

Geometrija 5, jun 2012.

1. Neka je A proizvoljna tačka afinog prostora \mathcal{A} dimenzije bar 4, b prava i γ ravan u \mathcal{A} . Označimo sa $T(A, B, C)$ težište trougla ABC i $\Pi = \{T(A, B, C) | B \in b, C \in \gamma\}$. Dokazati da je Π potprostor od \mathcal{A} paralelan sa b i γ . Koja je dimenzija potprostora Π (diskutovati)?
2. Ako je τ translacija za vektor a i η homotetija sa koeficijentom $\alpha \neq 1$ i središtem S , dokazati da je kompozicija $\eta \circ \tau$ homotetija i odrediti njen centar P i koeficijent β . Skicirati putanju proizvoljne tačke za $\alpha = -1$.
3. U euklidskom prostoru data je transformacija ψ svojim formulama u odnosu na ortonormirani reper $Oe_1e_2e_3$: $x' = -z + 1$, $y' = -x$, $z' = y - 2$. Dokazati da je ψ izometrija, odrediti osnovne komponente i skicirati putanju proizvoljne tačke.
4. Transformacija ψ projektivne ravni je data formulama: $\lambda x'_1 = -4x_1 + 5x_2 + 5x_3$, $\lambda x'_2 = x_2 + 5x_3$, $\lambda x'_3 = 5x_2 + x_3$.
 - (a) Odrediti fiksne tačke i fiksne prave. Da li je transformacija ψ homologija? Ako jeste, odrediti joj centar i osu.
 - (b) Neka su date tačke u proširenoj afinoj ravni $A(0, -1)$, $B(2, -1)$, $C(0, 1)$. Odrediti slike trougla ABC , opisanog kruga trougla ABC i njihovih unutrašnjosti pri transformaciji ψ .
 - (c) Odrediti novi koordinatni sistem u kome je ψ homotetija. Da li postoji koordinatni sistem u kome je preslikavanje ψ translacija?
5. U projektivnoj ravni data je kriva $\Gamma : x_1^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 3x_1x_3 = 0$. Odrediti tangente na krivu Γ iz tačke $A(-2 : 0 : 1)$. Neka su T i S dodirne tačke ovih tangenti. Odrediti bar još jednu krivu drugog reda koja sadrži tačke T i S , a prave AT i AS su joj tangente.
6.
 - (a) Ako su D, E, F redom središta stranica BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$, dokazati da su prave DE, DF, DA i DB harmonijski konjugovane.
 - (b) Ako elipsa Σ seče stranice trougla BC, CA, AB trougla ABC redom u tačkama D i D', E i E', F i F' , dokazati da su prave AD', BE', CF' konkurentne.