

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, април 2011.

1. Решити систем линеарних једначина:

$$x - 4y + 9z + 10t = 11$$

$$2x - y + 3z + 4t = 5$$

$$4x - 2y + 5z + 6t = 7$$

$$6x - 3y + 7z + 8t = 9.$$

2. Нека је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$u_1 = (1, 0, -3, 2)$$

$$u_2 = (2, 1, -4, 1)$$

$$u_3 = (-1, 1, 5, -5),$$

а V потпростор генерисан векторима

$$v_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$v_2 = (2, 3, 8, 3)$$

$$v_3 = (2, 1, -4, 1).$$

Наћи базу и димензију за просторе U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са $L(x, y, z) = (-x + 2y + z, 2x + y - z, -2x + z)$.

а) Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

б) Испитати да ли је L инвертибилан и у случају да јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на базу e .

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и у случају да јесте, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (1, 0, -1)$ на потпростор U векторског простора $\mathbb{R}^3$ који је генерисан векторима $e_1 = (3, 1, 5)$ и $e_2 = (2, 1, 3)$.

Затим израчунати растојање вектора v од потпростора U као и угао који вектор v заклапа са потпростором U .

6. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$f_1 = (1, 1, 1, 1), f_2 = (1, 2, 2, 3) \text{ и } f_3 = (1, 0, 1, 0).$$

Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V у односу на стандардни скаларни производ.