Geometrija 3
rok jun 2, 1.7.2014.

1. Data je kriva $\alpha(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin\frac{t}{2})$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

(a) Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje na jediničnoj sferi opisuje vrh tangentnog vektora krive α čiji je početak transliran u koordinatni početak.

(b) Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje su na rastojanju $4a^2\kappa$ duž glavne normale od krive α.

2. Neka je $\mathcal{M}$ površ dobijena rotacijom regularne C^∞ krive $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $f > 0$, $t \in \mathbb{R}$, oko $z-$ose.

(a) Neka je γ proizvoljna prirodno parametrizovana geodezijska na površi $\mathcal{M}$ i φ oštar ugao koji kriva γ zaklapa sa paralelom poluprečnika R. Dokazati da važi $R\cos\varphi = \mathrm{const}$.

(b) Odrediti površ $\mathcal{M}$ kod koje su sve koordinatne linije geodezijske linije.

3. Dato je sedlo $z = xy$.

(a) Odrediti glavne krivine, Gausovu, srednju i normalnu krivinu, kao i tip svih tačaka na sedlu.

(b) Odrediti glavne i asimptotske pravce sedla.Odrediti jednačine asimptotskih linija, kao i glavnih linija koje sadrže tačku $(0,0,0)$.

4. Date su površi

$$\begin{aligned} f(s,t) &= (s\cos t, s\sin t, t), & s \in \mathbb{R},\ t \in (0, 2\pi),\\ r(u,v) &= (\operatorname{ch} u\cos v, \operatorname{ch} u\sin v, u), & u \in \mathbb{R},\ v \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

(a) Dokazati da su date površi izometrične.

(b) Dokazati da su koordinate na površi f dobijene ovom izometrijom konformne. Odrediti jednačine krivih na toj površi koje polove ugao između koordinatnih linija.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

Geometrija 3
rok jun 2, 1.7.2014.

1. Data je kriva $\alpha(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin\frac{t}{2})$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

(a) Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje na jediničnoj sferi opisuje vrh tangentnog vektora krive α čiji je početak transliran u koordinatni početak.

(b) Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje su na rastojanju $4a^2\kappa$ duž glavne normale od krive α.

2. Neka je $\mathcal{M}$ površ dobijena rotacijom regularne C^∞ krive $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $f > 0$, $t \in \mathbb{R}$, oko $z-$ose.

(a) Neka je γ proizvoljna prirodno parametrizovana geodezijska na površi $\mathcal{M}$ i φ oštar ugao koji kriva γ zaklapa sa paralelom poluprečnika R. Dokazati da važi $R\cos\varphi = \mathrm{const}$.

(b) Odrediti površ $\mathcal{M}$ kod koje su sve koordinatne linije geodezijske linije.

3. Dato je sedlo $z = xy$.

(a) Odrediti glavne krivine, Gausovu, srednju i normalnu krivinu, kao i tip svih tačaka na sedlu.

(b) Odrediti glavne i asimptotske pravce sedla.Odrediti jednačine asimptotskih linija, kao i glavnih linija koje sadrže tačku $(0,0,0)$.

4. Date su površi

$$\begin{aligned} f(s,t) &= (s\cos t, s\sin t, t), & s \in \mathbb{R},\ t \in (0, 2\pi),\\ r(u,v) &= (\operatorname{ch} u\cos v, \operatorname{ch} u\sin v, u), & u \in \mathbb{R},\ v \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

(a) Dokazati da su date površi izometrične.

(b) Dokazati da su koordinate na površi f dobijene ovom izometrijom konformne. Odrediti jednačine krivih na toj površi koje polove ugao između koordinatnih linija.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$