројеве m и n важи:

(а) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0$;

(б) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi$.

4. Наћи извод функције $F(x)$ ако је:

(а) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$;

(б) $F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^3} dt$;

(в) $F(x) = \int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{e^t}{t} dt$.

5. Користећи се Лопиталовим правилом наћи граничне вредности:

(а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt$;

(б) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt$.

6. Израчунати следеће граничне вредности користећи се интегралним сумама:

(а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1^2 + n^2} + \frac{n}{2^2 + n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$;

(б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$;

(в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, p > 1$.

7. Израчунати интеграле:

(а) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$;

(б) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$;

(в) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$;

(г) $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$;

(д) $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$.

8. Дат је интеграл $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^{n/2} dx$, $n \in \mathbf{N}$. Доказати да је $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$ за $n = 2, 3, \dots$, а затим израчунати I_n .
9. Израчунати површину фигуре ограничене графицима функција $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ у равни xOy .
10. Израчунати дужину криве $y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1} dt$, за $-2 \leq x \leq -1$.
11. Израчунати дужину криве $y = \ln x$, $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.
12. Одредити површину омотача тела које настаје ротацијом око x -осе дела параболе $y^2 = 4 + x$ од темена до тачке са апсцисом $x = 2$.
13. Израчунати површину површи добијене ротацијом криве $y = \frac{x^3}{9}$, $0 \leq x \leq 2$, око x -осе.
14. Израчунати површину фигуре у равни xOy која је ограничена кругом $x^2 + y^2 = 8$ и параболом $y^2 = 2x$ и смештена је у полуравни $x \geq 0$.
15. У тачки $P(3, 2)$ параболе $y^2 = 2(x - 1)$ конструисана је тангента. Израчунати запремину тела које настаје обртањем око x -осе фигуре ограничене овом тангентом, параболом и x -осом.