Tuesday, 27 October 2020 14:08

8. зад. са 1. часа $\quad A=\{a_1,\dots,a_n,\dots\}$ $\quad A'=\{a=\lim_{n\to\infty} x_n,\ x_n\in A,\ x_n\neq a\}$

a т.н. скупа $A \Rightarrow a$ т. нат. низа

обрнуто ако је A коначан $\Rightarrow A'=\emptyset$

доказати

$\Downarrow$

низ $\{a_n\}$ има констант. подниз $\Rightarrow$ $\exists$ т. нат. низа

међутим. ако је A ∞ скуп $\Rightarrow$ низ $\{a_n\}$ има т. нат. (доказати)

Доказ Пикарове т.

Кошиј. зад. $\begin{cases} x'(t)=f(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \iff x(t)=\underbrace{x_0+\int_{t_0}^{t} x(s,f(s))\,ds}_{\varphi(x)(t)} \quad (*)$

$\varphi: M\to M$ из Банахове т.

тј. фиксна т. од φ биће реш. (К.З.) $\iff (*)$

$M=?$ φ - контракција

$L,\ U_{x_0}$ на којој важи $\quad |f(t,x)-f(t,y)|\le L|x-y|$ $\quad \forall t\in I$

$r>0 \quad B[x_0,r]\subseteq U_{x_0},$

$c:=\max\{|f(t,x)|,\ t\in I_1,\ x\in B[x_0,r]\}$ где је

I_1 неки сегмент $\quad I_1=[t_0-\delta_1,\ t_0+\delta_1]\subseteq I$

$I_1\times B[x_0,r]$ - затв. огр.

$\parallel$

$[t_0-\delta_1,\ t_0+\delta_1]\times[x_0-r,\ x_0+r] \Rightarrow$ компактност

δ бићемо да наместимо $\quad \delta<\delta_1,\ \frac{r}{c},\ \frac{1}{L}$ $\quad \delta$ је строго $<\frac{1}{L}$

$M:=\{x:[t_0-\delta,t_0+\delta]\to\mathbb{R} \mid x$ је непр., $\forall t\ |x(t)-x_0|\le r\}$

$\|x\|_\infty := \max_{t\in[t_0-\delta,\ t_0+\delta]} |x(t)|$

остало је да проверимо

1. φ је добро деф. $\quad \varphi(x)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\underbrace{x(s)}_{\in U})\,ds \quad t\in I \quad s\in[t_0-\delta,t_0+\delta]\subseteq I$

$x\in M \Rightarrow x(s)\in U \qquad f$ деф. на $I\times U$

$|x(s)-x_0|\le r$

$\Rightarrow x(s)\in B[x_0,r]\subseteq U$

2. M компактан: $M \subseteq C^0([a,b])$

$$\begin{array}{c} M \\ \| \\ B[x_0, r] \ \text{ у } \|\cdot\|_\infty \\ \downarrow \\ \text{континуална ф-ја} \end{array}$$

$$d_\infty(x(t), x_0) = \max_t |x(t) - x_0| = \{x \text{ непр.} \mid |x(t) - x_0| \le r \ \forall t\}$$

Један од домаћих: затв. подскуп комп. простора је компактан
(варијација)

3. $\varphi : M \to M$, тј. затворено је $x \in M \Rightarrow \varphi(x) \in M$

1° $\varphi(x)$ је непр: $|\varphi(x)(t_1) - \varphi(x)(t_2)| =$

$$= \left| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s))\,ds - \cancel{x_0} - \int_{t_0}^{t_2} f(s, x(s))\,ds \right|$$

$$= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\,ds \right| \le \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x(s))|\,ds \le C \cdot |t_1 - t_2|$$

$$I_1 \times B[x_0, r]$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ је непр. по t

$x \in M \Rightarrow |\varphi(x)(t) - x_0| \le r \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

$$|\varphi(x)(t) - x_0| = \left| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds - \cancel{x_0} \right| \le |t - t_0| \cdot C$$

$$\le \delta \cdot C \le r \ \text{(неједнакост)} \ *$$

$$\delta \le \frac{r}{C}$$

4. φ је контракција

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \overset{?}{\le} q \, d(x, y)$$

$$\| \varphi(x) - \varphi(y) \|_\infty \qquad \| x - y \|_\infty$$

$$|\varphi(x)(t) - \varphi(y)(t)| = \left| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds - \cancel{x_0} - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds \right|$$

$$= \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))\,ds \right| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\,ds$$

$$\underset{\text{Липшиц.}}{\le} \int_{t_0}^{t} L \cdot |\underbrace{x(s) - y(s)}_{\le \|x-y\|_\infty}|\,ds \le L \cdot \|x - y\|_\infty |t_0 - t|$$

$$\le L \cdot \delta \cdot \|x - y\|_\infty \ \Big/ \max_t$$

$\Rightarrow \|\varphi(x)-\varphi(y)\|_\infty \leq \underbrace{L\cdot0}_{<1} \|x-y\|_\infty$ ✓

Зад. Из Банахове т.

$\Rightarrow$ за свако δ $\exists!$ реш. (К.З.) ∎

Пример. $\begin{cases} x'(t) = x(t) \quad "f(t,x(t))" \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ решити овај к. зад. интеграцијом до низ Банахове теореме.

$$\varphi(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds = x_0 + \int_0^t a\cdot x(s)\,ds$$

доказ Банахове т.

низ $a_n \to$ ф. т.

a_0 – било шта

$a_{n+1} = \varphi(a_n)$

$a_0 = x_0(t) \equiv x_0$ (згодно нем ји)

$a_1 = x_1(t) = \varphi(x_0)(t) = x_0 + \int_0^t x_0(s)ds = x_0 + \int_0^t x_0\,ds = x_0 + x_0\cdot t = x_1(t)$

$a_2 = x_2(t) = \varphi(x_1)(t) = x_0 + \int_0^t x_1(s)ds = x_0 + \int_0^t (x_0 + x_0\cdot s)\,ds =$

$= x_0 + x_0 t + x_0\frac{t^2}{2} = x_0\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)$

$a_3 = x_3(t) = \varphi(x_2)(t) = x_0 + \int_0^t x_2(s)ds = x_0 + \int_0^t x_0\left(1+s+\frac{s^2}{2}\right)ds$

$= x_0 + x_0\left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\right) = x_0\left[1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\right]$

$\vdots$

$a_n = x_n(t) = x_0\left[1+t+\frac{t^2}{2}+\dots+\frac{t^n}{n!}\right]$

$\uparrow$

н.х.

даза ✓

корак: $x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t x_n(s)ds =$

$= x_0 + x_0\int_0^t \left(1+s+\frac{s^2}{2}+\dots+\frac{s^n}{n!}\right)ds$

$= x_0 + x_0\left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\dots+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)$

$= x_0\left(1+t+\dots+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)$

$x_n(t) = x_0\left(1+t+\dots+\frac{t^n}{n!}\right) \to x_0 e^t, \quad n\to\infty$

решење је $x(t)=x_0e^t$, $x'=x$

Напомена: важи да $x_n \to x$ у $\|\cdot\|_\infty$ на сваком сегменту $I\subseteq\mathbb{R}$

Домаћи 1. решити КЗ
$$x'=ax$$
$$x(t_0)=x_0$$
помоћу доказа Б.Т. тј. као у претх. примеру

Домаћи 2. Исти текст
$$\begin{cases} x'=\frac{x}{t} \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \quad t_0\neq 0$$

Неки типови диф. једначина

I ДЈ која раздваја променљиве

(1) $\quad x'(t)=f(t)g(x) \qquad g(x)\neq 0$

поступак:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ознака за } x'}}{\frac{dx}{dt}} = f(t)g(x) \quad /\cdot dt, \ : g(x)$$

$$\underbrace{\int\frac{dx}{g(x)}}_{=:G(x)} = \int f(t)\,dt =: F(t)$$

Теорема. Сва реш. једн. (1) дата су имплицитно са $G(x)=F(t)$.

Доказ. 1. x је реш. (1) $\Rightarrow G(x(t))=F(t)$

$x'=f(t)g(x)$, $\quad G(x(t)) = \int\frac{dx}{g(x(t))} = \left\{ \begin{array}{l} x(t)=x \\ dx = x'\,dt \end{array} \right\}$

$$=\int\frac{x'(t)\,dt}{g(x(t))} = \int\frac{f(t)g(x(t))}{g(x(t))}\,dt = \int f(t)\,dt = F(t)$$

2. ако је x ф-ја од t за коју важи $G(x(t))=F(t)$ $\Rightarrow$ x је реш. (1)

$$G(x(t))=F(t)\,/' = \int f(t)\,dt$$

$$\int \frac{dx}{g(x(t))} \qquad \Downarrow$$

$$\frac{1}{g(x(t))}\, x'(t) = G'(x(t))\cdot x'(t) = F'(t) = f(t)$$

$$\Downarrow$$

$$x'(t) = f(t)\, g(x(t)) \qquad \boxtimes$$

Пример: $(t+1)x' = t(x^2+1)$, $t > -1$

$$\frac{dx}{dt} = x' = \underbrace{\frac{t}{t+1}}_{f(t)} \underbrace{(x^2+1)}_{g(x)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{t}{t+1}\,dt = \int\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$\operatorname{arctg} x = t - \ln(t+1) + c$$

$$x(t) = \operatorname{tg}(t - \ln(t+1) + c) \quad \checkmark$$

Домашна 3: $x' = (1+x^2)e^t$,

I а) $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$ се сведи на једн. (1)

смена $y(t) = \frac{x}{t}$ → хомогена

$$x(t) = t\cdot y(t)$$

$$x' = y + t\cdot y' \Rightarrow y + ty' = f(y)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{f(y)-y}{t} \to \text{ј-на } (1)$$

Домашна 4: $t\cdot x' = x(\ln t - \ln x)$, $t > 0$

$x(1) = 4$

I б) $x' = f(ax + bt + c)$ исто се сведи на (1)

$$y(t) = ax(t) + b\cdot t + c$$

$$y' = a\cdot x' + b \Rightarrow x' = \frac{y'-b}{a}$$

$$\frac{y'-b}{a} = f(y) \qquad y' = af(y) + b \quad \text{једн. } (1)$$

Пример. $x' = (\underbrace{4t - x + 1}_{y(t)})^2$, $x(0) = 2$

$$y' = 4 - x' \Rightarrow x' = 4 - y'$$

$$4-y' = y^2 \Rightarrow y' = 4-y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 4-y^2, \quad \int \frac{dy}{4-y^2} = \int dt = t + C$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{2-y+2+y}{(2-y)(2+y)}\,dy = \frac{1}{4}\left[\int \frac{dy}{2-y} + \int \frac{dy}{2+y}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(y+2) - \ln(y-2)\right] = \frac{1}{4}\ln\frac{y+2}{y-2}$$

$$\frac{1}{4}\ln\frac{y+2}{y-2} = t + C$$

$$\frac{y+2}{y-2} = e^{4(t+C)} = C_1 e^{4t}$$

$$\Rightarrow y(t) = 2\,\frac{C_1 e^{4t} - 1}{C_1 e^{4t} + 1} \Rightarrow x(t) = 4t - y + 1$$

$$= 4t + 1 - 2\,\frac{C_1 e^{4t} - 1}{C_1 e^{4t} + 1}$$

$x(0) = 2$

$$2 = 4\cdot 0 + 1 - 2\cdot\frac{C_1 - 1}{C_1 + 1} \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{3}}$$

II Линеарне једначине

$$(2) \quad x' + P(t)x = Q(t)$$

$$(2H) \quad x' + P(t)x = 0 \qquad \left(L : x \mapsto x' + P(t)x\right)$$

тип (1)

$$x' = -P(t)x$$

$$\frac{dx}{x} = -P(t)\,dt$$

$$\ln x = -\int P(t)\,dt + C_1$$

$$\boxed{x(t) = C e^{-\int P(t)dt}}$$

Домаћи 5. Доказати да је $\mathcal{R}_H = \{x \mid x' + P(t)x = 0\}$ векторски простор димензије 1. И то

(а) Језгро лин. оп. $L : V \to V$ је в.п.

и видети да је $\mathcal{R}_H$ језгро неког лин. пр.

(б) ... $\{C e^{-\int P(t)dt}\}$

(б) $\mathcal{R}_H = \{ c\, e^{\ldots} \}$

$\subseteq$: (упражњ. $x \in \mathcal{R}_H$, посм. $y(t) := x(t) e^{\int p(t) dt}$)

$\supseteq$: ✓

(в) Шта је база од $\mathcal{R}_H$ ($\Rightarrow \dim = 1$) ✓