

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, фебруар 2011.

1. Решити систем линеарних једначина:

$$3x + 2y + 2z + 2t = 2$$

$$2x + 3y + 2z + 5t = 3$$

$$9x + y + 4z - 5t = 1$$

$$2x + 2y + 3z + 4t = 5$$

2. Нека је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$u_1 = (3, 5, 2, -1)$$

$$u_2 = (1, 0, -1, -2)$$

$$u_3 = (4, 1, -1, -8),$$

а V потпростор генерисан векторима

$$v_1 = (5, 1, 4, 4)$$

$$v_2 = (4, 5, 1, -3).$$

Наћи базу и димензију за просторе U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарни оператор дефинисан са

$$L(x, y, z) = (x + 2y + 3z + t, x + 3y + 5z - 2t, 3x + 8y + 13z - 3t).$$

а) Одредити матрицу оператора L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.

б) Израчунати ранг и дефект оператора L , као и неке базе простора ImL и $KerL$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и у случају да јесте, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (2, 2, 1, 1)$ на потпростор U векторског простора $\mathbb{R}^4$ који је генерисан векторима

$$e_1 = (3, 4, -4, -1) \text{ и } e_2 = (4, 1, -1, 2).$$

Затим одредити којем од потпростора U или $U^\perp$ је ближи вектор v .

6. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$f_1 = (1, -1, 0, 2), f_2 = (2, 0, 1, 2) \text{ и } f_3 = (3, -2, 3, 4).$$

Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V у односу на стандардни скаларни производ.