

$$\text{II } (2) \quad x' + P(t)x = Q(t)$$

урадуем сию $(2\#) \quad x' + P(t)x = 0 \quad x(t) = c e^{-\int P(t) dt}$

Нешоноуе: $x(t) = c(t) e^{-\int P(t) dt}$ урадуемо оваро (метод вариације константи)

↪ $y(2)$

$$x' + P(t)x = c' e^{-\int P dt} + c e^{-\int P dt} \cdot (-P) + P \cdot c e^{-\int P dt} = Q(t)$$

$$\Rightarrow c'(t) = e^{\int P(t) dt} Q(t) \Rightarrow c(t) = \int Q(t) e^{\int P(t) dt} + c$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\int P(t) dt} \left[\int Q(t) e^{\int P(t) dt} dt + c \right] \quad (*)$$

Лемма 1. Доказати да је $\mathcal{R}(2) := \{ \text{скуп реш. (2)} \}$
 $= \{ e^{-\int P dt} \left[\int Q(t) e^{\int P dt} dt + c \right] \mid c \in \mathbb{R} \}$

уједињено: 2: одговара

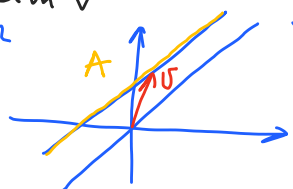
c : ако $x \in \mathcal{R}(2)$, $y(t) := x e^{\int P dt} - \int Q e^{\int P dt} dt$, $y' = ?$

гф. U -в. $A = U + V$, $U \in U$, $V \in U$ показује.
 $= \{ U + V \mid U \in U, V \in V \}$

$\Rightarrow A$ се зове афини подпростор.

$$\dim A := \dim V$$

Пример. у $\mathbb{R}^2$



V е. простор. глум 1

$$\dim A = 1$$

Лемма 1. Доказати да је $\mathcal{R}(2)$ афини простор глум 1.

у то

(а) $L: U_1 \rightarrow U_2$ зато $\ker L \leq U_1$

Доказати да је, за фикс. $u_2 \in U_2$, $L^{-1}(u_2) \neq \emptyset$

је афини простор. $(L^{-1}(u_2) = u_1 + \ker L)$

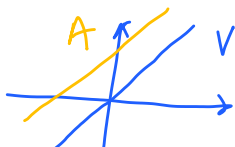
$\hookrightarrow$ u_1 е. из $L^{-1}(u_2)$

(б) применимо (а) на једн. (2)

(шта је L , а шта је u_2 ?)

(в) глумимо из (*) функцију да је $\mathcal{R}(2)$ афини, у
 и видимо шта је V из гф. а шта је u_1 из гф.

Пример:



$$A := \{ (x, y) \mid ax + by + c = 0 \} = L^{-1}(f-c)$$

$$V = \{ (x, y) \mid ax + by = 0 \} = \ker L$$

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$L(x, y) = ax + by \text{ л.м.т.}$$

$$L(x, y) = -c \Leftrightarrow ax + by + c = 0$$

✓

III берху мжеба жгте мте.

$$(3) \quad x'(t) + P(t)x(t) = Q(t)x(t)^\alpha$$

$\alpha \notin \{0, 1\}$ (мте ж мте (2))

$$(3) \cdot x^{-\alpha}: \underbrace{x^{-\alpha} x'} + P(t) \underbrace{x^{1-\alpha}} = Q(t)$$

$$\text{мте } y(t) := x^{1-\alpha}(t) \Rightarrow y'(t) = (1-\alpha)x^{-\alpha}(t) \cdot x'(t)$$

$$\leadsto \frac{1}{1-\alpha} y' + P \cdot y = Q \quad / \cdot (1-\alpha) \rightarrow \text{л.м.т. } y'(t) + (1-\alpha)P \cdot y(t) = (1-\alpha)Q$$

Намте: $\alpha > 0$, глук тооно ж мте $x(t) \equiv 0$
(мте глук мте мте глук глук мте)

Дукумте: змте $x'(t) = F(t, x)$, глук ж F л.м.т. ж T мте мте
мте мте $\Rightarrow \exists$ жгте мте мте

мте. ж мте мте жгте мте мте ж F ?

$$x' = -P(t)x + Q(t) =: F(t, x)$$

$$\begin{aligned} |F(t, x) - F(t, y)| &= |-P(t)x + Q(t) + P(t)y - Q(t)| \\ &= |P(t)| \cdot |x - y| \leq L \cdot |x - y| \end{aligned}$$

$\downarrow$ мте. $\max_I |P(t)|$

змте. л.м.т. жгте, глук ж $P(t)$

мте мте, F жгте. ж мте мте мте мте. ж мте мте мте мте $I \subseteq \mathbb{R}$

мте, л.м.т. берху мжеба, мте ж $F(t, x)$?

$$x' = -P(t)x + Q(t)x^\alpha = F(t, x)$$

$$|F(t, x) - F(t, y)| = |P(t)| |x - y| + Q(t) |x^\alpha - y^\alpha|$$

мте мте глук

$$\text{мте. } \left. \begin{matrix} P(t) = 0 \\ Q(t) = 1 \\ \alpha = 1/2 \end{matrix} \right\} \leadsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \text{ - мте мте мте мте } x = 0$$

$$\text{жгте } \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq L \quad / \quad |x - y| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq L \quad \Leftrightarrow \quad (x, y \rightarrow 0)$$

Прмте: $x' = \sqrt[3]{x}$ (берху мжеба $P=0$ $Q=1$)

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = dt$$

$$\int x^{-1/3} dx = t + C$$

$$\frac{3}{2} x^{2/3} = t + C, \quad x = \left(\frac{2}{3} (t + C) \right)^{3/2}$$

кор. условие $x(0) = 0 \quad C = 0 \quad x(t) = \left(\frac{2}{3} t \right)^{3/2}$ и реш.

$$x(t) \equiv 0 \text{ — тоже решение}$$

Замечание 3. Докажем, что $F(t, x) = \sqrt[3]{x}$ имеет локально линейное и у гигант оно линейно $x=0$

Лемма 1. Если F — кривая C^1 (т.е. F'_x и F'_t)
 $\Rightarrow F$ — лок. линейно в x , ун. форма в t

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq L |x - y|$$

IV Рунге-Куты и жесткие

$$(4) \quad x'(t) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$$

уравнение линейное, если $c(t) = 0 \rightarrow$ линейное

— || — Бернуллиевое, если $a(t) = 0 \rightarrow$ Бернуллиевое

$$x' = F(t, x) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$$

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq |b(t)| \cdot |x - y| + |c(t)| |x^2 - y^2|$$

$$\leq M_1 \cdot |x - y| + M_2 |x - y| |x + y|$$

$$\leq M_3$$

$$\leq L \cdot |x - y| \quad \text{локально} \\ (t \in I, x, y \in (x_0 - a, x_0 + a)) \\ \uparrow \\ \text{сепаратр}$$

3. Рунге-Куты и жест. Имеем уравнение для решения
 или оно имеет жесткое решение, можно же получить
 два решения, и то, что, оно же $u(t)$ жесткое решение (характеристики)
 тогда, считая $x(t) = u(t) + \frac{1}{y(t)}$, $y(t)$ — новая независимая ф-я
 жест. (4) и (2) — (2)
 иж. линейно, за тож имеем два решения.

$$\boxed{x = u + \frac{1}{y}} \rightarrow (4): \quad \cancel{u'} - \frac{1}{y^2} y' = a(t) + b(t) \left(u + \frac{1}{y} \right) + c(t) \left(u + \frac{1}{y} \right)^2$$

$$x' = u' - \frac{1}{y^2} y'$$

$$= \cancel{a(t)} + \cancel{b(t) \cdot u} + c(t) \cdot u^2 + b(t) \cdot \frac{1}{y} + 2c(t) \cdot u \cdot \frac{1}{y} + c(t) \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{y'}{y^2} = \frac{a}{y} + \frac{2c \cdot u}{y} + \frac{c}{y^2} \quad \left(\cdot \frac{1}{y^2} \right)$$

$$y' = -ey - 2uy - c$$

$$y' + \underbrace{(e+2u)}_{p(t)} y = \underbrace{-c(t)}_{Q(t)}$$

Пример: $x' = -x^2 + 2xt - t^2 + 5$

$$a(t) = -t^2 + 5, \quad b(t) = 2t, \quad c(t) = -1$$

a) Попробуем найти функцию $u(t) = at + b$

б) Проверим функцию

a) $u = at + b$ и найдем функцию:

$$a = -(at+b)^2 + 2(at+b)t - t^2 + 5$$

$$= (-a^2 + 2a - 1)t^2 + (-2ab + 2b)t + (-b^2 + 5)$$

при t^2 : $0 = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2 \Rightarrow \boxed{a=1}$

при t : $0 = -2ab + 2b = -2b + 2b = 0$?

при 1 : $a=1 = -b^2 + 5 \Rightarrow b^2 = 4 \quad b = \pm 2$

$$u(t) = t + 2$$

сделаем $x = u + \frac{1}{y} = t + 2 + \frac{1}{y}$

$$x' = 1 - \frac{y'}{y^2} = -(t+2+\frac{1}{y})^2 + 2t(t+2+\frac{1}{y}) - t^2 + 5$$

$$y' - 4y = 1, \quad y(t) = e^{-\int P dt} \left(\int Q e^{\int P dt} dt + C \right)$$

$$P(t) = -4 \quad Q(t) = 1$$

$$= e^{4t} \left(\int e^{-4t} dt + C \right)$$

$$= e^{4t} \left(-\frac{1}{4} e^{-4t} + C \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = t + 2 + e^{-4t} \frac{1}{-\frac{1}{4} e^{-4t} + C} = \dots$$

V Проверим интегрируемость

$$(5) \quad M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0$$

$$(5') \quad M(t, x) + N(t, x) x' = 0$$

(5') (или (5)) не имеет ж.г. с зад. гр. и $f(t, x)$

и ако је $z = f(t, x)$, $f_t = M(t, x)$, $f_x = N(t, x)$, уј.

$$(M, N) = \nabla f$$

$$\text{и} \quad df = M dt + N dx = [M \ N]$$

Према томе, ако f обавља f , изразом $f(t, x) = C$ је универзално право правило (ггг. 15').

Јер, ако је $f(t, x(t)) = C \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$

$$f'_t + f'_x \cdot x'_t = 0$$

$$\parallel \parallel \\ M(t, x) + N(t, x) x' = 0 \quad (J') \quad \text{и}$$

Увек у хомогеном случају за

$$(\star) \quad \exists f, \quad f'_t = M, \quad f'_x = N$$

$$f'_t = M \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

$$f''_{tx} = M'_x$$

$$f'_x = N \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

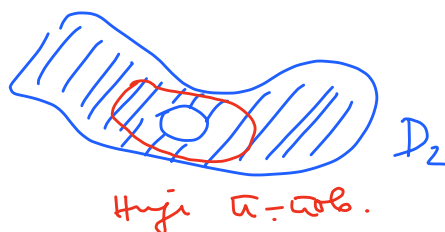
$$\parallel \parallel \\ f''_{xt} = N'_t$$

$$(\heartsuit) \quad M'_x = N'_t$$

Увек: $(\star) \Rightarrow (\heartsuit)$

ИТАДА: $(\heartsuit) \Rightarrow (\star)$? ако је $D \subseteq \mathbb{R}^2$ које имају M и N непрекидно и равномерно непрекидно

D је равномерно об. ако свака функција задовољава услову Лагранжа у D .



$$\int_{\gamma} M dt + N dx = \iint_{\tilde{D}} \underbrace{(N'_t - M'_x)}_{=0} dt dx \leq T.$$

↑
оде је не могу
(нису $\tilde{D}$?)

Пример: $\underbrace{2tx - 9t^2}_{M(t,x)} + \underbrace{(2x + t^2 + 1)}_{N(t,x)} \frac{dx}{dt} = 0$

9. $M'_x = N'_t$ $M'_x = 2t$ $N'_t = 2t$ ✓

$$D = \mathbb{R}^2 \text{ für w.p.-wob. } (\Rightarrow \exists f, \nabla f = (M, N))$$

$$f'_{t=1} = 2tx - 9t^2 \rightarrow f(t, x) = \int (2tx - 9t^2) dt = t^2x - 3t^3 + \varphi(x)$$

$$f'_x = N \Rightarrow \cancel{t} + \gamma'(x) = \underline{2x + \cancel{t} + 1}$$

$$\varphi'(x) = 2x + 1 \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + x + c$$

$\Rightarrow f(t, x) = t^2x - 3t^3 + x^2 + x + C$, a p~~un~~ele și univ. g~~ar~~ă se
 $t^2x - 3t^3 + x^2 + x = C$ ✓

V(a) Hemen j g4 $M dx + N dt = 0$ moite ge e chege ite (5)

и́ако што се попиои се $M(t, x)$ - интегрални
фактор

$$\underbrace{M(t, x) M(t_1 x)} + \underbrace{N(t_1 x) M(t_1 x)} = 0$$

$\tilde{M}(t, x)$ $\tilde{N}(t, x)$, Haganu se ga zi

$$\tilde{M}'x = \tilde{N}'t$$

3. ρg_4 je Hamiltonian $\mathcal{M}(t, x) = \mathcal{M}(\omega)$, $\omega = \omega(t, x)$

3 4 5