

Писмени испит из Геометрије 3, 13. јун 2016.

1. Доказати да је једина раванска крива (до на директну изометрију) чија је означена кривина $\kappa_z(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ (s је природни параметар) кружна инволута.
2. Нека је $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива таква да вектор положаја сваке тачке $\alpha(s)$ лежи у ректификационој равни криве у тој тачки. Доказати да је однос торзије и кривине дате криве линеарна функција по природном параметру s .
3. Доказати да тангентна раван хиперболичког параболоида $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ у произвољној тачки сече параболоид по два права која су симетрична у односу на главне правце параболоида, а затим параметризовати дати параболоид као праволинијску површ.
4. Псеудосфера је ротациона површ $r(u, v) = (\frac{\cos v}{\operatorname{ch} u}, \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u}, u - \operatorname{th} u)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$, добијена ротацијом око z -осе трактресе у xz -равни.
 - (а) Доказати да је формулама $x = v$, $y = \operatorname{ch} u$, дата локална изометрија псеудосфере и површи $h(x, y)$ чији су коефицијенти прве фундаменталне форме $E = G = \frac{1}{y^2}$, $F = 0$.
 - (б) Доказати да су геодезијске на псеудосфери сви меридијани, као и криве дате једначином $\operatorname{ch}^2 u + (v - D)^2 = \frac{1}{C^2}$, $C, D = \operatorname{const}$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

Писмени испит из Геометрије 3, 13. јун 2016.

1. Доказати да је једина раванска крива (до на директну изометрију) чија је означена кривина $\kappa_z(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ (s је природни параметар) кружна инволута.
2. Нека је $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива таква да вектор положаја сваке тачке $\alpha(s)$ лежи у ректификационој равни криве у тој тачки. Доказати да је однос торзије и кривине дате криве линеарна функција по природном параметру s .
3. Доказати да тангентна раван хиперболичког параболоида $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ у произвољној тачки сече параболоид по два права која су симетрична у односу на главне правце параболоида, а затим параметризовати дати параболоид као праволинијску површ.
4. Псеудосфера је ротациона површ $r(u, v) = (\frac{\cos v}{\operatorname{ch} u}, \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u}, u - \operatorname{th} u)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$, добијена ротацијом око z -осе трактресе у xz -равни.
 - (а) Доказати да је формулама $x = v$, $y = \operatorname{ch} u$, дата локална изометрија псеудосфере и површи $h(x, y)$ чији су коефицијенти прве фундаменталне форме $E = G = \frac{1}{y^2}$, $F = 0$.
 - (б) Доказати да су геодезијске на псеудосфери сви меридијани, као и криве дате једначином $\operatorname{ch}^2 u + (v - D)^2 = \frac{1}{C^2}$, $C, D = \operatorname{const}$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$