

5-7. ČAS

1. Numerički redovi

Zadaci:

1. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju redova $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\ln(k+1)}, \alpha \in R$.

2. Stepeni redovi

1. Stepeni red je red oblika

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

2. Poluprečnik konvergencije stepenog reda je dat sa

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Za $x \in (-r, r)$ stepeni red apsolutno konvergira, za $x \in (-\infty, r) \cup (r, +\infty)$ stepeni red divergira a u krajevima intervala $x = \pm r$ posebno ispitujemo konvergenciju.

3. Osobine stepenih redova – za svako $x \in (-r, r)$ važi

$$(a) \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^{k+1}}{k+1},$$

$$(b) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

4. Važe sledeći razvoji

$$1. \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad x \in [-1, 1),$$

$$2. \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1],$$

$$3. e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in R,$$

$$4. \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in R,$$

$$5. \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in R,$$

$$6. (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad x \in R \text{ gde je } \alpha \in R \text{ i } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}, \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Zadaci:

1. Odrediti oblast konvergencije i naći sumu reda

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2}{k!} x^k \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k \frac{1}{k+1} + k \right) (x+1)^k \quad (d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k4^{k+1}}$$

3. Odrediti oblast konvergencije i sumu reda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k(k-1)} x^k$ a zatim na osnovu toga naći

$$\text{sumu reda } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}.$$

4. Razviti funkciju u Maklorenov stepeni red i odrediti oblast konvergencije dobijenog reda

$$(a) f(x) = x \sin^2 3x \quad (b) f(x) = \frac{1+x^2}{(1+x)^2(1+2x)} \quad (c) f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

5. Razviti funkciju u Tejlorov stepeni red i odrediti oblast konvergencije dobijenog reda

$$(a) f(x) = \frac{1}{x+2} \text{ u okolini tačke } x_0 = 3$$

$$(b) f(x) = \ln(4+3x-x^2) \text{ u okolini tačke } x_0 = 2.$$

Domaći

1. Odrediti oblast konvergencije i naći sumu reda

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k}, \quad (b) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{25^k}, \quad (c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^k}{5^k},$$

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{k(2k-1)}, \quad (e) \sum_{k=0}^{\infty} (k + (-1)^k 3^k) x^k.$$

2. Odrediti oblast konvergencije i sumu reda $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (x-2)^{k-1}$ a zatim na osnovu toga naći

$$\text{sumu reda } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k^2}{3^{k-1}}.$$

3. Odrediti oblast konvergencije i sumu reda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{4k^2-1} x^{2k+1}$ a zatim na osnovu toga

$$\text{naći sumu reda } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(4k^2-1)4^k}.$$

5. Razviti funkciju u Maklorenov stepeni red i odrediti oblast konvergencije dobijenog reda

$$(a) f(x) = \frac{x}{2} e^{x^2}, \quad (b) f(x) = \ln \sqrt[3]{1+x^2}, \quad (c) f(x) = \frac{1}{(x+1)^2},$$

$$(d) f(x) = x^3 \ln \sqrt[5]{\frac{5+x^2}{5-x^2}}.$$

6. Razviti funkciju u Tejlorov stepeni red i odrediti oblast konvergencije dobijenog reda

$$(a) f(x) = \ln(3-x) \text{ u okolini tačke } x_0 = 2$$

$$(b) f(x) = e^{3x} \text{ u okolini tačke } x_0 = 1.$$