

Geometrija 3, jun 2, 18.06.2013.

1. Involuta regularne prirodno parametrizovane krive $\alpha(s)$ je kriva $\beta(s) = \alpha(s) - sT(s)$.

- (a) Ako je kriva α ravanska, odrediti krivinu krive β .
- (b) Odrediti parametrizaciju involute lančanice $x = \operatorname{ch} y$.
- (c) Za krivu dobijenu u (b) odrediti jednačinu tangente u proizvoljnoj tački.

Rešenje Parametar s koji je prirodni parametar krive α , nije prirodni parametar krive β , pa se krivina mora računati po formulama za proizvoljnu parametrizaciju. Iz uslova da je α ravanska kriva zaključujemo da je $\tau = 0$ i primenom freneovih formula dobijamo:

$$\begin{aligned}\beta' &= -s\kappa N, \\ \beta'' &= s\kappa^2 T - (\kappa + s\kappa')N, \\ \beta' \times \beta'' &= -s\kappa N \times (s\kappa^2 T - (\kappa + s\kappa')N) = s^2 \kappa^3 B, \\ \kappa_\beta &= \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

Lančanica $x = \operatorname{ch} y$ je parametrizovana sa $\alpha(t) = (\operatorname{ch} t, t)$. Da bi primenili rezultat iz dela (a) treba prći na prirodni parametar s .

$$s = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \operatorname{sh} t, \quad t = \operatorname{arsh} s$$

Zamenom dobijamo prirodnu parametrizaciju lančanice $\alpha(s) = (\sqrt{1+s^2}, \operatorname{arsh} s)$. Diferenciranjem se dobija tangentni vektor $T(s) = (\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}})$. Jednačina involute je dakle, $\beta(s) = \alpha(s) - sT(s) = (\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \operatorname{arsh} s - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}})$. Vektor pravca tangente je izvod $\beta'(s) = (-\frac{s}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{s^2}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}) = \frac{s}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}(-1, s)$. Jednačina tangente na krivu β u proizvoljnoj tački glasi:

$$\frac{x - \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}}{-1} = \frac{y - (\operatorname{arsh} s - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}})}{s}.$$

2. Data je površ $r(u, v) = (u \operatorname{ch} v, 2u \operatorname{sh} v, 4u^2)$, $u > 0$, $v \in \mathbb{R}$. Kriva α je skup tačaka date površi u kojima tangentne ravni sadrže tačku $(0, 2, 0)$. Odrediti parametrizaciju krive α i jednačine njene tangente u tački M $u = 2 \operatorname{sh} 1$, $v = -1$.

Rešenje Direktnim računom se dobija $r_u \times r_v = 2u(-8u \operatorname{ch} v, 4u \operatorname{sh} v, 1)$, pa je jednačina tangentne ravni π u proizvoljnoj tački je

$$-8u \operatorname{ch} v(x - u \operatorname{ch} v) + 4u \operatorname{sh} v(y - 2u \operatorname{sh} v) + (z - 4u^2) = 0.$$

Iz uslova da tačka $(0, 2, 0)$ pripada ravni π dobija se uslov $4u(u + 2 \operatorname{sh} v) = 0$, odnosno (zbog $u > 0$) $u = -2 \operatorname{sh} v$. Jednačina krive α je $\alpha(v) = r(-2 \operatorname{sh} v, v) = (-\operatorname{sh} 2v, -4 \operatorname{sh}^2 v, 16 \operatorname{sh}^2 v)$. Tačka M se dobija za $v = -1$ tj. $M = \alpha(-1)$, pa je vektorska jednačina tangente u tački M $v = \alpha(1) + \lambda \alpha'(1)$ ili u skalarnom obliku

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{sh} 2 - 2\lambda \operatorname{ch} 2, \\ y &= -4 \operatorname{sh}^2 1 + 4\lambda \operatorname{sh} 2, \\ z &= 16 \operatorname{sh}^2 1 - 16\lambda \operatorname{sh} 2.\end{aligned}$$

3. Data je elementarna površ $f(u, v) = (\frac{\cos v}{\operatorname{ch} u}, \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u}, \operatorname{th} u)$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$.

- (a) Izračunati glavne, Gausovu i srednju krivinu date površi.
- (b) Odrediti krive (loksodrome) koje zaklapaju konstantan oštar ugao φ sa koordinatnim linijama $v = \operatorname{const}$.
- (c) Odrediti geodezijske linije među koordinatnim linijama. Dokazati da su krive date sa $v = \pm \int \frac{C \operatorname{ch} u}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{ch}^2 u}} du$, $C = \operatorname{const}$, geodezijske linije.

(d) Odrediti sve asimptotske linije i linije krivine na datoj površi.

Rešenje

Direktnim računom se dobija

$$n = -\frac{1}{\operatorname{ch} u}(\cos v, \sin v, \operatorname{sh} u),$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \end{pmatrix},$$

$$II = \begin{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \end{pmatrix}.$$

Vajngartenov operator $L = II I^{-1}$ jednak je jediničnoj matrici, pa sledi da su glavne krivine (sopstvene vrednosti od L) $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. Takodje, dobija se da su srednja i gausova krivina $H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L = 1$ i $K = \det L = 1$. Ako je lokosdroma data (u karti) kao $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ i meridijan $\mu(u) = (u, v_0)$ dobijaju se sledeći skalarni proizvodi:

$$\langle \alpha', \mu' \rangle = \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u},$$

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}(u'^2 + v'^2),$$

$$\langle \mu', \mu' \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}.$$

Iz uslova da je ugao između krivih α i μ konstantan sledi $\cos \varphi = \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}$. Kvadriranjem i daljim sređivanjem ovog uslova dobija se $v' = \pm \operatorname{tg} \varphi u'$, odnosno posle jedne integracije $v + C = \operatorname{tg} \varphi u$.

Iz parametrizacije se vidi da je u pitanju rotaciona površ (preciznije u pitanju je Merkatorova projekcija sfere), pa su meridijani svakako geodezijske linije, a paralele su geodezijske akko je $G_u = 0$, tj. $u = 0$. Kristofelovi simboli koji su različiti od nule su

$$\Gamma_{11}^1 = -\operatorname{th} u, \quad \Gamma_{22}^1 = \operatorname{th} u, \quad \Gamma_{12}^2 = -\operatorname{th} u.$$

Jednačine geodezijskih linija i uslov da je kriva prirodno parametrizovana glase

$$u'' - \operatorname{th} u u'^2 + \operatorname{th} u v'^2 = 0,$$

$$v'' - 2 \operatorname{th} u u' v' = 0,$$

$$u'^2 + v'^2 = \operatorname{ch}^2 u.$$

Iz druge od njih sledi $\frac{v''}{v'} = 2 \operatorname{th} u u'$, pa se integracijom dobija $\ln v' = 2 \ln \operatorname{ch} u + \ln C$ odnosno $v' = C \operatorname{ch}^2 u$. Zamenom ovog izraza u uslovda je kriva prirodno parametrizovana dobija se $u' = \pm \operatorname{ch} u \sqrt{1 - C^2 \operatorname{ch}^2 u}$. Iz ovih izraza sledi

$$\frac{dv}{du} = \frac{v'}{u'} = \pm \frac{C \operatorname{ch} u}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{ch}^2 u}}$$

$$v = \pm \int \pm \frac{C \operatorname{ch} u}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{ch}^2 u}} du.$$

Jednačina asimptotskih linija glasi $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}(u'^2 + v'^2) = 0$. Jedino rešenje ove jednačine je $u' = v' = 0$ tj. $u = \operatorname{const}$ i $v = \operatorname{const}$, što nije jednačina regularne krive, pa asimptotske linije na ovako parametrizovanoj sferi ne postoje. Jednačina glavnih linija glasi:

$$\begin{vmatrix} -v'^2 & u'v' & -u'^2 \\ \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} & 0 & 1\operatorname{ch}^2 u \\ 1\operatorname{ch}^2 u & 0 & 1\operatorname{ch}^2 u \end{vmatrix} = 0$$

Druga i treća vrsta ove determinante su jednake pa jednakost važi za svaku (regularnu) krivu na sferi. Dakle svaka regularna kriva na sferi je glavna linija.

4. U poluravanskom modelu \mathcal{L}^2 hiperboličke geometrije sa prvom formom $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ date su tačke $A(-7, 2)$ i $B(-\frac{11}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2})$. Preslikavanje f je simetrija u odnosu na pravu $u = -1$ a g je dato formulama $u' = 3 + \frac{4(u-3)}{(u-3)^2+v^2}$, $v' = \frac{4v}{(u-3)^2+v^2}$.

(a) Ispitati koja od preslikavanja f , g i $g \circ f$ su izometrije.

(b) Odrediti jednačinu prave AB i njene slike pri preslikavanju $g \circ f$. Kolika je dužina duži AB ?

Rešenje Analitički preslikavanje f je dato formulama $u' = -2 - u$ i $v' = v$. Iz ovih formula direktno (kao u zadatku sa vezbi) sledi da je f izometrija. Preslikavanje g predstavlja inverziju u odnosu na krug $(u-3)^2+v^2 = 4$.

$$\begin{aligned} du' &= \frac{4}{((u-3)^2+v^2)^2} \left((v^2 - (u-3)^2)du - 2(u-3)v dv \right), \\ dv' &= \frac{4}{((u-3)^2+v^2)^2} \left(-2(u-3)v du + ((u-3)^2 - v^2)dv \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du'^2 + dv'^2}{v'^2} &= \frac{1}{v^2((u-3)^2+v^2)^2} \left((v^2 - (u-3)^2)^2 du^2 - 2(u-3)v(v^2 - (u-3)^2) dudv + 4(u-3)^2 v^2 dv^2 \right. \\ &\quad \left. + 4(u-3)^2 v^2 du^2 - 2(u-3)v((u-3)^2 - v^2) dudv + (v^2 - (u-3)^2)^2 dv^2 \right) \\ &= \frac{du^2 + dv^2}{v^2((u-3)^2+v^2)^2} \left((v^2 - (u-3)^2)^2 + 4(u-3)^2 v^2 \right) = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}. \end{aligned}$$

Dakle g je izometrija.

Drugi način da se pokaže da je g izometrija je da se napise kao kompozicija $g = \tau^{-1} \circ \psi \circ \tau$, gde je τ translacija za vektor $(-3, 0)$, i ψ inverzija u odnosu na krug sa centrom u koordinatnom početku polluprečnika 2. Preslikavanja τ i ψ su izometrije prema zadatku sa vezbi, a time su i njihovi inverzi, pa je g izometrija kao kompozicija 3 izometrije.

Preslikavanje $g \circ f$ je izometrija kao kompozicija izometrija. Postoje su u koordinate tačka A i B različite h -prava AB je euklidski krug sa centrom na u -osi ija je jednačina $(u-c)^2 + v^2 = r^2$. Zamenom koordinata tačaka A i B dobija se $(u+7)^2 + v^2 = 4$. Neka je $C = g(f(A))$ i $D = g(f(B))$. Tada su njihove koordinate $C(4, 1)$ i $D(4, \sqrt{7})$. Jednačina prave $CD = g(f(AB))$ je $u = 4$. Na kraju dužina duži AB je

$$AB = CD = \int_1^{\sqrt{7}} \frac{dt}{t} = \ln \sqrt{7}.$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$