Tuesday, 13 October 2020 12:19

час почиње у 14:15

I Метрички простори

M – скуп. са метриком d:

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = d(y,x)$ сим.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ неј. Δ
4. $d(x,y) = 0 \iff x = y$ недегер.

Примјери: 1. у $\mathbb{R}^n$ $\underset{d_E}{\underset{\parallel}{d_2(X,Y)}} = \sqrt{\sum_1^n (x_i - y_i)^2}$ $X = (x_1, \dots, x_n)$

2. V – НВП, $\|\cdot\|$ $\|\cdot\| \rightsquigarrow d$

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ т.д.в.: $d(x,y) := \|x - y\|$ (1)

1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$
2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3) недег. $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$

3. V – в.п. $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

(i) $\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \mu \langle x_2, y \rangle$ линеарн. по 1.
(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ симетрич.
(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ поз.
(iv) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle \rightsquigarrow \|\cdot\|$

$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ (2)

1. домаћи: доказати да (2) деф. норму, а (1) деф. метрику.

4. уопшт. примјера 1,

$$\|X\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p > 1 \quad \text{норма}$$

Нпр. $p = 1$

$$\|X\| = \sum_i |x_i|$$

2. домаћи: а) доказати да $\|\cdot\|_1$ норма
б)* — || — $\|\cdot\|_p$, $p > 1$

5. $M = \mathbb{R}^n$, $\|X\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

3. домаћи: а) $\|\cdot\|_\infty$ је норма

б) $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$

6. **Важан пример**: $M = C^0([a,b]) := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ је непр.$\}$

$\|f\|_0 = \|f\|_\infty = \|f\| := \max_{[a,b]} |f(x)|$ 4. Доказати да је ово норма.

7. дискретна метрика: M – било шта, $d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

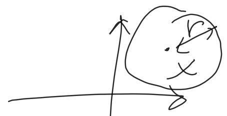
5. Доказати да је ово метрика

Основни појмови.

деф. Отворена кугла $B(x,r) := \{ y \in M \mid d(x,y) < r \}$

Затв. кугла $B[x,r] := \{ y \in M \mid d(x,y) \leq r \}$

Примери. 1. у $\mathbb{R}^2$ $d_E = d_2$



2. (можда на вежбама а можда домаћи): Шта су кугле у d_1, а шта у d_∞ у $\mathbb{R}^2$

3. дискретна метрика: $B(x,r)$? $= \{ y \mid d(x,y) < r \} = \begin{cases} \{x\}, & r \leq 1 \\ M, & r > 1 \end{cases}$

$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

деф. $U \subseteq M$ је отворен ако $\forall x \in U \ \exists r > 0 \ B(x,r) \subseteq U$

$F \subseteq M$ је затворен ако је F^c отворен.

7. Домаћи: а) $B(x,r)$ је отворен, $B[x,r]$ затворен

б) A_1, A_2 отв. (затв.) $\Rightarrow$ $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ отв. (затв.)

деф. 1. $x \in M$ рубна тачка скупа A ако $\forall r>0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
$B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$

$\partial A := \{$ рубних тачака скупа $A \}$

2. x је тачка нагомилавања скупа A ако $\forall r>0$ $B(x,r)$ садржи бесконачно много тачака из A

$A' = \{ x$ је т. нагомилавања скупа $A \}$

3. $x \in A$ је унутрашња т. скупа A ако $\exists r>0$ $B(x,r) \subseteq A$

$\mathring{A} = \mathrm{Int} A := \{ x \mid x$ је ун. т. $A \}$

4. $\overline{A} := A \cup A'$ адхеренција скупа A (затворење)

Пример. $M = \mathbb{R}$ $d(x,y) = |x-y|$ $B(x,r) = (x-r, x+r)$

$B[x,r] = [x-r, x+r]$

$A = [0,1) \cup \{2\}$

$\mathring{A} = (0,1)$

$A' = [0,1]$

$\partial A = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$

$\overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$

$\partial A \nsubseteq A'$

$A' \nsubseteq \partial A$

$\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$

8. домаћи: У каквој су вези скуп тачака наг. низа a_n и A', где је $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$?

Тврдње. 1. A је отворен $\iff A \cap \partial A = \emptyset$

2. A је затворен $\iff \partial A \subseteq A$

3. $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

4. A је затворен, A је отворен

Доказ. 1. $\Rightarrow$: A је отв.,

$x \in \partial A \Rightarrow \forall r\ B(x,r) \not\subseteq A$ (јер $B(x,r)$ садрж. тачке из A^c)

$\Rightarrow x \notin A \Rightarrow A \cap \partial A = \phi$

$\Leftarrow$: $A \cap \partial A = \phi$

$x \in A \Rightarrow x \notin \partial A \Rightarrow$ или $\exists r\ B(x,r) \cap A^c = \phi$ ✓

или $\exists r\ B(x,r) \cap A = \phi$ не може

$\exists r\ B(x,r) \subseteq A$ □

2. $\Rightarrow$: A је затворен, хоћемо $\partial A \subseteq A$

$\Updownarrow$

A^c је отв.

$x \in \partial A$

пмс. $x \notin A \Rightarrow x \in A^c \Rightarrow \exists r\ B(x,r) \subseteq A^c \Rightarrow x \notin \partial A$ ↯ $\Rightarrow x \in A$

$\Downarrow$

$B(x,r) \cap A = \phi$

$\Leftarrow$: $\partial A \subseteq A$, хоћемо A затв.

$\Updownarrow$

A^c је отв.

$x \in A^c \Rightarrow x \notin \partial A \Rightarrow$ или $\exists r\ B(x,r) \cap A = \phi$ ✓ $\Rightarrow B(x,r) \subseteq A^c \Rightarrow A^c$ је отв.

или $\exists r\ B(x,r) \cap A^c = \phi$ јер $x \in A^c$

3. $\subseteq$: $\partial A \subseteq \bar{A} \setminus \mathring{A}$

$x \in \partial A$

Зашто $x \in \bar{A}$

$\forall r\ B(x,r)$ садржи ∞ мн. тачака из A

Знамо да је $B(x,r) \cap A \neq \phi$

Зашто $x \notin \mathring{A}$: ако $x \in \mathring{A}$

$\exists r\ B(x,r) \subseteq \mathring{A} \subseteq A$

Није могуће

Не може их бити ... $y_1, y_2, \dots, y_n$

јер узмемо $\delta = \frac{1}{2}\min\{d(x, y_i)\}$, $B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$

јер $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$

2. $\bar{A} \setminus \mathring{A} \subseteq \partial A$

$x \in \bar{A} \setminus \mathring{A}$, $r > 0$ $\quad B(x,r)$ → $\cap A \neq \emptyset$ јер $x \in \bar{A}$

→ $\cap A^c \neq \emptyset$ јер $x \notin \mathring{A}$

(ако би био $\emptyset$ за неко r

$\Downarrow$

$B(x,r) \subseteq A$ ↯

$\Downarrow$

$x \in \mathring{A}$)

1. $\mathring{A}$ је отв. по деф.

$\bar{A}$ – затворен?

$\Updownarrow$

$\bar{A}^c$ отворен: $x \in \bar{A}^c \Rightarrow x \notin A$

$x \notin A' \Rightarrow \exists r \; B(x,r) \cap A = \{y_1, \dots, y_n\}$

$\Rightarrow \exists r_1 \; B(x,r_1) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow B(x,r_1) \subseteq A^c$

$\cup|$

$\bar{A}^c$

Значи $B(x,r_1) \subseteq \bar{A}^c$

јер ако не. $\exists y \in B(x,r_1) \cap \bar{A}$

$\Downarrow$

$y \in A$ ↯ или $y \in A'$ ↯

□

9. ~~Доказати~~ Доказати

(1) $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$, $\overline{A^c} = (\mathring{A})^c$

(2) $\mathring{A}$ је највећи отв. скуп који је садржан у A
($B \subseteq A$ и B отворен $\Rightarrow B \subseteq \mathring{A}$)

(3) $A = \mathring{A} \iff A$ је отворен

(4) $\mathring{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\mathring{\overbrace{A \cup B}} \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$ (навести пример да не важи $\Rightarrow$)

(5) $\overline{A}$ је најмањи затв. скуп који садржи A

(6) $A = \overline{A} \iff A$ је затворен

(7) $A \cup \partial A = \overline{A}$

(8) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ ( )

(9) $\partial A = \partial A^c$

$\square$

Низови у МП

деф: Низ у МП M је пресл. $\varphi : \mathbb{N} \to M$ $\quad a_n := \varphi(n)$

деф: $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, a_n у M, ако $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0\ d(a_n, a) < \varepsilon$

у $\mathbb{R}$ $\quad |a_n - a| < \varepsilon$

очигледно је: $a_n \to a \iff d_n := d(a_n, a) \to 0$ у $\mathbb{R}$

Тврђење: $a \in A' \iff \exists$ низ различитих $a_n \in A$, т.д. ...

Доказ. $\Rightarrow$: $a \in A'$ $B(a, \frac{1}{n}) \ni a_n$ ($a_n \neq a_{n-1}$ смањимо $\frac{1}{n}$ т.д. изоставимо a_{n-1})

$a_n \in A$

$\Leftarrow$: $a_n \in A$, $a_n \to a$

r $B(a,r) \ni a_n$, $n \geq n_0$ $\Rightarrow$ $B(a,r) \cap A$ је бесконачно $\Rightarrow$ $a \in A'$ □

Последица. A је затворен $\iff$ сви лимеси свих низова из A остају у A □

Домаћи 10. Илустровати претходно тврђење на $A = [0,1) \cup \{2\}$

Непрекидне ф-је и лимес ф-је (подсетник)

деф. $f: (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ кажемо да је непрекидна у $x_0 \in M_1$ ако

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ \forall x \in M_1$ $d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Непрекидна ако је непр. у свакој тачки.

11. домаћи: f је непрекидна $\iff \forall U$ отв. у (M_2, d_2), $f^{-1}(U)$ је о.

Тврђење. f је непр. у $x_0 \iff \forall$ низ $x_n \to x_0$ у M_1, низ

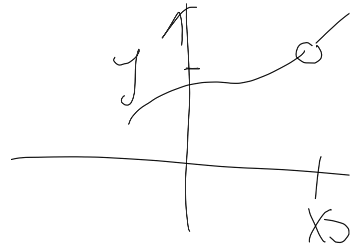
12. домаћи (*) ...

12. задатак (4). Наћи пример непр. пресл. из M у M

[где је $M = C^0([a,b])$, $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$

деф. $f: (M_1,d_1) \to (M_2,d_2)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ ако важи

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ 0<d_1(x,x_0)<\delta \Rightarrow d_2(f(x),y)<\varepsilon$$



Тврђење. $\lim_{x\to x_0} f(x)=y \iff \forall$ низ $x_n \in M_1$, $x_n \neq x_0$ т.д. $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to y$ у M_2

Комплетност

деф. x_n у (M,d) је Кошијев ако $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall m,n \geq n_0)\ d(x_n, \ldots$

деф. (M,d) је комплетан ако сваки Кошијев низ конвергира

Напомена. конв. $\Rightarrow$ Кошијев јер $d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n)$

Пример: 1. $\mathbb{R}$ компл.

4/2 лимес 2/2,

2. $\mathbb{R}^2$ —||— ? да!

– (x_n, y_n) Коши-јев $\|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)\| < \varepsilon$

$$|x_m - x_n| \leq \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_n - y_m)^2}$$
$$|y_m - y_n|$$
$\Rightarrow$ x_n и y_n су Коши-јев

$\Rightarrow$ $x_n \to x$, $y_n \to y$ $\Leftrightarrow$ $(x_n, y_n) \to (x, y)$

3. $\mathbb{R}^k$ је комплетан $\forall k$

4. $C^0[a,b]$ је комплетан

Доказ. f_n Коши-јев низ у $C^0[a,b]$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ $\forall n, m \geq n_0$

фикс. x

$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty = \max_x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

непр ч/

$f_n(x)$ низ у $\mathbb{R}$ који је конвергентан $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

деф. $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Шта је остало

1) $f \in C^0[a,b]$?

$d(f(x), f(x_0)) = |f(x) - f(x_0)| \le$

$\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|$

$+ |f_n(x_0) - f(x_0)|$

Морамо преко под 2)

$\le \underline{\|f - f_n\|_\infty} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{}$

$+ \underline{\|f_n - f\|_\infty}$

мало због 2) $\qquad f_n$ је непр. у x_0

2) $f_n \to f$ у $\|\cdot\|_\infty$

$\Updownarrow$

$\|f_n - f\| \to 0 \quad n \to \infty$

$x \in [a,b]$ фикс, произв.

$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|$

$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \;/\; \max\limits_x$

$\|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon$ □