Geometrija 3, R,V i L smer
januar, 28.01.2014.

1. Data je regularna kriva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$. Neka je $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ sferna kriva koju opisuje vrh tangentnog vektora krive α čiji je početak transliran u koordinatni početak, tj. $\beta(t) = T(t)$, $t \in I$.

(a) Ispitati regularnost krive β i odrediti njenu krivinu, torziju i Freneov reper preko odgovarajućih veličina krive α.

(b) Ukoliko je kriva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data sa $\alpha(t) = (2t - \sin 2t, -\cos 2t, 4\sin t)$, dokazati da je kriva β Vivijanijeva kriva, koja se nalazi u preseku jedinične sfere i cilindra $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

2. Neka je $\alpha(s)$ prostorna prirodno parametrizovana krivatakva da je $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$. Odrediti odnos torzije i krivine krve α, kao i intenzitet vektora položaja krive α.

3. Data je elementarna površ $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$, $(u,v) \in (0,+\infty) \times (0,2\pi)$, $a > 0$.

(a) Izračunati glavne, Gausovu i srednju krivinu date površi i skicirati je.

(b) Odrediti jednačine krivih na površi koje polove uglove između kordinatnih linija

(c) Odrediti geodezijske linije među koordinatnim linijama. Dokazati da se sve ostale geodezijske, oblika $v = v(u)$, dobijaju jednom integracijom.

(d) Odrediti sve asimptotske i glavne linije (linije krivine) na datoj površi.

4. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ hiperboličke geometrije data su preslikavanja $f : x' = 8 - x,\ y' = y$ i $g : x' = 8 + \frac{4(x-8)}{(x-8)^2+y^2},\ y' = \frac{4y}{(x-8)^2+y^2}$, tačke $A(2, 2\sqrt{3})$ i $B(2, 2\sqrt{5})$. Dokazati da je kompozicija $f \circ g \circ f$ izometrija i odrediti rastojanje tačaka $(f \circ g \circ f)(A)$ i $(f \circ g \circ f)(B)$.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$