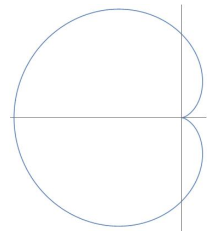
Колоквијум из Геометрије 3, 2.6.2015.

1. Дата је крива поларном једначином $\rho = 1 - \cos\theta$.

(а) Одредити неку параметризацију дате криве, испитати регуларност и скицирати је.

Решење. Параметризација дате криве је $x = (1-\cos\theta)\cos\theta$, $y = (1-\cos\theta)\sin\theta$, односно

$$\alpha(\theta) = ((1-\cos\theta)\cos\theta, (1-\cos\theta)\sin\theta).$$



У питању је кардиоида, чији траг описује тачка са круга полупречника $\frac{1}{2}$ који котрља по фиксираном кругу $(x+\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, почевши од $(0,0)$.

Параметар θ представља поларни угао дате криве чија је параметризација $2\pi-$периодична, па је довољно посматрати вредности параметра $\theta \in [0, 2\pi]$. Наравно, могуће је узети и $\theta \in \mathbb{R}$ у оним деловима задатка где није битно да параметризација буде $1-1$. Како је

$$\alpha'(\theta) = (-\sin\theta + \sin 2\theta, \cos\theta - \cos 2\theta),$$

$$v(\theta) = \|\alpha'(\theta)\| = \sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|,$$

крива није регуларна за $\sin\frac{\theta}{2} = 0$, односно $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Уколико сматрамо да $\theta \in [0, 2\pi]$, крива није регуларна за $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$, тј. у тачки $(0,0)$.

(б) Одредити дужину криве и неку природну параметризацију.

Решење. Дужина криве износи

$$L = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 4\int_0^{\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta = -8\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8.$$

Функција дужине лука дате криве, рачуната од тачке $(0,0)$ до тачке $\alpha(\theta)$, је

$$s(\theta) = \int_0^{\theta} 2\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 4\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 8\sin^2\frac{\theta}{4}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

па важи

$$\theta = 4\arcsin\sqrt{\frac{s}{8}}, \quad s \in [0, 8].$$

Природна параметризација криве гласи

$$\alpha(s) = \frac{s(8-s)}{8}\left(\cos\left(4\arcsin\sqrt{\frac{s}{8}}\right), \sin\left(4\arcsin\sqrt{\frac{s}{8}}\right)\right), \quad s \in [0, 8].$$

Последњи израз је могуће још средити, али га нећемо користити у наставку задатка.

Могуће је рачунати функцију дужине лука и почевши од неке друге тачке, рецимо од тачке $(-2, 0)$ која одговара вредности параметра $\theta = \pi$.

(в) Одредити Френеов репер и кривину криве.

Решење. С обзиром да је дата крива раванска, довољно је одредити тангентно и нормално векторско поље. Користићемо дату параметризацију уместо природне, због лакшег рачуна.

$$T(\theta) = \frac{\alpha'(\theta)}{\|\alpha'(\theta)\|} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}(-\sin\theta + \sin 2\theta, \cos\theta - \cos 2\theta) = \left(\cos\frac{3\theta}{2}, \sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

Ротацијом за $+\frac{\pi}{2}$ добијамо

$$N_z(\theta) = \left(-\sin\frac{3\theta}{2}, \cos\frac{3\theta}{2}\right).$$

Кривина дате криве је

$$\kappa_z(\theta) = \frac{x'y'' - x''y'}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} = \frac{3}{4\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Приметимо да је $\kappa_z > 0$, па се означена и неозначена кривина криве у одабраној параметризацији поклапају.

Могуће је тражити Френеов репер и кривину криве као да је у питању просторна крива, смештајући је нпр. у раван $z = 0$. У том случају се још добија и константно бинормално векторско поље дуж криве $B = (0, 0, 1)$.

(г) Одредити оскулаторни круг криве у тачки $(-2,0)$.

Решење. Оскулаторни круг криве има додир реда бар 2 са кривом, што значи да има исту тангенту, нормалу и кривину као дата крива. Уколико је тачка додира $\alpha(\theta_0)$, центар круга налази се у тачки $\alpha(\theta_0)+\frac{1}{\kappa_z}N_z$ и има полупречник $\left|\frac{1}{\kappa_z}\right|$. У нашем конкретном случају је у питању тачка $(-2,0)$ за коју важи $\theta_0=\pi$, па је $\kappa_z=\frac{3}{4}$, $T=(0,-1)$, $N_z=(1,0)$. Једначина траженог оскулаторног круга је

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}.$$

(д) Одредити угао између тангенте криве и $x-$осе.

Решење. За вектор правца $x-$осе може се узети вектор $(1,0)$, па је заправо довољно наћи угао између тог вектора и вектора $T(\theta)=(\cos\frac{3\theta}{2},\sin\frac{3\theta}{2})$. Ако је φ тражени угао, важи

$$\cos\varphi=\frac{\langle(1,0),(\cos\frac{3\theta}{2},\sin\frac{3\theta}{2})\rangle}{\|(1,0)\|\cdot\|(\cos\frac{3\theta}{2},\sin\frac{3\theta}{2})\|}=\cos\frac{3\theta}{2},$$

односно $\varphi=\frac{3\theta}{2}$ (нисмо водили рачуна о томе да $\varphi\in[0,\pi]$).

2. Дат је хиперболички цилиндар једначином у Декартовим координатама $x^2-y^2=1$.

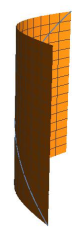
(а) Скицирати дати цилиндар, параметризовати део цилиндра у полупростору $x>0$ и испитати регуларност.

Решење. Једна од могућих параметризација дела хиперболичког цилиндра $x^2-y^2=1$, $x>0$, је

$$x=\operatorname{ch}u,\quad y=\operatorname{sh}u,\quad z=v,$$

односно

$$r(u,v)=(\operatorname{ch}u,\operatorname{sh}u,v),\qquad (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$



Дати цилиндар је праволинијска површ, са изводницама паралелним $z-$оси и који сече xOy раван по хиперболи $(\operatorname{ch}u,\operatorname{sh}u,0)$:

$$r(u,v)=(\operatorname{ch}u,\operatorname{sh}u,0)+v(0,0,1).$$

Како је

$$r_u=(\operatorname{sh}u,\operatorname{ch}u,0),\qquad r_v=(0,0,1),$$

$$r_u\times r_v=(\operatorname{ch}u,-\operatorname{sh}u,0),\qquad \|r_u\times r_v\|=\sqrt{\operatorname{ch}2u}\neq 0,$$

површ је регуларна.

(б) Одредити геодезијску и нормалну кривину криве $\alpha(t)=(\operatorname{ch}t,\operatorname{sh}t,t)$, $t\in\mathbb{R}$, на датом цилиндру. Да ли је то асимптотска или геодезијска линија?

Решење. Дата криве очигледно лежи на датом цилиндру због $\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1$ и њена једначина у карти је

$$u=v\quad(\text{тј. } u=t,\ v=t).$$

Како је

$$\alpha'(t)=(\operatorname{sh}t,\operatorname{ch}t,1),\qquad \|\alpha'(t)\|=\sqrt{2}\operatorname{ch}t,$$

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{2}\operatorname{ch}z\,dz=\sqrt{2}\operatorname{sh}t,$$

$$t=\operatorname{arsh}\frac{s\sqrt{2}}{2}=\ln(s+\sqrt{s^2+2})-\ln\sqrt{2},$$

природна параметризација криве α гласи

$$\alpha(s)=\left(\sqrt{\frac{s^2+2}{2}},\frac{s\sqrt{2}}{2},\operatorname{arsh}\frac{s\sqrt{2}}{2}\right),\quad s\in\mathbb{R}.$$

Јединична нормала површи $n(u,v)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}2u}}(\operatorname{ch}u,-\operatorname{sh}u,0)$ дуж криве α износи $n(t)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}2t}}(\operatorname{ch}t,-\operatorname{sh}t,0)$, односно

$$n(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\left(\sqrt{\frac{s^2+2}{2}},-\frac{s\sqrt{2}}{2},0\right).$$

Како је

$$T(s)=\alpha'(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{2(s^2+2)}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{s^2+2}}\right),$$

$$T'(s)=\alpha''(s)=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(s^2+2)^3}},0,\frac{-s}{\sqrt{(s^2+2)^3}}\right),$$

добијамо геодезијску и нормалну кривину криве α на датом цилиндру

$$\kappa_g=[n,\alpha',\alpha'']=\frac{-s}{(s^2+2)\sqrt{s^2+1}},$$

$$\kappa_n=\langle n,\alpha''\rangle=\frac{1}{(s^2+2)\sqrt{s^2+1}}.$$

Могуће је користити и параметризацију криве α дату у задатку, уместо природне параметризације, али су тада и формуле за геодезијску и нормалну кривину другачије:

$$\kappa_g=\frac{[n,\alpha',\alpha'']}{\|\alpha'\|^3}=\frac{-\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}^2 t\sqrt{2\operatorname{ch}2t}},$$

$$\kappa_n=\frac{\mathrm{II}(\alpha',\alpha')}{\mathrm{I}(\alpha',\alpha')}=\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 t\sqrt{\operatorname{ch}2t}},$$

где је $\alpha'=r_u+r_v=(1,1)$ (због $t=u=v$), а матрице прве и друге форме дате су у наредном делу задатка. Како је $\kappa_n\neq 0$ и $\kappa_g\neq 0$, дата крива није ни геодезијска, ни асимптотска линија на датом цилиндру.

(в) Одредити главне кривине, Гаусову и средњу кривину датог цилиндра. Који је тип тачака на цилиндру?

Решење. Како је

$$r_{uu}=(\operatorname{ch}u,\operatorname{sh}u,0),\qquad r_{uv}=r_{vv}=(0,0,0),$$

матрице прве и друге фундаменталне форме су

$$[\mathrm{I}]=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}2u & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad [\mathrm{II}]=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}2u}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Матрица оператора облика је

$$[\mathrm{S}]=[\mathrm{I}]^{-1}\cdot[\mathrm{II}]=\begin{pmatrix}\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}2u})^3} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

па су главне, Гаусова и средња кривина датог цилиндра

$$\kappa_1=\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}2u})^3},\qquad \kappa_2=0,$$

$$K=\kappa_1\cdot\kappa_2=0,\qquad H=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}=\frac{1}{2(\sqrt{\operatorname{ch}2u})^3}.$$

Све тачке на датом цилиндру су параболичке јер је тачно једна главна кривина једнака 0.

(г) Одредити нормалну кривину датог цилиндра дуж праваца тангентне равни који полове углове између главних праваца.

Решење. Како је матрица оператора облика дијагонална због $F=f=0$, главни правци су управо r_u и r_v и нормални су међусобно. Јединични главни правци су

$$e_1=\frac{r_u}{\|r_u\|}=\frac{r_u}{\sqrt{E}}=\frac{r_u}{\sqrt{\operatorname{ch}2u}},$$

$$e_2=\frac{r_v}{\|r_v\|}=\frac{r_v}{\sqrt{G}}=r_v.$$

Правци који у тангентној равни полове углове између вектора e_1, e_2 су $w_1=e_1+e_2$, $w_2=e_1-e_2$, а тражена нормална кривина

$$\kappa_n(w_1)=\frac{\mathrm{II}(w_1,w_1)}{\mathrm{I}(w_1,w_1)}=\frac{1}{2(\sqrt{\operatorname{ch}2u})^3},$$

$$\kappa_n(w_2)=\frac{\mathrm{II}(w_2,w_2)}{\mathrm{I}(w_2,w_2)}=\frac{1}{2(\sqrt{\operatorname{ch}2u})^3}.$$

Исти резултат добија се и коришћењем Ојлерове теореме. Заиста, јединични правци $\widetilde{w_1}$ и $\widetilde{w_2}$ који полове углове између главних праваца заклапају са правцем e_1 редом углове $\pm\frac{\pi}{4}$ (или $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$) и износе

$$\widetilde{w_1} = \cos\frac{\pi}{4}e_1 + \sin\frac{\pi}{4}e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\operatorname{ch}2u}}r_u + \frac{\sqrt{2}}{2}r_v = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}u}{\sqrt{2\operatorname{ch}2u}}, \frac{\operatorname{ch}u}{\sqrt{2\operatorname{ch}2u}}, 1\right),$$

$$\widetilde{w_2} = \cos\frac{\pi}{4}e_1 - \sin\frac{\pi}{4}e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\operatorname{ch}2u}}r_u - \frac{\sqrt{2}}{2}r_v = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}u}{\sqrt{2\operatorname{ch}2u}}, \frac{\operatorname{ch}u}{\sqrt{2\operatorname{ch}2u}}, -1\right).$$

па је нормална кривина дуж ових праваца

$$\kappa_n(\widetilde{w_1}) = \kappa_n(\widetilde{w_2}) = \cos^2\frac{\pi}{4}\cdot\kappa_1 + \sin^2\frac{\pi}{4}\cdot\kappa_2 = \frac{1}{2}\kappa_1 = \frac{1}{2(\sqrt{\operatorname{ch}2u})^3}.$$

(д) Одредити асимптотске и главне линије (линије кривине) на датом цилиндру.

Решење. Главне линије $r(u(t), v(t))$ се добијају као решења диференцијалне једначине

$$\begin{vmatrix} -v'^2 & u'v' & -u'^2 \\ \operatorname{ch}2u & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}2u}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Како је $F = f = 0$, ова једначина се своди на $u'v' = 0$, односно $u' = 0$ или $v' = 0$, па су решења криве $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$, тј. све координатне линије (гране хиперболе и изводнице цилиндра).

Асимптотске линије $r(u(t), v(t))$ су решења диференцијалне једначине

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}2u}}u'^2 = 0,$$

због $f = g = 0$, одакле добијамо криве $u = \mathrm{const}$ (изводнице цилиндра). Последњи резултат је очекиван јер су праве на површи увек асимптотске линије, а на датом цилиндру и једине јер су све тачке параболичке и постоји само један асимптотски правац у свакој тачки цилиндра.