Писмени испит из Геометрије 3, 11. септембар 2016.

1. Одредити природну параметризацију ланчанице $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $a > 0$, а затим параметризацију њене инволуте са почетком у тачки $(0, a)$.

2. Крива $\alpha(s)$ за коју важи $\kappa(s) > 0$, $\tau(s) \neq 0$, параметризована је дужином лука и лежи на сфери полупречника r. Доказати да важи $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2 = r^2$, где је $\rho = \frac{1}{\kappa}$, $\sigma = \frac{1}{\tau}$.

3. Дат је хеликоид $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, $u > 0$, $v \in \mathbb{R}$.

(а) Доказати да су главне линије на хеликоиду дате формулом $v = \pm\operatorname{arsh} u + \text{const}$.

(б) Параметризовати хеликоид тако да му координатне линије буду главне линије, а затим доказати да је та параметризација конформна.

4. Дат је конус $z = \sqrt{8(x^2 + y^2)}$.

(а) Одредити формуле локалне изометрије између датог конуса и дела равни.

(б) Одредити најкраће растојање на конусу између тачака $A(0, 1, 2\sqrt{2})$ и $B(0, -1, 2\sqrt{2})$.

(ц) Одредити једначине кривих које полове угао између изводница и паралела на конусу.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

Писмени испит из Геометрије 3, 11. септембар 2016.

1. Одредити природну параметризацију ланчанице $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $a > 0$, а затим параметризацију њене инволуте са почетком у тачки $(0, a)$.

2. Крива $\alpha(s)$ за коју важи $\kappa(s) > 0$, $\tau(s) \neq 0$, параметризована је дужином лука и лежи на сфери полупречника r. Доказати да важи $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2 = r^2$, где је $\rho = \frac{1}{\kappa}$, $\sigma = \frac{1}{\tau}$.

3. Дат је хеликоид $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, $u > 0$, $v \in \mathbb{R}$.

(а) Доказати да су главне линије на хеликоиду дате формулом $v = \pm\operatorname{arsh} u + \text{const}$.

(б) Параметризовати хеликоид тако да му координатне линије буду главне линије, а затим доказати да је та параметризација конформна.

4. Дат је конус $z = \sqrt{8(x^2 + y^2)}$.

(а) Одредити формуле локалне изометрије између датог конуса и дела равни.

(б) Одредити најкраће растојање на конусу између тачака $A(0, 1, 2\sqrt{2})$ и $B(0, -1, 2\sqrt{2})$.

(ц) Одредити једначине кривих које полове угао између изводница и паралела на конусу.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$