Писмени испит из Геометрије 3, 17.9.2015.

1. Доказати да је једина раванска крива чија је означена кривина $\kappa_z(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ (a је позитивна реална константа, s је природни параметар) ланчаница.

2. Нека је $\alpha(u)$, $u \in I$, природно параметризована крива кривине $\kappa \neq 0$ и $r(u,v)$ површ дата са $r(u,v) = \alpha(u) + vB(u)$, $u \in I,\ v \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, где је $B(u)$ бинормално векторско поље криве α.

(а) Испитати регуларност дате површи.

(б) Израчунати геодезијску кривину координатних линија дате површи. Које координатне линије су геодезијске на датој површи?

(в) Уколико крива α има константну торзију τ, доказати да су криве $u = \displaystyle\int \frac{C}{\sqrt{1+v^2\tau^2}\sqrt{1+v^2\tau^2-C^2}}\,dv,\ C =$ const, геодезијске линије на датој површи.

3. Дате су следеће површи (a је позитивна реална константа)

$$r(u,v) = (a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, au), \qquad (u,v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi),$$
$$f(z,w) = (z \cos w, z \sin w, aw), \qquad (z,w) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

(а) Доказати да су дате површи изометричне.

(б) Доказати да у тангентним равнима свих тачака датих површи постоје тачно два асимптотска правца, који заклапају угао $\dfrac{\pi}{4}$ са главним правцима.

(в) Доказати да се главне и асимптотске линије површи r редом сликају у асимптотске и главне линије површи f при изометрији између датих површи.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}$$
$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}$$

Писмени испит из Геометрије 3, 17.9.2015.

1. Доказати да је једина раванска крива чија је означена кривина $\kappa_z(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ (a је позитивна реална константа, s је природни параметар) ланчаница.

2. Нека је $\alpha(u)$, $u \in I$, природно параметризована крива кривине $\kappa \neq 0$ и $r(u,v)$ површ дата са $r(u,v) = \alpha(u) + vB(u)$, $u \in I,\ v \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, где је $B(u)$ бинормално векторско поље криве α.

(а) Испитати регуларност дате површи.

(б) Израчунати геодезијску кривину координатних линија дате површи. Које координатне линије су геодезијске на датој површи?

(в) Уколико крива α има константну торзију τ, доказати да су криве $u = \displaystyle\int \frac{C}{\sqrt{1+v^2\tau^2}\sqrt{1+v^2\tau^2-C^2}}\,dv,\ C =$ const, геодезијске линије на датој површи.

3. Дате су следеће површи (a је позитивна реална константа)

$$r(u,v) = (a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, au), \qquad (u,v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi),$$
$$f(z,w) = (z \cos w, z \sin w, aw), \qquad (z,w) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

(а) Доказати да су дате површи изометричне.

(б) Доказати да у тангентним равнима свих тачака датих површи постоје тачно два асимптотска правца, који заклапају угао $\dfrac{\pi}{4}$ са главним правцима.

(в) Доказати да се главне и асимптотске линије површи r редом сликају у асимптотске и главне линије површи f при изометрији између датих површи.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}$$
$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}$$