Geometrija 3
septembar 2, 19.9.2014.

1. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $0 \in I$, prirodno parametrizovana kriva koja u tački $s = 0$ ima krivinu κ_0, torziju τ_0 i Freneov reper $[T_0, N_0, B_0]$. Definišimo krivu $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ sa $\beta(t) = \alpha(0) + tT_0 + \frac{t^2}{2}\kappa_0 N_0 + \frac{t^3}{6}\kappa_0\tau_0 B_0$. Dokazati da su krivina, torzija i oskulatorna ravan krive β u tački $t = 0$ iste kao krivina, torzija i osklulatorna ravan krive α u tački $s = 0$.

2. Neka je $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ regularna površ čija je srednja krivina jednaka nuli $H = 0$ (minimalna površ).

(a) Dokazati da su sve tačke na površi $\mathcal{M}$ hiperboličke ili planarne.

(b) Dokazati da u svim tačkama površi $\mathcal{M}$ koje nisu umbiličke postoje tačno dva asimptotska pravca, koji su međusobno normalni i polove uglove između glavnih pravaca.

3. Dat je elipsoid $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$. Odrediti glavne, Gausovu i srednju krivinu elipsoida, kao i geodezijsku i normalnu krivinu paralela na datom elipsoidu.

4. Dat je parabolički cilindar svojom parametrizacijom $r(u,v) = (u^2, u, v)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Dokazati da je dati cilindar izometričan ravni i odrediti najmanje rastojanje između tačaka $(0,0,0)$ i $(1,1,1)$ mereno po cilindru. (Možete koristiti $\displaystyle\int \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+1} + \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\right) + \mathrm{const}$).

(b) Odrediti sve geodezijske linije na datom cilindru.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}$$

Geometrija 3
septembar 2, 19.9.2014.

1. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $0 \in I$, prirodno parametrizovana kriva koja u tački $s = 0$ ima krivinu κ_0, torziju τ_0 i Freneov reper $[T_0, N_0, B_0]$. Definišimo krivu $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ sa $\beta(t) = \alpha(0) + tT_0 + \frac{t^2}{2}\kappa_0 N_0 + \frac{t^3}{6}\kappa_0\tau_0 B_0$. Dokazati da su krivina, torzija i oskulatorna ravan krive β u tački $t = 0$ iste kao krivina, torzija i osklulatorna ravan krive α u tački $s = 0$.

2. Neka je $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ regularna površ čija je srednja krivina jednaka nuli $H = 0$ (minimalna površ).

(a) Dokazati da su sve tačke na površi $\mathcal{M}$ hiperboličke ili planarne.

(b) Dokazati da u svim tačkama površi $\mathcal{M}$ koje nisu umbiličke postoje tačno dva asimptotska pravca, koji su međusobno normalni i polove uglove između glavnih pravaca.

3. Dat je elipsoid $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$. Odrediti glavne, Gausovu i srednju krivinu elipsoida, kao i geodezijsku i normalnu krivinu paralela na datom elipsoidu.

4. Dat je parabolički cilindar svojom parametrizacijom $r(u,v) = (u^2, u, v)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Dokazati da je dati cilindar izometričan ravni i odrediti najmanje rastojanje između tačaka $(0,0,0)$ i $(1,1,1)$ mereno po cilindru. (Možete koristiti $\displaystyle\int \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+1} + \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\right) + \mathrm{const}$).

(b) Odrediti sve geodezijske linije na datom cilindru.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}$$