

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, јануар 2011.

1. Решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned}x + y + 5z + 2t &= 1 \\2x + y + 3z + 2t &= -3 \\x + y + 3z + 4t &= -3 \\2x + 3y + 11z + 12t &= -5.\end{aligned}$$

2. Нека је U потпростор векторског простора \mathbb{R}^4 генерисан векторима

$$\begin{aligned}u_1 &= (1, 0, 1, 0) \\u_2 &= (-1, 2, 0, 1) \\u_3 &= (3, 2, 4, 1) \\u_4 &= (-4, 2, -3, 1),\end{aligned}$$

а V потпростор генерисан векторима

$$\begin{aligned}v_1 &= (0, 2, 1, 1) \\v_2 &= (0, 0, 1, 1).\end{aligned}$$

Наћи базу и димензију за просторе U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора \mathbb{R}^3 дефинисан са $L(x, y, z) = (x - 2y - 3z, y + z, 2x - 4y - 5z)$.

а) Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу e простора \mathbb{R}^3 .

б) Израчунати ранг и дефект оператора L .

в) Испитати да ли је L инвертибилан и у случају да јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на базу e .

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и у случају да јесте, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (1, 1, 1, 1)$ на потпростор U векторског простора \mathbb{R}^4 који је генерисан векторима

$$e_1 = (1, -1, -1, -1) \text{ и } e_2 = (-1, 1, -1, -1).$$

Затим израчунати растојање вектора v од потпростора U као и угао који вектор v заклапа са потпростором U .

6. Нека је V потпростор простора \mathbb{R}^4 генерисан векторима

$$f_1 = (1, 2, 0, 3), f_2 = (4, 0, 5, 8) \text{ и } f_3 = (8, 1, 5, 6).$$

Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V у односу на стандардни скаларни производ.