Писмени испит из Геометрије 3, 27.6.2015.

1. (а) Одредити кривину елипсе $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

(б) Доказати да је крива $\alpha(t)=(a\cos t, \frac{a\sqrt{2}}{2}\cos t-\frac{b\sqrt{2}}{2}\sin t, \frac{a\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{b\sqrt{2}}{2}\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$, елипса (a,b су позитивне реалне константе).

(в) Одредити једначину равни и елипсоида у чијем пресеку лежи траг криве α.

2. Нека је $\alpha(s)$, $s\in I$, природно параметризована крива кривине $0<\kappa(s)<C$, $C=\mathrm{const}$ и $r(s,t)$ површ дата са $r(s,t)=\alpha(s)+\varepsilon(\cos t\,N(s)+\sin t\,B(s))$, $s\in I$, $t\in(-\pi,\pi)$, $\varepsilon=\mathrm{const}>0$, где су $N(s)$, $B(s)$ нормално и бинормално векторско поље криве α.

(а) Доказати да је дата површ регуларна за довољно мало ε.

(б) Одредити број асимптотских праваца у свим тачкама површи (дискутовати и образложити одговор).

(в) Доказати да у свакој тачки површи постоје тачно два главна правца, као и да се они поклапају са правцима вектора брзине координатних линија акко је крива α раванска.

3. Дат је конус $x^2+y^2=z^2$, $z>0$.

(а) Одредити формуле изометрије између (дела) датог конуса и (дела) xOy равни.

(б) Доказати да се скуп свих геодезијских линија на конусу састоји од изводница конуса и кривих облика

$$\gamma(t)=\left(\frac{D\cos t}{\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}+C)},\frac{D\sin t}{\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}+C)},\frac{D}{\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}+C)}\right),\quad t\in\mathbb{R},\quad C,D=\mathrm{const},\quad D\neq 0.$$

(в) Одредити једначине кривих на датом конусу које заклапају угао $\dfrac{\pi}{3}$ са изводницама конуса.

$$\Gamma^1_{11}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)}\qquad \Gamma^1_{12}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)}\qquad \Gamma^1_{22}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma^2_{11}=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)}\qquad \Gamma^2_{12}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)}\qquad \Gamma^2_{22}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}$$

Писмени испит из Геометрије 3, 27.6.2015.

1. (а) Одредити кривину елипсе $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

(б) Доказати да је крива $\alpha(t)=(a\cos t, \frac{a\sqrt{2}}{2}\cos t-\frac{b\sqrt{2}}{2}\sin t, \frac{a\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{b\sqrt{2}}{2}\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$, елипса (a,b су позитивне реалне константе).

(в) Одредити једначину равни и елипсоида у чијем пресеку лежи траг криве α.

2. Нека је $\alpha(s)$, $s\in I$, природно параметризована крива кривине $0<\kappa(s)<C$, $C=\mathrm{const}$ и $r(s,t)$ површ дата са $r(s,t)=\alpha(s)+\varepsilon(\cos t\,N(s)+\sin t\,B(s))$, $s\in I$, $t\in(-\pi,\pi)$, $\varepsilon=\mathrm{const}>0$, где су $N(s)$, $B(s)$ нормално и бинормално векторско поље криве α.

(а) Доказати да је дата површ регуларна за довољно мало ε.

(б) Одредити број асимптотских праваца у свим тачкама површи (дискутовати и образложити одговор).

(в) Доказати да у свакој тачки површи постоје тачно два главна правца, као и да се они поклапају са правцима вектора брзине координатних линија акко је крива α раванска.

3. Дат је конус $x^2+y^2=z^2$, $z>0$.

(а) Одредити формуле изометрије између (дела) датог конуса и (дела) xOy равни.

(б) Доказати да се скуп свих геодезијских линија на конусу састоји од изводница конуса и кривих облика

$$\gamma(t)=\left(\frac{D\cos t}{\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}+C)},\frac{D\sin t}{\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}+C)},\frac{D}{\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}+C)}\right),\quad t\in\mathbb{R},\quad C,D=\mathrm{const},\quad D\neq 0.$$

(в) Одредити једначине кривих на датом конусу које заклапају угао $\dfrac{\pi}{3}$ са изводницама конуса.

$$\Gamma^1_{11}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)}\qquad \Gamma^1_{12}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)}\qquad \Gamma^1_{22}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma^2_{11}=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)}\qquad \Gamma^2_{12}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)}\qquad \Gamma^2_{22}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}$$