Линеарна алгебра и аналитичка геометрија **15.01.2011.**
Други колоквијум, друга група

1. Израчунати $\begin{vmatrix} 26 & 4 & 20 & 12 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 11 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

2. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ линеарно пресликавање векторског простора $\mathbb{R}^3$ на векторски простор $\mathbb{R}^4$ дато формулом $L(x, y, z) = (2x + 2y + 8z, 3x - 8y - 8z, x - 3y - 16z, x - z)$.
а) Одредити матрицу пресликавања L
б) Одредити базу и димензију слике и језгра пресликавања L.

3. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Затим одредити спостевне вредност и сопствене векторе матрице A. Испитати да ли је матрица A дијагонализабилна и ако јесте одредити матрицу P и дијагоналну матрицу D тако да је $A = P^{-1}DP$.

4. Доказати да је са $<(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)>= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2 + 25x_3y_3$ дефинисан скаларни производ на $\mathbb{R}^3$.

5. Нека је U потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $u_1 = (1, 0, 2, -2)$, $u_2 = (2, 1, 0, -2)$ и $u_3 = (1, -1, 1, 0)$. Грам шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за U у односу на стандардни скаларни производ на $\mathbb{R}^4$.

Додатни задаци

6. Одредити ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

7. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.
Нека је U свих матрица X из $M_2(\mathbb{R})$ за које важи да је $A^T X = XA$.
Доказати да је U један векторски потпростор простора $M_2(\mathbb{R})$ и одредити бар једну његову базу и димензију.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија **15.01.2011.**
Други колоквијум, друга група

1. Израчунати $\begin{vmatrix} 26 & 4 & 20 & 12 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 11 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

2. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ линеарно пресликавање векторског простора $\mathbb{R}^3$ на векторски простор $\mathbb{R}^4$ дато формулом $L(x, y, z) = (2x + 2y + 8z, 3x - 8y - 8z, x - 3y - 16z, x - z)$.
а) Одредити матрицу пресликавања L
б) Одредити базу и димензију слике и језгра пресликавања L.

3. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Затим одредити спостевне вредност и сопствене векторе матрице A. Испитати да ли је матрица A дијагонализабилна и ако јесте одредити матрицу P и дијагоналну матрицу D тако да је $A = P^{-1}DP$.

4. Доказати да је са $<(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)>= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2 + 25x_3y_3$ дефинисан скаларни производ на $\mathbb{R}^3$.

5. Нека је U потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $u_1 = (1, 0, 2, -2)$, $u_2 = (2, 1, 0, -2)$ и $u_3 = (1, -1, 1, 0)$. Грам шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за U у односу на стандардни скаларни производ на $\mathbb{R}^4$.

Додатни задаци

6. Одредити ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

7. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.
Нека је U свих матрица X из $M_2(\mathbb{R})$ за које важи да је $A^T X = XA$.
Доказати да је U један векторски потпростор простора $M_2(\mathbb{R})$ и одредити бар једну његову базу и димензију.