

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, октобар 2011.

1. Решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned}4x + 5y + 18z + 8t &= 0 \\x + 2y + 3z + 2t &= -3 \\x + y + 3z + 4t &= -3 \\3x + 2y + 11z + 12t &= -5\end{aligned}$$

2. Нека је U потпростор векторског простора \mathbb{R}^4 генерисан векторима

$$\begin{aligned}u_1 &= (3, 4, 5, 2) \\u_2 &= (2, 4, 4, 2) \\u_3 &= (2, 2, 3, 1), \\u_4 &= (-4, 2, -3, 1),\end{aligned}$$

а V потпростор генерисан векторима

$$\begin{aligned}v_1 &= (0, 5, 2, 2) \\v_2 &= (0, 0, 1, 1).\end{aligned}$$

Наћи базу и димензију за просторе U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарни оператор дефинисан са

$$L(x, y, z, t) = (y + 2z - 3t, 5x + 14y + 23z - 7t, 2x + 6y + 10z - 4t).$$

а) Одредити матрицу оператора L у односу на пар канонских база простора \mathbb{R}^4 и \mathbb{R}^3 .

б) Израчунати ранг и дефект оператора L , као и неке базе простора ImL и $KerL$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -3 & 7 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и у случају да јесте, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (-5, 17, -1, 5)$ на потпростор U векторског простора \mathbb{R}^4 који је генерисан векторима

$$e_1 = (1, 3, -2, 0) \text{ и } e_2 = (2, -1, 1, 1).$$

Затим одредити којем од потпростора U или U^\perp је ближи вектор v .

6. Нека је V потпростор простора \mathbb{R}^4 генерисан векторима

$$f_1 = (3, 0, 2, 1), f_2 = (8, 5, 0, 4) \text{ и } f_3 = (6, 5, 1, 8).$$

Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V у односу на стандардни скаларни производ.