2. час

Tuesday, 13 October 2020 19:02

Пример 1. $(\mathbb{Q}, d_E(x,y)=|x-y|)$ није комплетан

$\sqrt{2}$: $\exists x_n \in \mathbb{Q},\ x_n \to \sqrt{2}$

Г $\forall r \in \mathbb{R}\ \exists x_n \in \mathbb{Q},\ x_n \to r$, нпр. $x_n := \dfrac{\overset{\in \mathbb{Z}}{[nr]}}{\underset{\in \mathbb{N}}{n}} \in \mathbb{Q}$

$nr \le [nr] < nr+1 \Rightarrow \underbrace{r}_{\to r} \le x_n \le \dfrac{nr+1}{n} = \underbrace{r+\frac{1}{n}}_{\to r}$, $x_n \to r$

или

$r = a, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots \qquad a, b_i \in \mathbb{Z}$

⌞ $x_n = a, b_1 \dots b_n \longrightarrow r$

x_n је Кошијев у $\mathbb{R} \Rightarrow$ у $\mathbb{Q}$, али лимес му није у $\mathbb{Q}$ □

Домаћи 1. Доказати да скуп $C^0[a,b]$ у односу на L^2 норму није комплетан. $\|f\|_{L_2} := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ □

Упутство: Наћи $f_n \in C^0[a,b]$, $f_n \xrightarrow{L_2} f \notin C^0[a,b]$

Банахова теорема о фиксној т.

деф. $f:(M_1,d_1) \longrightarrow (M_2,d_2)$ контракција ако $\exists q \in (0,1)$ т.д.: $\forall x,y \in M_1$, $d_2(f(x),f(y)) \le q \cdot d_1(x,y)$ (*).

Пример. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\cdot x$, $|a|<1$

$d(f(x),f(y)) = |ax-ay| = \underbrace{|a|}_{q} \cdot |x-y| \le q\, d(x,y)$, $q < 1$

Напомена. Контракција је увек непрекидна. $\varepsilon > 0$, $\delta := \dfrac{\varepsilon}{q}$

$d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x),f(y)) \le q\, d_1(x,y) < q \cdot \dfrac{\varepsilon}{q} = \varepsilon$.

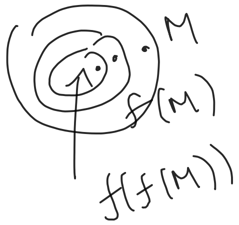
Напомена. Ако важи (*) за $q>0$ (не мора <1), онда се f зове Липшицова.

Пример. f класе $C^1 \Rightarrow f$ је Липшицова на $[a,b]$

јер $|f(x)-f(y)| \underset{\text{Лагранж}}{=} |f'(\xi)(x-y)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\text{огр. јер је непрекидно}} \cdot |x-y| \le M \cdot |x-y|$.

Т (Банахова о фиксној тачки) M комплетан, $f: M \to M$

① (Банахов став о фиксној тачки) M комплетан, $f: M \to M$
контракција. Тада $\exists$ јединств. $x \in M$ т.д. $f(x) = x$.



<u>Доказ</u>. идеја: направити Кошијев низ, чији лимес ће бити x.
$x_0 \in M$ било шта, $x_{n+1} := f(x_n)$

1. x_n Кошијев
2. $x_n \to x$ је фиксна тачка
3. x је јединствена ф. тачка

1. $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \le q\, d(x_n, x_{n-1}) = q\, d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \le$
$q \cdot q\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) = q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \le \underbrace{\dots}_{n-1 \text{ корак}} \le q^n \underbrace{d(x_1, x_0)}_{c} = c \cdot q^n$ $(\star)$

$$\underset{m>n}{d(x_m, x_n)} \underset{\text{Нејд. } \Delta}{\le} d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \overset{(\star)}{\le}$$

$$\le c \cdot q^{m-1} + c\, q^{m-2} + \dots + c\, q^n = c q^n \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots + q^{m-n-1})}$$

$$= c \cdot \frac{1 - q^{m-n}}{1-q} \cdot q^n \le \frac{c}{1-q} \cdot q^n < \varepsilon$$

$\frac{c}{1-q} \cdot q^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$m, n \ge n_0$

$$\frac{c}{1-q} \cdot q^{n_0} < \varepsilon \quad \text{за дов. велико } n_0$$

$\Rightarrow x_n$ је Кошијев низ ✓

M комплетан $\Rightarrow \exists x = \lim x_n$

2. $x_{n+1} = f(x_n) \; / \lim_{n \to \infty}$ $\quad f$ непрекидно

$x_{n+1} \to x$, $f(x_n) \to x$

$x = f(x)$ ✓

3. јединственост: пп. $\exists x \ne y$ $f(x) = x$, $f(y) = y$

$\Downarrow$

$d(x, y) = a > 0$

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \le q \cdot d(x,y) = q \cdot a$$

$d(x,y) = a$

$a \le q \cdot a \qquad q < 1 \qquad ↯ \qquad a(1-q) \le 0$ $\qquad \square$

Домаћи 2.1: Наћи пример: $f: M \to M$ f контр. али M није комплетан, тд. f нема фиксну тачку

2.* Наћи пример $f: M \to M$, M комплетан и $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$ (Липшицова али не контракција) тд. f нема ф. тачку.

Напомена: М.пр. $M \subseteq \mathbb{R}$ се „наслеђује метрика" $d(x,y) = |x-y|$

Домаћи 3. M је комплетан $\iff$ M је затворен подскуп од $\mathbb{R}$.

Компактност

Деф. $K \subseteq M$ (или цио M) се зове компактан ако сваки низ $x_n \in K$ има конвергентан подниз $x_{n_k} \to x \in K$.

Домаћи 4. M компактан $\Rightarrow$ M је комплетан.

Обрнуто не важи, $\mathbb{R}$ је комплетан али није компактан низ $x_n = n$ нема конв. подниз.

(T) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ је компактан $\iff$ K је затворен и огр.

$A \subseteq M$ је ограничен ако $\exists x_0, r$ $A \subset B[x_0, r]$

Пример. M − било који бесконачан скуп $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ $M \subseteq B[x_0, 1]$ за било који $x_0 \in M$

$M = B[x_0, r]$ затв.

али није компактан, x_n = низ. разл. елемената $d(x_n, x_m) = 1$ није Кошијев.

Доказ. $\Leftarrow$: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ затв. и огр. $\Rightarrow$ компактан

$n=2$ (да не бисмо писали друге индексе)

$(x_n, y_n) \in K \subseteq \mathbb{R}^2$ K је огр. $\Rightarrow$ x_n је огр. низ у $\mathbb{R}$

$\left((x_n, y_n) \in B[(x_0, y_0), r] \quad d(x_n, x_0) = |x_n - x_0| \leq d((x_n, y_n), (x_0, y_0)) \right)$

T из A1: сваки огр. бесконачан скуп у $\mathbb{R}$ има т. нагомилавања

$\{x_n\}$ коначан $\Rightarrow$ има константан подниз

$\{x_n\}$ бесконачан $\Rightarrow$ има т. наг. $\Rightarrow$ $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

(јер је од датих)

x_{n_k} конв. у $\mathbb{R}$

y_{n_k} исто ограничен $\Rightarrow$ $y_{n_{k_l}}$ конв. подниз $y_{n_{k_l}} \to y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underbrace{(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})}_{} \to (x,y)$

подниз низа $\underset{K}{\underset{\uparrow}{(x_n, y_n)}}$ који конв. ка $\underset{K\;?}{\underset{\uparrow\,?}{(x,y)\in\mathbb{R}^2}}$

$(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})$ низ у K који $\to (x,y)$

$\Rightarrow$: важи $\quad K$ је затворен $\Rightarrow (x,y) \in K$ $\square$

Т $f: K \to \mathbb{R}$, K - компактан, f непрекидна. Тада f достиже максимум и минимум на K.

$\left(\exists\, x_{min}, x_{max} \in K, \quad \underbrace{f(x_{min})}_{m} \le f(x) \le \underbrace{f(x_{max})}_{M} \;\; \forall x \in K \right)$

Доказ. 1. корак: $\exists\, m, M \in \mathbb{R} \quad f(x) \in [m, M]$

Лема. K компактан, $f: K \to M$ непр. онда $f(K)$ је компактан.

Доказ леме. $y_n \in f(K)$, $y_n = f(x_n)$, $x_n \in K$

$x_{n_k} \to x \in K$, f непр. $\Rightarrow \underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} \to f(x) \in f(K)$ $\square$

$f(K)$ је компактан у $\mathbb{R} \Rightarrow f(K)$ ограничен

$\Rightarrow \exists\, m, M \quad m \le f(x) \le M$

2. $f(K)$ огр. у $\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, m, M \quad m = \inf f(K)$, $M = \sup f(K)$

$\Rightarrow \exists$ низ $y_n \in f(K)$, $y_n \to M \;\; (n \to \infty)$

из деф. супремума

$(\forall n \;\exists\, \underset{f(K)}{\underset{\uparrow}{y_n}} \in (M - \frac{1}{n}, M])$

$y_n = f(x_n)$, $x_n \in K \Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to x \in K$

$M \leftarrow y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \Rightarrow f(x) = M$

$x_{max} := x$ $\square$

Пикарова теорема

диф. једначина (у $\mathbb{R}$). (♡) $x'(t) = f(t,x)$ $\quad$ $x(t)$ непозната ф-ја
(1. реда)

$\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}$

Како да решавамо
(углавном не знамо)

Пример. $x' = f(t)$ $\qquad x(t) = \int f(t)\,dt \; + C$

Када д.ј. (♡) има решења? Када има јединств. решење

Кошијев задатак: (КЗ) $\begin{cases} x'(t) = \boxed{f}(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ са почетним условом

Пример. $x' = x \qquad x(t) = C e^{t}$ $\quad$ ✓

$x(t_0) = x_0 \Rightarrow C e^{t_0} = x_0 \Rightarrow C = \dfrac{x_0}{e^{t_0}}$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 e^{t - t_0}}$

деф. $f(t,x)$, $f : I \times U$ $\quad$ $\ni t \quad \ni x$ $\quad$ Липшицова по x униформно по t

$I \subseteq \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ (све важи и за $x \in \mathbb{R}^n$)

ако $\exists L$, $d(f(t,x), f(t,y)) = |f(t,x) - f(t,y)| \le L \cdot |x - y|$
$\forall t \in I$

L - Липшицова константа

f је локално Липшицова по x униформно по t
ако $\forall x_0 \in U$ $\exists U_0 \ni x_0$ т.д. $\exists L > 0$

$U_0 \subseteq U$ отв. скуп

$|f(t,x) - f(t,y)| \le L\,|x - y| \quad \forall x, y \in U_0 \quad \forall t \in I$ □

Пример 1. $f(t,x) = ax$

$|f(t,x) - f(t,y)| = \underbrace{|a|}_{L} \cdot |x - y| \le L\,|x - y|$

2. $f(t,x) = ax \sin t$

$|f(t,x) - f(t,y)| = |a|\,|\sin t| \cdot |x - y| \le \underbrace{|a|}_{L}\,|x - y|$

(Т) (Пикарова т. о егзистенцији и јединств. реш. ДЈ)

$f : I \times U \to \mathbb{R}$, I инт. $\subseteq \mathbb{R}$

$U \subseteq \mathbb{R}$ отворен (може и $\mathbb{R}^n$)

↓ може и $\mathbb{R}^n$

f је локално Липшицова по x равн. по t.

Тада $\forall x_0 \in U$ и $\forall t_0 \in I$ $\exists \delta > 0$ и јединств. реш. (к.3) $\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

деф. на $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Доказ

Идеја: ↕ БАНАХОВА

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right\} \iff x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

↓ ЗАШТО

$$x' = f \Rightarrow \underbrace{x(t) - x(t_0)}_{x(t_0) = x_0} = \int_{t_0}^{t} \underbrace{x'(s)}_{= f(s, x(s))}\,ds$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \Rightarrow \begin{array}{l} 1.\ x(t_0) = x_0 + 0 = x_0 \\ 2.\ x'(t) = f(t, x(t)) \end{array}$$

ф-је

¿ Шта је φ тд. $\varphi(x) = x$ буде решење (к.3)

$$\varphi(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

ф. тачка од φ = решење

↓ БАНАХ

$\exists$ јединств.

Шта је M?, φ контр.?

$\varphi : M \to M$

простор ф-ја